

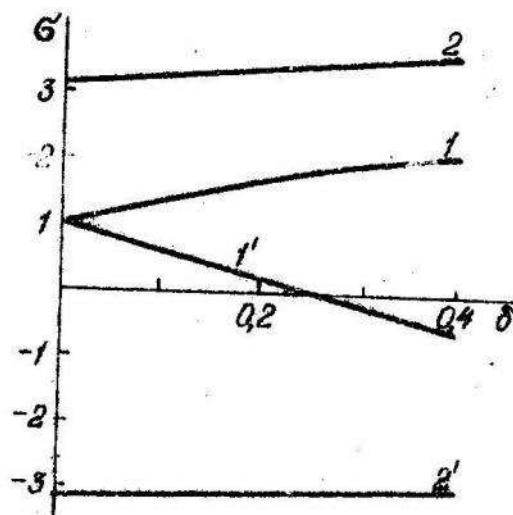


Рис. 4.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.

2. С а в и н Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. М., Гостехиздат, 1961.

УДК 539.385

В.В. ПОРОХОВСЬКИЙ, О.П. ПІДДУБНЯК

КРУЧЕННЯ ДВОШАРОВОГО ПРУЖНОГО ПАКЕТА ЖОРСТКИМ
ВКЛЮЧЕННЯМ *

Задача про кручення круглим штампом пружного шару скінченної товщини розв'язана в роботі [4], а двошарового пружного середовища у [2].

1. У цій статті розглядається осесиметрична задача теорії пружності про кручення двошарового пакету, що займає область $-h_2 < x < h_1$, дископодібним жорстким включенням /шайбою/, впаєним у площині спря-

*Робота виконана під науковим керівництвом проф. Д.В. Гриліцького

ження шарів $z=0$, $0 \leq z \leq a$. Вважається, що включення перебуває під дією моменту кручення величини M .

Досліджуються випадки, коли поверхні пакета вільні від зусиль, нерухомо закріплені, або одна з його поверхонь закріплена, а інша вільна від навантаження /рис. 1, а, б, в/.

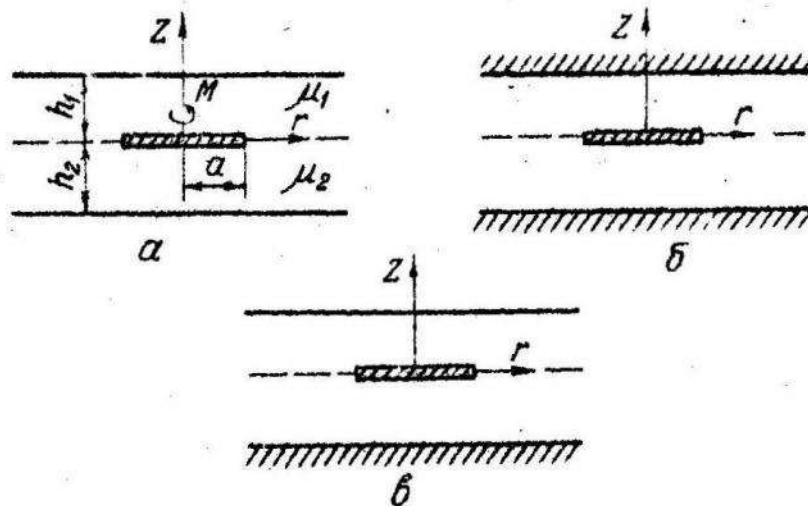


Рис. 1.

Розв'язання задачі зводиться до знаходження тангенціального зміщення u_θ з диференціального рівняння рівноваги [1]

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{u_\theta}{z^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} = 0, \quad /1.1/$$

$$u_\theta = u = \begin{cases} u_1, & 0 \leq z \leq h_1, \\ u_2, & -h_2 \leq z \leq 0 \end{cases}$$

при таких граничних умовах

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_j(z, x) = 0 \quad (j=1,2), \quad /1.2/$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 = u_2 = \Delta z, & \quad 0 \leq z \leq a, \\ u_1 = u_2, \quad \tau_{\theta x}^{(1)} = \tau_{\theta x}^{(2)}, & \quad z = a \end{aligned} \right\} \quad z=0, \quad /1.3/$$

$$\tau_{\theta x}^{(1)}(z, h_1) = 0, \quad \tau_{\theta x}^{(2)}(z, -h_2) = 0, \quad z \geq a, \quad /задача 1, рис.1, а/, /1.4/$$

$$u_1(z, h_1) = 0, \quad u_2(z, -h_2) = 0, \quad z \geq 0, \quad /задача 2, рис. 1, б/, /1.5/$$

$$\tau_{\theta x}^{(0)}(z, h_1) = 0, u_2(z, -h_2) = 0, z \geq 0 \quad / \text{задача 3, рис. 1, в} / \quad /1.6/$$

α - кут повороту жорсткого включення.

Компоненти тензора напружень визначаються за формулами

$$\tau_{\theta x} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{z\theta} = \mu z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{z} \right) \quad / \mu - \text{модуль зсуву} / \quad /1.7/$$

2. Використовуючи метод інтегрального перетворення Ханкеля, зведемо задачу до парних інтегральних рівнянь, які в свою чергу зведемо до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду [4]

$$Y(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a K(x, t) Y(t) dt = \frac{4\alpha}{\pi} (\mu_1 + \mu_2) x, \quad 0 \leq x \leq a \quad /2.1/$$

з ядром

$$K(x, t) = 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{\Phi(\xi)} - 1 \right] \sin x \xi \sin t \xi d\xi, \quad /2.2/$$

де

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \mu_1 \operatorname{th} \xi h_1 + \mu_2 \operatorname{th} \xi h_2 & / \text{задача 1} / \\ \mu_1 \operatorname{cth} \xi h_1 + \mu_2 \operatorname{cth} \xi h_2 & / \text{задача 2} / \\ \mu_1 \operatorname{th} \xi h_1 + \mu_2 \operatorname{cth} \xi h_2 & / \text{задача 3} / \end{cases} \quad /2.3/$$

Інтегральне рівняння /2.1/ розв'язуємо методом послідовних наближень, рівномірна збіжність якого буде забезпечена /для всіх трьох випадків/ [3] при $\lambda^* > 0,74$, де $\lambda^* = \min \{ \lambda_1, \lambda_2 \}$, $\lambda_j = \frac{h_j}{a}$ ($j = 1, 2$).

Таким чином,

$$Y(x) = \frac{4}{\pi} \alpha (\mu_1 + \mu_2) \sum_{n=1,3,5} a_n \left(\frac{x}{a} \right)^n, \quad 0 \leq x \leq a \quad /2.4/$$

$$a_1 = 1 - \frac{L_2}{3} \delta^3 + \frac{L_4}{30} \delta^5 + \frac{L_2^2}{9} \delta^6 - \frac{L_6}{360} \delta^7,$$

$$a_3 = \frac{L_4}{18} \delta^5 - \frac{L_6}{180} \delta^7,$$

$$a_5 = -\frac{L_6}{360} \delta^7,$$

/2.5/

тут

$$\delta = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{\Phi(2/a)} - 1 \right] \eta^n d\eta, \quad (n=2, 4, 6). \quad /2.6/$$

Переміщення в пакеті визначається за формулою

$$u_j(z, x) = u_{ij}(\tau, x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(\xi) \Psi_{ij}(\eta, x) \sin \xi \tau J_2(\eta \psi) d\eta d\xi. \quad /2.7/$$

де

$$\Psi_{ij}(\eta, x) = \frac{\sinh \eta x + (-1)^i [\delta_{1j} \operatorname{th} \eta h_1 + \delta_{2j} \operatorname{ch} \eta h_1] + \delta_{3j} [\delta_{2i} \operatorname{ch} \eta h_1 - \delta_{1i} \operatorname{th} \eta h_1] \operatorname{ch} \eta x}{\mu_1 [(1 - \delta_{2j}) \operatorname{th} \eta h_1 + \delta_{2j} \operatorname{ch} \eta h_1] + \mu_2 [\delta_{1j} \operatorname{th} \eta h_2 + (1 - \delta_{1j}) \operatorname{ch} \eta h_2]} \quad /2.8/$$

$i = 1, 2$; індекс $j = 1, 2, 3$ відповідає задачам 1, 2, 3,

δ_{ij} - символ Кронекера. Напруження легко одержати за формулами /1.7/. Момент кручення M зв'язаний з величиною кута повороту шайби співвідношенням

$$M = -16a^3 \mathcal{L}(\mu_1 + \mu_2) \sum_{n=0,1,2}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{2n+5}. \quad /2.9/$$

Характер напруженого стану пакета поблизу жорсткого включення описується за допомогою коефіцієнта інтенсивності контактних напружень $\tau_{\theta x}$ [5].

$$K_{\theta} = \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \sqrt{2\pi(a-z)} [\tau_{\theta x}^{(1)}(z, a) - \tau_{\theta x}^{(2)}(z, a)] \right\} = -\sqrt{\frac{\pi}{a}} \Psi(a). \quad /2.10/$$

3. Для ілюстрації одержаних результатів наведемо деякі числові підрахунки. У табл. 1, 2 наведені значення моменту кручення $m = M/M^\infty$ та коефіцієнта інтенсивності контактних напружень $k = K_{\theta}/K_{\theta}^\infty$ залежно від параметрів λ_1, λ_2 та $\gamma = \mu_1/\mu_2$. Тут $M^\infty = \frac{16}{3} \mathcal{L}(\mu_1 + \mu_2)$, $K_{\theta}^\infty = -4a \sqrt{\frac{\pi}{a}} (\mu_1 + \mu_2)$ - момент кручення та коефіцієнт інтенсивності контактних напружень, що відповідають задачі про кручення внутрішньої абсолютно жорсткою шайбою безмежного двохарового простору / $h_1 = h_2 = \infty$ /. На рис. 2, 3, 4 відповідно для задач 1, 2, 3 показано графіки залежностей m і k від товщини однорідного пакету / $\gamma = 1, \mu_1 = \mu_2$ /.

Таблиця 1

Значення моменту кручення m при різних
геометричних і пружних параметрах

Задача 1				Задача 2				Задача 3			
γ	λ_2	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	
	0,75	0,61	0,65	0,66	1,24	1,22	1,22	1,21	1,22	1,22	
0,1	2	0,96	0,99	0,99	1,04	1,01	1,01	0,98	1,01	1,01	
	100	0,97	1,00	1,00	1,03	1,00	1,00	0,97	1,00	1,00	
	0,75	0,61	0,76	0,77	1,24	1,18	1,18	1,11	1,17	1,18	
0,5	2	0,88	0,99	0,99	1,10	1,01	1,01	0,91	1,00	1,01	
	100	0,90	1,00	1,00	1,10	1,00	1,00	0,90	0,99	1,00	
	0,75	0,61	0,82	0,84	1,24	1,14	1,14	1,02	1,14	1,14	
1	2	0,82	0,99	0,99	1,14	1,01	1,01	0,85	1,00	1,01	
	100	0,84	0,99	1,00	1,10	1,01	1,00	0,84	0,99	1,00	

Таблиця 2

Значення коефіцієнту інтенсивності контактних
напружень k при різних геометричних і пружних
параметрах

Задача 1				Задача 2				Задача 3			
γ	λ_2	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	
	0,75	0,47	0,53	0,54	1,35	1,32	1,32	1,30	1,32	1,32	
0,1	2	0,95	0,99	0,99	1,05	1,01	1,01	0,97	1,01	1,01	
	100	0,96	1,00	1,00	1,04	1,00	1,00	0,96	1,00	1,00	
	0,75	0,47	0,57	0,69	1,35	1,25	1,25	1,14	1,24	1,25	
0,5	2	0,81	0,99	0,99	1,14	1,01	1,01	0,87	1,00	1,01	
	100	0,86	1,00	1,00	1,14	1,00	1,00	0,86	1,00	1,00	
	0,75	0,47	0,76	0,78	1,35	1,20	1,19	1,02	1,19	1,19	
1	2	0,78	0,99	0,99	1,20	1,01	1,01	0,79	1,00	1,01	
	100	0,78	0,99	1,00	1,19	1,01	1,00	0,78	1,00	1,00	

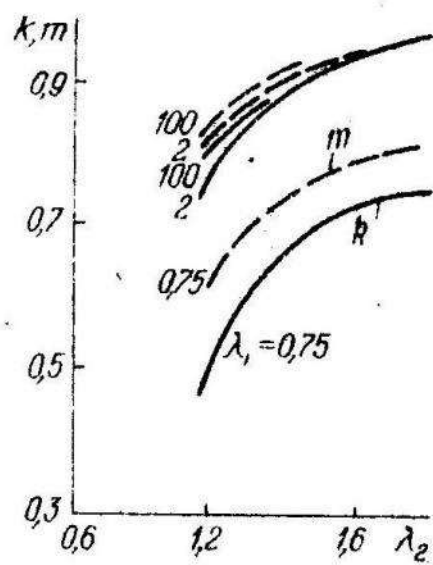


Рис. 2.

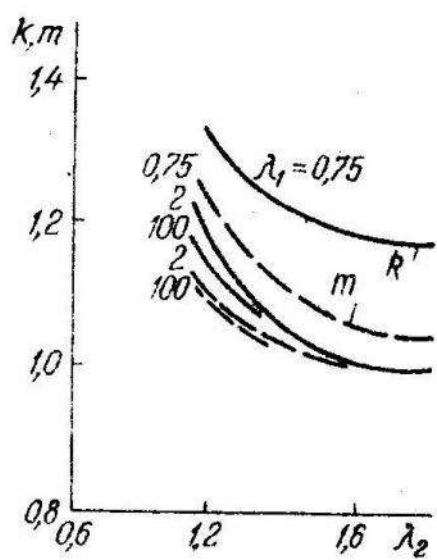


Рис. 3.

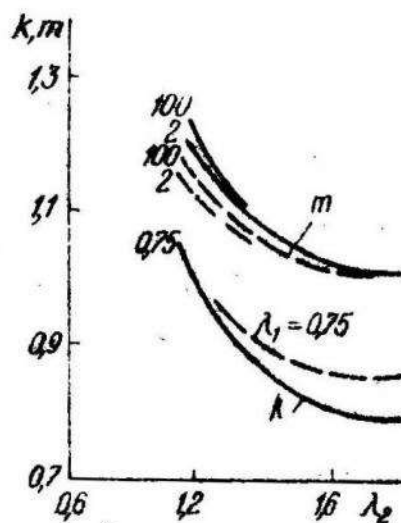


Рис. 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н.Х., А б р а м я н Б.Л. Кручение упругих тел. М. Физматгиз, 1963.
2. Г р и л і ц ь к и й Л.В. Кручения двохшарового пружного середовища. - "Прикладна механіка", 1961, т. 7, вип.1.
3. З а б р о й к о П.П.[и др.] Интегральные уравнения. М., "Наука", 1968.
4. У ф л я н д Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., "Наука", 1967.
5. Ч е р е п а н о в Г.П. Механика хрупкого разрушения. М., "Наука", 1974.

УДК 539.3

В.С. КРИНЦЬ

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНКИ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Розглянемо пружну напівбесмежну пластинку $y \leq 0$ товщини $2h$, прямолінійний край якої по всій довжині несиметрично підкріплений пружним стержнем сталого перерізу. Підкріплюючий стержень спаяний з