М Е Х А Н І К А

УДК 539.3

І.О.НІЩЕНКО, Т.Л.МАРТИНОВИЧ, В.Є.ЮРИНЕЦЬ

ПРУЖНА РІВНОВАГА НЕСИМЕТРИЧНО З'ЄДНАНИХ ПЛАСТИНОК

1. Питанню несиметричного підкріплення пластинок тонкими пружними стержнями присвячена вже значна кількість робіт. Але в практиці досить часто виникає необхідність спаювати /склеювати/ пластинки різної висоти так, що їх серединні площини паралельно зміщені одна відносно одної. У цьому випадку, як і при несиметричному підкріпленні пластинки, в ній буде одночасно виникати, як узагальнений плоский напружений стан, так і явище згину. Ми пропонуємо один наближений підхід до дослідження напруженого та деформованого станів таких пластинок.

Розглянемо пластинку, що складається з n кусково-однорідних ізотропних пластинок несиметрично спаяних /склеєних/ між собою до деформації вздовж замкнутих, гладеньких контурів L_1, $L_2, \dots$, L_{n-1}, що не перетинаються між собою. Причому, контур L_k є лінією розділу k-ї пластинки, яка залишається зліва при обході контура проти годинникової стрілки, та j-пластинки. Сукупність інших контурів, що не являються лініями розділу середовищ, позначимо через L_0. На них можуть бути задані крайові умови першої, другої або змішаної основних задач.

Будемо вважати, що на лінії спаю L_k виконуються такі умови спряження: а/ статичні умови, що виражають рівність компонент головного вектора та головного моменту зусиль, які виникають на поверхні спаю

$$2h_k(N_k + iT_k) = 2h_j(N_j + iT_j); \quad P_k^{(n)} = P_j^{(n)}; \qquad /1.1/$$

$$M_n^{(k)} = M_n^{(j)} - 2h_j \zeta_k^* N_j; \quad H_{n\tau}^{(k)} = H_{n\tau}^{(j)} - 2h_j \zeta_k^* T_j;$$

б/ кінематичні умови, які зв"язують між собою переміщення точок серединних площин, прогини та кути повороту сусідніх пластин на лінії спаю

$$u_k + i v_k = (u_j + i v_j) - 2\zeta_k^* \frac{\partial w_j}{\partial t}; \qquad /1.2/$$

$$w_k = w_j; \qquad \frac{\partial w_k}{\partial n} = \frac{\partial w_j}{\partial n},$$

де

$2h$ – товщина пластинки; u, v, w – компоненти вектора переміщення; N, T – нормальні та дотичні напруження узагальненого плоского напруженого стану; $P^{(n)}$ – поперечна сила; M_n, $H_{n\tau}$ – згинальні та крутні моменти; ζ_k^* – зміщення k-ї пластинки по відношенню до j-ї; воно додатне, коли остання розміщена вище від першої. Індекси біля величин у формулах /1.1/, /1.2/ та далі показують до якої пластинки дана величина чи функція відноситься.

Якщо ввести комплексні потенціали $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ [1,2], з яких два перших характеризують узагальнений плоский напружений стан, а два останніх згин, то умови /1.1/ запишуться у такому вигляді:

$$h_k\left[\varphi_k(t) + t\overline{\varphi_k'(t)} + \overline{\psi_k(t)}\right] = h_j\left[\varphi_j(t) + t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}\right],$$

$$2h_j\zeta_k^*\left[\varphi_j(t) + t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}\right] = D_j(1-\nu_j)\left[n_j\varphi_j^*(t) + t\overline{\varphi_j^{*\prime}(t)} + \right.$$

$$\left. + \overline{\psi_j^*(t)}\right] - D_k(1-\nu_k)\left[n_k\varphi_k^*(t) + t\overline{\varphi_k^{*\prime}(t)} + \overline{\psi_k^*(t)}\right],$$

$$2\zeta_k^*\left[\varphi_j^*(t) + t\overline{\varphi_j^{*\prime}(t)} + \overline{\psi_j^*(t)}\right] = \frac{1}{\mu_j}\left[\varkappa_j\varphi_j(t) - t\overline{\varphi_j'(t)} - \right.$$

$$\left. - \overline{\psi_j(t)}\right] - \frac{1}{\mu_k}\left[\varkappa_k\varphi_k(t) - t\overline{\varphi_k'(t)} - \overline{\psi_k(t)}\right].$$

$$\psi_j^{*}(t)+t\,\overline{\varphi_j^{*\prime}(t)}+\overline{\psi_j^{*}(t)}=\varphi_k^{*}(t)+t\,\overline{\varphi_k^{*\prime}(t)}+\overline{\psi_k^{*}(t)},$$

ν – коефіцієнт Пуасона; $\mathcal{H}=\frac{3-\nu}{1+\nu}$, $n=-\frac{3+\nu}{1-\nu}$, $\mathcal{D}(1-\nu)=\frac{4\mu h^3}{3}$;
μ – модуль зсуву; $t\in L_k$.

Диференцюючи попередні рівності, виразимо їх через великі функції

$$\alpha_j\gamma_j^2\left[\Phi_j(t)+\overline{\Phi_j(t)}-e^{2i\alpha}\left(\bar t\,\Phi_j'(t)+\Psi_j(t)\right)\right]=$$

$$=\Phi_k(t)+\overline{\Phi_k(t)}-e^{2i\alpha}\left(\bar t\,\Phi_k'(t)+\Psi_k(t)\right),$$

$$3\gamma_j^2\delta_k\alpha_j\left[\Phi_j(t)+\overline{\Phi_j(t)}-e^{2i\alpha}\left(\bar t\,\Phi_j'(t)+\Psi_j(t)\right)\right]=$$

$$=\alpha_j\gamma_j^3\left[n_j\overline{\Phi_j^{*}(t)}+\Phi_j^{*}(t)-e^{2i\alpha}\left(\bar t\,\Phi_j^{*\prime}(t)+\Psi_j^{*}(t)\right)\right]-$$

$$-\left[n_k\overline{\Phi_k^{*}(t)}+\Phi_k^{*}(t)-e^{2i\alpha}\left(\bar t\,\Phi_k^{*\prime}(t)+\Psi_k^{*}(t)\right)\right],$$

$$\delta_k\left[\Phi_j^{*}(t)+\overline{\Phi_j^{*}(t)}-e^{2i\alpha}\left(t\,\Phi_j^{*\prime}(t)+\Psi_j^{*}(t)\right)\right]=$$

$$=\gamma_j\left[\mathcal{H}_j\overline{\Phi_j(t)}-\Phi_j(t)+e^{2i\alpha}\left(\bar t\,\Phi_j'(t)+\Psi_j(t)\right)\right]-$$

$$-\left[\mathcal{H}_k\overline{\Phi_k(t)}-\Phi_k(t)+e^{2i\alpha}\left(\bar t\,\Phi_k'(t)+\Psi_k(t)\right)\right],$$

$$\overline{\Phi_j^{*}(t)}+\Phi_j^{*}(t)-e^{2i\alpha}\left(\bar t\,\Phi_j^{*\prime}(t)+\Psi_j^{*}(t)\right)=$$

$$= \Phi_k^*(t) + \overline{\Phi_k^*(t)} - e^{2i\alpha}\left(\bar{t}\,\Phi_k^{*\prime}(t) + \Psi_k^*(t)\right),$$

де $\delta_k = \frac{\mathcal{X}_k^*}{h_k}$, $\gamma_j = \frac{h_j}{h_k}$, $\alpha_j = \frac{\mu_j}{\mu_k}$, $\varphi_j' = 2\mu_j h_j \Phi_j$,

$\psi_j' = 2\mu_j h_j \Psi_j$, $\varphi_j^{*\prime} = \Phi_j^*$, $\psi_j^{*\prime} = \Psi_j^*$.

α – кут між нормаллю до контура L_k і віссю Ox.

2. Як приклад, розглянемо рівновагу пластинки, що складається з концентричних кілець, спаяних між собою несиметрично. Якщо перше кільце є нескінченною пластинкою, то контур L_0 віддалений у нескінченність, а коли n – кільце – шайба, то контур L_n стягується в точку.

Дослідження напруженодеформованого стану складеного кільця при симетричному в"єднанні кілець однакової висоти наведені в роботі [2].

Комплексні потенціали в j – му кільці можна розкласти в ряди Лорана

$$\Phi_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(j)} \frac{z^n}{R_1^n}; \quad \Psi_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(j)} \frac{z^n}{R_1^n};$$
$$\Phi_j^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(j)} \frac{z^n}{R_1^n}; \quad \Psi_j^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_n^{(j)} \frac{z^n}{R_1^n}. \qquad /2.1/$$

Підставивши ці розклади функцій у рівності /1.4/ та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях σ $(z = R_j\sigma = R_j e^{i\theta})$, одержимо такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(1-n)C_n^{(j)}\rho_j^n + \bar{C}_{-n}^{(j)}\rho_j^{-n} - \mathcal{D}_{n-2}^{(j)}\rho_j^{n-2} = (1-n)C_n^{(j+1)}\rho_j^n + \bar{C}_{-n}^{(j+1)}\rho_j^{-n} - \mathcal{D}_{n-2}^{(j+1)}\rho_j^{n-2},$$

$$\delta_j\left[(1-n)C_n^{(j)}\rho_j^n + \bar{C}_{-n}^{(j)}\rho_j^{-n} - \mathcal{D}_{n-2}^{(j)}\rho_j^{n-2}\right] = \gamma_j\left[\mathcal{X}_j\bar{A}_{-n}^{(j)}\rho_j^{-n} - (1-n)A_n^{(j)}\rho_j^n + \right.$$

$$\left. + B_{n-2}^{(j)}\rho_j^{n-2}\right] - \left[\mathcal{X}_{j+1}\bar{A}_{-n}^{(j+1)}\rho_j^{-n} - (1-n)A_n^{(j+1)}\rho_j^n + B_{n-2}^{(j+1)}\rho_j^{n-2}\right], \qquad /2.2/$$

$$\alpha_j \gamma_j^2 \left[(1-n) A_n^{(j)} \rho_j^n + \bar{A}_{-n}^{(j)} \rho_j^{-n} - B_{n-2}^{(j)} \rho_j^{n-2} \right] =$$

$$= (1-n) A_n^{(j+1)} \rho_j^n + \bar{A}_{-n}^{(j+1)} \rho_j^{-n} - B_{n-2}^{(j+1)} \rho_j^{n-2},$$

$$3\delta_j \alpha_j \gamma_j \left[(1-n) A_n^{(j)} \rho_j^n + \bar{A}_{-n}^{(j)} \rho_j^{-n} - B_{n-2}^{(j)} \rho_j^{n-2} \right] =$$

$$= \alpha_j \gamma_j^3 \left[n_j \bar{C}_{-n}^{(j)} \rho_j^{-n} + (1-n) C_n^{(j)} \rho_j^n - \mathcal{D}_{n-2}^{(j)} \rho_j^{n-2} \right] -$$

$$- \left[n_{j+1} \bar{C}_{-n}^{(j+1)} \rho_j^{-n} + (1-n) C_n^{(j+1)} \rho_j^n - \mathcal{D}_{n-2}^{(j+1)} \rho_j^{n-2} \right],$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad (j = 1, 2, \ldots, m-1), \quad \rho_j = \frac{R_j}{R_1}.$$

Система /2.2/ розв"язувалась для трикомпонентного кільця, коли перше є нескінченою пластинкою, а останнє - шайба, при таких значеннях параметрів:

$$\alpha_1 = 3{,}077, \quad \alpha_2 = 0{,}624, \quad \gamma_1 = 0{,}5, \quad \gamma_2 = 0{,}667,$$
$$\nu_1 = 0{,}25, \quad \nu_2 = 0{,}2, \quad \nu_3 = 0{,}33, \quad \rho_2 = 0{,}667.$$

і рівних значеннях величин δ_1, δ_2.

Якщо пластинка на нескінченності згинається або розтягується в напрямку осі Ox, то

$$A_0^{(1)} = \frac{P}{8h_1\mu_1}; \qquad B_0^{(1)} = \frac{P}{4h_1\mu_1}, \qquad /2.4/$$
$$C_0^{(1)} = -\frac{M}{4\mathcal{D}_1(1+\nu_1)}; \qquad \mathcal{D}_0^{(1)} = -\frac{M}{2\mathcal{D}_1(1-\nu_1)}.$$

Інші коефіцієнти визначаються в системи /2.3/. Розподіл величин $\frac{\sigma_\theta}{P}$; $\frac{\sigma_n}{P}$; $\frac{\sigma_n h_1^2}{M}$ поблизу зовнішнього контура L_1 зображено відпонідно на рис. 1, 2, 3. Причому в квадрантах 1, 1У рис. 2,3 та – 1-ІІ рис. 1 показано зміну цих величин на нижньому краї пластинки, а в протилежних квадрантах на ІІ верхньому краї. Лінія 1 відповідає значенням $\delta_1 = 0,5$, $\delta_2 = 0,33$; лінія 2 – $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$ /тобто симетричному спаю/; лінія 3 – $\delta_1 = 0,2$, $\delta_2 = 0$; лінія 4 – $\delta_1 = 0,4$, $\delta_2 = 0$.

На рис. 4 показана залежність від δ_1 величин $\frac{\sigma_n}{p}$ /лінії 1.1'/ та $\frac{\sigma_\theta^* h_1^c}{H}$ /лінії 2.2'/ відповідно на нижньому та верхньому краях пластинки при $\delta_2 = 0$, $\theta = 0$.

Напруження поблизу контура L_2 значно менші за величиною, а тому їх значення тут не наведені.

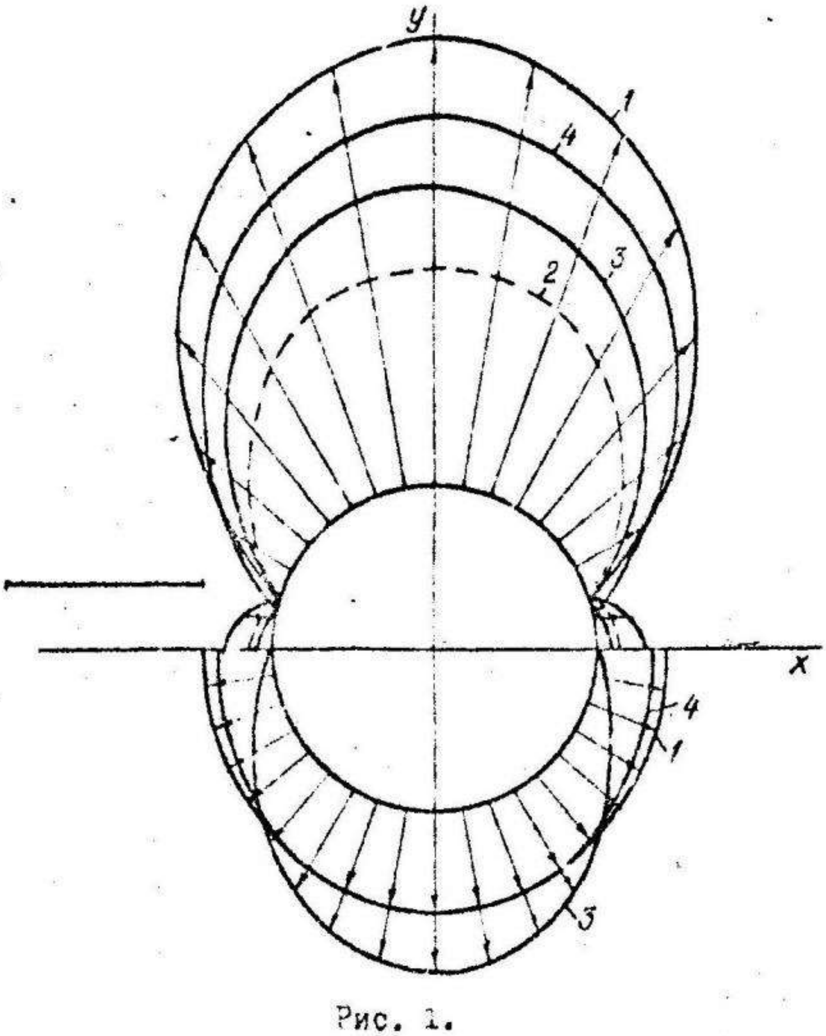

Рис. 1.

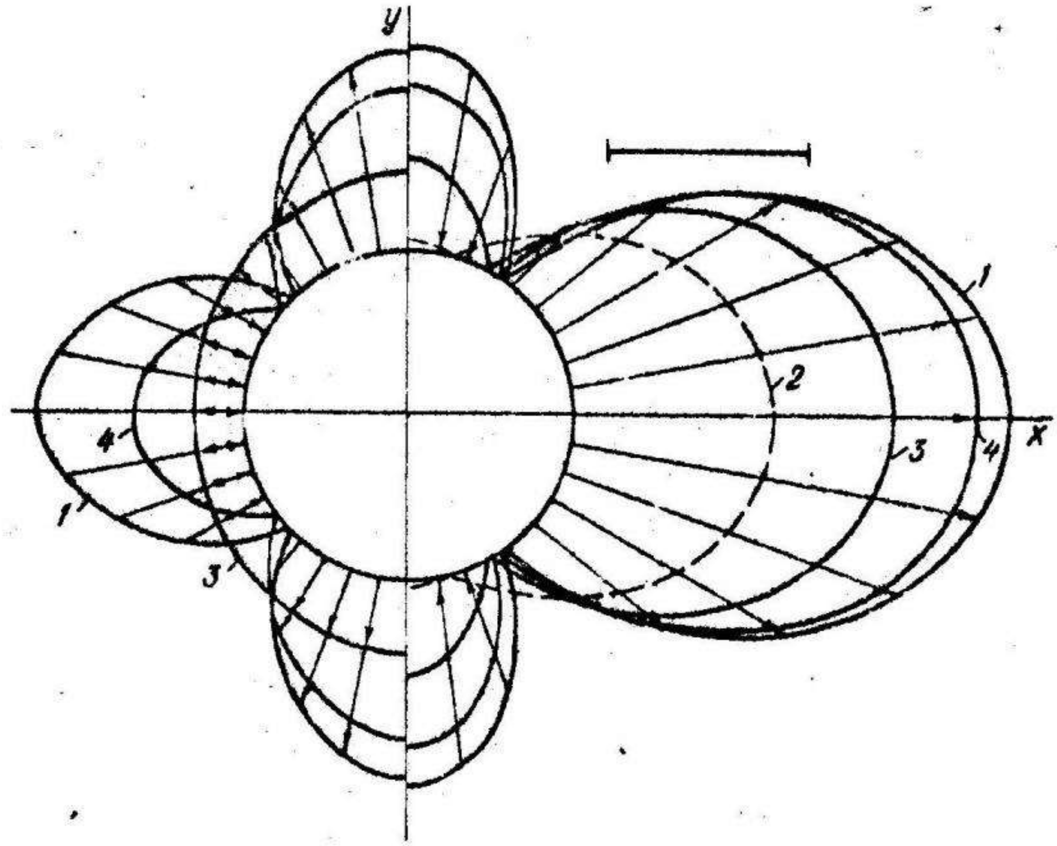

Рис. 2.

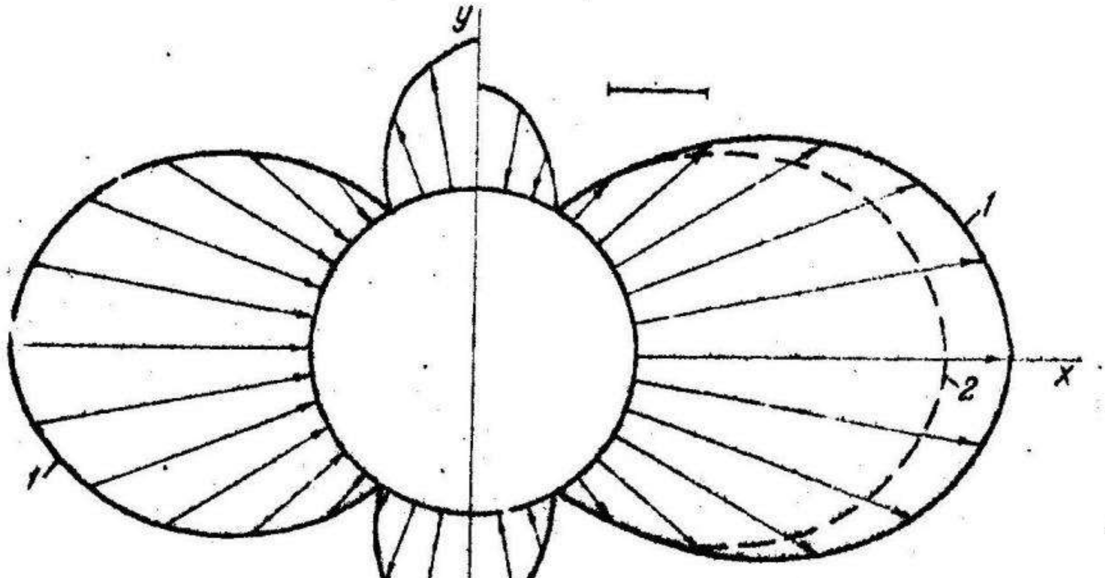

Рис. 3.

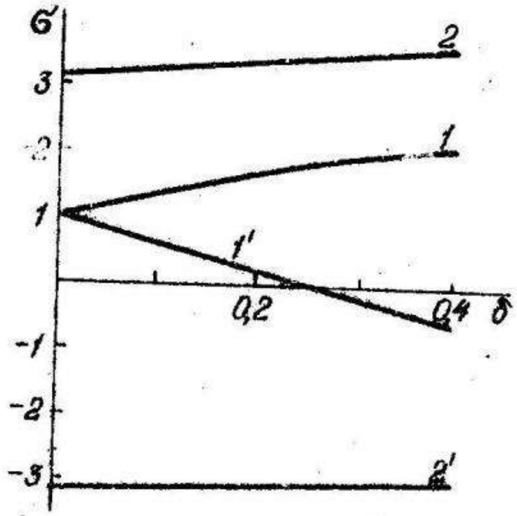

Рис. 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.

2. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. М., Гостехиздат, 1951.

УДК 539.385

В.В.ПОРОХОВСЬКИЙ, О.П.ПІДДУБНЯК

КРУЧЕННЯ ДВОШАРОВОГО ПРУЖНОГО ПАКЕТА ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ *

Задача про кручення круглим штампом пружного шару скінченної товщини розв"язана в роботі [4] , а двошарового пружного середовища у [2] .

1. У цій статті розглядається осесиметрична задача теорії пружності про кручення двошарового пакету, що займає область $-h_2 < z < h_1$, дископодібним жорстким включенням /шайбою/, впаяним у площині спря-

*Робота виконана під науковим керівництвом проф.Д.В.Грилицького