

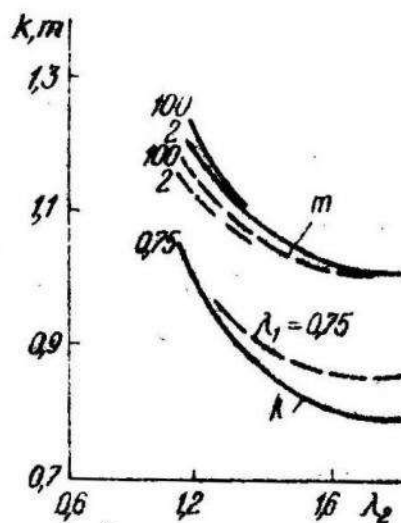


Рис. 4.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н.Х., А б р а м я н Б.Л. Кручение упругих тел. М. Физматгиз, 1963.
2. Г р и л і ц ь к и й Л.В. Кручения двохшарового пружного середовища. - "Прикладна механіка", 1961, т. 7, вип.1.
3. З а б р е й к о П.П.[и др.] Интегральные уравнения. М., "Наука", 1968.
4. У ф л я н д Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., "Наука", 1967.
5. Ч е р е п а н о в Г.П. Механика хрупкого разрушения. М., "Наука", 1974.

УДК 539.3

В.С. КРИНЦЬ

#### НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНКИ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Розглянемо пружну напівбесмежну пластинку  $y \leq 0$  товщини  $2h$ , прямолінійний край якої по всій довжині несиметрично підкріплений пружним стержнем сталого перерізу. Підкріплюючий стержень спаяний з

пластинкою до деформації таким чином, що вісь стержня паралельно зміщена від серединної площини пластинки на деяку величину  $\xi_0^*$  /ексцентриситет підкріплення/. Спряження пластинки зі стержнем ґрунтується на гіпотезі нормального плоского перерізу. До стержня прикладені зовнішні згинальні моменти  $m(x)$ , перерізувальні сили  $P(x)$ , нормальні і тангенціальні зусилля  $N(x)$ ,  $T(x)$ . Із боку стержня на пластинку передаються контактні згинальні моменти  $m^{(i)}(x)$ , перерізувальні сили  $P^{(i)}(x)$  і зусилля  $N^{(i)}(x)$ ,  $T^{(i)}(x)$ . Отже, на контурі спав пластинки зі стержнем маємо умови спряження /рис. 1/.

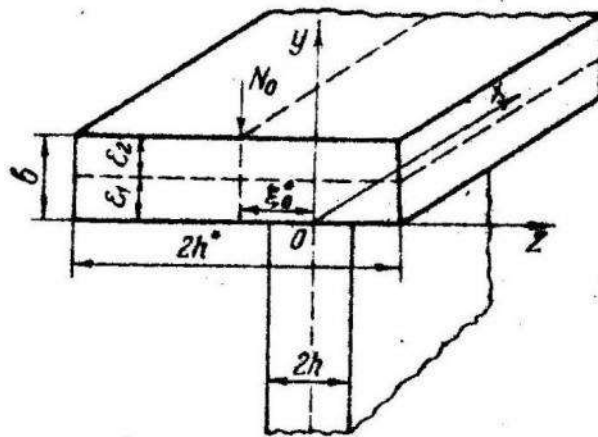


Рис. 1.

$$\begin{aligned} (u)_{y=0} &= u_1, \quad (\sigma)_{y=0} = \sigma_1, \quad (\omega)_{y=0} = \omega_1, \quad \left(\frac{d\omega}{dy}\right)_{y=0} = \frac{d\omega_1}{dy}, \\ (\sigma_y)_{y=0} &= N^{(i)}(x), \quad (\tau_{xy})_{y=0} = T^{(i)}(x), \\ (M_y)_{y=0} &= m^{(i)}(x), \quad \left(N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)_{y=0} = P^{(i)}(x). \end{aligned} \quad /1/$$

Незалежно від виду навантаження при ексцентриситеті підкріплення нерівному нулю в пластинці виникають узагальнено плоский і згинальний напружені стани. При  $\xi_0^* = 0$  задача розділяється на плоску і згин.

Надалі будемо користуватися інтегральним перетворенням Фур'є за змінюю  $x$

$$\bar{F}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{i\lambda x} dx, \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad /2/$$

Виходячи з теорії криволінійного стержня і прийнявши, що радіус кривизни дорівнює безмежності, одержимо диференціальні рівняння для компонент вектора зміщення елементів волокна стержня, що перебуває в контакті з пластинкою, які в області інтегрального перетворення Фур'є мають вигляд

$$\begin{aligned} i\lambda^3 \bar{u}_1 &= i\lambda \frac{2h^*}{g_2} \bar{T} - 2i\lambda h \left( \frac{1}{g_1} + \frac{\xi_0^{*2}}{\lambda^2} \right) \bar{T}^{(1)} - \frac{2h\xi_1}{g_2} \bar{N}^{(1)} + \frac{2h\xi_1}{g_2} \bar{N} + \frac{\xi_1^*}{\lambda^2} \bar{\rho}^{(1)} - \frac{\xi_0^*}{\lambda^2} \bar{\rho}, \\ \lambda^4 \bar{v}_1 &= \frac{2h^*}{g_2} \bar{N} - \frac{2h}{g_2} \bar{N}^{(1)} - i\lambda \frac{2h\xi_1^*}{g_2} \bar{T} - i\lambda \frac{2h\xi_1}{g_2} \bar{T}^{(1)}, \\ \bar{w}_1 &= \frac{1}{\lambda^2 A} \bar{p} - \frac{1}{\lambda^2 A} \bar{p}^{(1)} + i \frac{2h\xi_0^*}{\lambda^2 A} \bar{T}^{(1)} - \frac{\xi_1}{\lambda^2 C} \bar{m}^{(1)} + \frac{\xi_1}{\lambda^2 C} \bar{m} - \frac{2h\xi_0^* \xi_1}{\lambda^2 C} \bar{N}^{(1)} - \frac{\xi_1 \xi_2}{\lambda^2 C} \bar{p} - \frac{\xi_1^2}{\lambda^2 C} \bar{p}^{(1)}, \\ \frac{d\bar{w}_1}{dy} &= \frac{1}{\lambda^2 C} \bar{m}^{(1)} - \frac{1}{\lambda^2 C} \bar{m} + \frac{2h\xi_0^*}{\lambda^2 C} \bar{N}^{(1)} + \frac{\xi_1 \xi_2}{\lambda^2 C} \bar{p} + \frac{\xi_1^2}{\lambda^2 C} \bar{p}^{(1)}, \end{aligned} \quad /3/$$

де  $\frac{1}{g_1} = \frac{1}{g_1} + \frac{\xi_1^2}{g_2}$ ;  $\frac{1}{g_2} = \frac{1}{g_1} - \frac{\xi_1 \xi_2}{g_2}$ ;  $\xi_1$  і  $\xi_2$  - відстані волокон стержня від нейтрального шару /осі/ відповідно внутрішнього та зовнішнього краю;  $b = \xi_1 + \xi_2$  - висота стержня;  $2h$  - товщина пластинки;  $2h^*$  - товщина того краю стержня, який не дотикається до пластинки;  $g_1 = E^* F_0$  - жорсткість стержня на розтяг;  $g_2 = E^* J_x$ ,  $A = E^* J_y$  - жорсткості стержня на згин;  $C$  - жорсткість стержня на кручення;  $F_0$  - площа поперечного перерізу стержня;  $E^*$  - модуль пружності матеріалу стержня;  $J_x$  і  $J_y$  - моменти інерції перерізу.

У трансформантах Фур'є /2/ формули, що зв'язують компоненти переміщень елементів границі пружної півплощини з прикладеними до границі півплощини зусиллями /1/ мають вигляд [1]

$$\begin{aligned} (i\lambda^3 \bar{u})|_{y=0} &= \lambda^2 (\alpha_1 \bar{N}^{(i)} + \beta_1 \bar{T}^{(i)}), \quad (\lambda^3 \bar{v})|_{y=0} = i\lambda^2 (\alpha_2 \bar{N}^{(i)} + \beta_2 \bar{T}^{(i)}), \\ (\bar{w})|_{y=0} &= \frac{\delta_1}{\lambda^2} \bar{m}^{(i)} - \frac{i\delta_2}{\lambda^2} \bar{p}^{(i)}, \quad \left(\frac{d\bar{w}}{dy}\right)|_{y=0} = -\frac{\delta_1}{\lambda} \bar{m}^{(i)} - \frac{\delta_2}{\lambda^2} \bar{p}^{(i)}, \quad /4/ \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu_1 \mu_2 a_{11} - a_{12}, \quad \alpha_2 = \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2) a_{11} - 2\mu_1 \mu_2 a_{16} + a_{20}, \quad \beta_1 = (\mu_1 + \mu_2) a_{11} - a_{16}, \\ \beta_2 &= (\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2) a_{11} - 2(\mu_1 + \mu_2) a_{16} + a_{12} + a_{10}, \quad \delta_1 = \frac{1}{D_0} [(\mu_1^* + \mu_2^*) D_{22} + 2D_{66}], \\ \delta_2 &= \frac{1}{D_0} [(\mu_1^{*2} + \mu_1^* \mu_2^* + \mu_2^{*2}) D_{22} + 4(\mu_1^* \mu_2^*) D_{26} + D_{12} + 4D_{66}], \quad \delta_3 = \frac{1}{D_0} [\mu_1^* \mu_2^* D_{22} - D_{12}], \\ \delta_4 &= \frac{1}{D_0} [\mu_1^* \mu_2^* (\mu_1^* + \mu_2^*) D_{22} + 4\mu_1^* \mu_2^* D_{26} - 2D_{12}], \quad D_0 = \mu_1^* \mu_2^* D_{22}^2 + 2\mu_1^* \mu_2^* (\mu_1^* + \mu_2^*) D_{26} D_{22} + /5/ \\ &+ 8\mu_1^* \mu_2^* D_{26}^2 + (\mu_1^{*2} + \mu_1^* \mu_2^* + \mu_2^{*2}) D_{12} D_{22} + 4(\mu_1^* + \mu_2^*) D_{12} D_{26} + D_{12} (D_{12} + 4D_{26}) - \\ &- \mu_1^* \mu_2^* D_{22} (D_{12} + 4D_{26}) - 2(\mu_1^* + \mu_2^*) D_{12} D_{26} - 4D_{26} D_{12}, \end{aligned}$$

де  $a_{ij}$  і  $D_{ij}$  - пружні і жорсткості сталі анізотропної пластинки;  
 $\mu_1$  і  $\mu_2$ ,  $\mu_1^*$  і  $\mu_2^*$  - корені наступних характеристичних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{16}\mu + a_{22} &= 0, \\ D_{22}\mu^{*4} + 4D_{26}\mu^{*3} + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^{*2} + 4D_{12}\mu^* + D_{11} &= 0. \end{aligned} \quad /6/$$

У випадку, коли матеріал пластинки ізотропний, то вирази /5/ спростяться і запишуться таким чином:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1-\nu}{E}, \quad \beta_1 = -\alpha_2 = \frac{2i}{E}, \quad \delta_1 = \delta_2 = -\frac{1+\nu}{2(1-\nu)(3+\nu)}, \\ \delta_3 = \delta_4 = -\frac{2i}{2(1-\nu)(3+\nu)}, \end{aligned} \quad /7/$$

де  $E$  - модуль пружності матеріалу пластинки;  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона;  $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$  - циліндрична жорсткість пластинки.

Спряжуючи відповідно рівняння /3/ і /4/ згідно з граничними умовами /1/, одержуємо систему чотирьох алгебраїчних рівнянь відносно трансформант  $\bar{N}^{(i)}$ ,  $\bar{T}^{(i)}$ ,  $\bar{p}^{(i)}$  і  $\bar{m}^{(i)}$ . Розв'язуючи цю систему рівнянь і використовуючи інтегральне перетворення Фур'є /2/, знайдемо розподіл контактних зусиль на контурі снай пластинки зі стартером,

Наприклад, у випадку навантаження підкріплюючого стержня моментом  $m(x)$  одержимо

$$N^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_1(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt,$$

$$T^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_2(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt,$$

/8/

$$P^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_3(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt,$$

$$m^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_4(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt,$$

до

$$R(\lambda) = -\lambda \frac{\varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_1^2 f_2} (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1) \left[ \lambda^3 - i \frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} (\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1 - \frac{\varepsilon_1 \delta_2}{c} - \frac{\varepsilon_1 \delta_1}{c}) \lambda^2 + \frac{c}{\varepsilon_1^2 f_2} \left( \frac{f_2}{\lambda} - \frac{f_1}{c} \right) \lambda - i \frac{1}{\varepsilon_1^2 f_2} \right] \left\{ \lambda^4 - i \frac{2h d_2}{d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1} \left( \frac{1}{f_1} + \frac{\xi_0^{n2}}{\lambda} \right) \lambda^3 + \frac{2h \varepsilon_1 (d_1 + \beta_2)}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \lambda^2 + i \frac{2h \beta_1}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \lambda - \right.$$

/9/

$$- \frac{4h^2}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \left( \frac{1}{f_1} + \frac{\xi_0^{n2}}{\lambda} \right) + \frac{2h \xi_0^{n2} \beta_2}{\varepsilon_1 \beta_1 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \times$$

$$\times \left[ \frac{\lambda^5 + i \left( \frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} + \frac{d_2 c}{\varepsilon_1 \beta_2} \right) \lambda^4 + \left( \frac{2h \varepsilon_1}{g_2 \beta_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1 \beta_1 f_2} \right) \lambda^3 + i \frac{2h f_1}{g_2 \beta_2 f_2} \lambda^2 + \frac{2h c}{\varepsilon_1 g_2 \beta_2} \lambda - i \frac{2h}{\varepsilon_1 g_2 \beta_2 f_2} \right] \left\{ \frac{\lambda^3 - i \frac{c}{\varepsilon_1 f_2} (\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1 - \frac{\varepsilon_1 \delta_2}{c} - \frac{\varepsilon_1 \delta_1}{c}) \lambda^2 + \frac{c}{\varepsilon_1^2 f_2} \left( \frac{f_2}{\lambda} - \frac{f_1}{c} \right) \lambda - i \frac{1}{\varepsilon_1^2 f_2} \right\} \right\}.$$

/10/

$$R_1(\lambda) = \lambda^3 \frac{\varepsilon_1 \xi_0^{n2} \beta_2 f_2}{\lambda c} \left( \lambda^3 + i \frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} \lambda^2 + \frac{2h \varepsilon_1}{g_2 \beta_2} \lambda + i \frac{2h f_1}{g_2 \beta_2 f_2} \right),$$

$$R_2(\lambda) = \lambda^2 \frac{\varepsilon_1 \xi_0^{n2} d_2 f_2}{\lambda c} \left( \lambda^4 + i \frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} \lambda^3 - i \frac{2h}{g_2 d_2} \lambda + \frac{2h}{\varepsilon_1 g_2 d_2 f_2} \right),$$

/11/

$$R_3(\lambda) = -\lambda^3 \frac{\varepsilon_1 d_2}{c} (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1) \left( \lambda + i \frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} \right) \left[ \lambda^4 - i \frac{2h d_2}{d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1} \left( \frac{1}{f_1} + \frac{\xi_0^{n2}}{\lambda} \right) + \right.$$

/12/

$$+ \frac{2h \varepsilon_1 (d_1 + \beta_2)}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \lambda^2 + i \frac{2h \beta_1}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \lambda - \frac{4h}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \left( \frac{1}{f_1} + \frac{\xi_0^{n2}}{\lambda} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 R_4(\lambda) = & -i\lambda \frac{\epsilon_1 \delta_1}{\epsilon} (\alpha_1 A - \alpha_2 A) (\lambda^2 + i \frac{\delta_1}{\epsilon_1 \delta_2} \lambda - \frac{1}{\epsilon_1 A \delta_2}) \left[ \lambda^4 - i \frac{2h \alpha_2}{\alpha_1 A - \alpha_2 A} \left( \frac{1}{\delta_1} + \frac{\epsilon_1^*}{A} \right) \lambda^2 + \right. \\
 & + \frac{2h \epsilon_1 (\alpha_1 + \alpha_2)}{g_2 (\alpha_1 A - \alpha_2 A)} \lambda^2 + i \frac{2h \alpha_1}{g_2 (\alpha_1 A - \alpha_2 A)} \lambda - \frac{4h^2}{g_2 (\alpha_1 A - \alpha_2 A)} \left( \frac{1}{\delta_1} + \frac{\epsilon_1^*}{A} \right) = \\
 & \left. - i \frac{2h \epsilon_1^* \alpha_2}{\epsilon_1 A^2 \delta_2 (\alpha_1 A - \alpha_2 A)} \left( \frac{\lambda^2 - i \frac{2h}{g_2 \alpha_2}}{\lambda^2 + i \frac{\delta_1}{\epsilon_1 \delta_2} \lambda - \frac{1}{\epsilon_1 A \delta_2}} \right) \right]. \quad /13/
 \end{aligned}$$

У випадку симетричного підкріплення /  $\epsilon_0^* = 0$  / формули /8/, що дають закон розподілу контактних зусиль на контурі спад півплощини з стержнем, збігається з відповідними формулами роботи [2] .

Якщо на стержень діє зосереджений момент  $m_0$  , прикладений на початку координат, то в формулах /8/ необхідно прийняти

$$m(t) = -m_0 \delta(t), \quad /14/$$

і врахувати, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt = e^{i\lambda x}, \quad /15/$$

де  $\delta(t)$  - функція Дірака.

На рис. 2, 3 показана залежність нормальної складової контактних зусиль  $N^{(i)}$  і моменту  $m^{(i)}$  від ексцентриситету підкріплення  $\epsilon_0^*$  при наступних пружних, жорсткостних і геометричних даних:

для ізотропної пластинки і стержня

$$\begin{aligned}
 \frac{2h^*}{h} = 2,5; \quad b = 2h; \quad \frac{E^*}{E} = 2; \quad \nu^* = \nu = 0,3; \quad C = \frac{E^* A^* b^3 h^*}{(1+\nu^*)}; \quad A = 9249; \\
 \epsilon_1 = \epsilon_2 = h; \quad g_1 = 2E^* b h^*; \quad g_2 = \frac{1}{6} h^* b^3 E^*; \quad A = \frac{1}{3} E^* h^{*3} b; \quad /16/
 \end{aligned}$$

для ортотропної пластинки

$$\frac{E_1}{E_2} = 5,97; \quad \frac{E^*}{E_1} = 3,655; \quad \frac{E^*}{E_2} = 4294; \quad \mu_2 = 0,2. \quad /17/$$

На рис. 2, 3 криві 1-для ізотропної пластинки, а криві 2-для ортотропної пластинки. Обчислення проводили на ЕОМ "Мінськ-22".

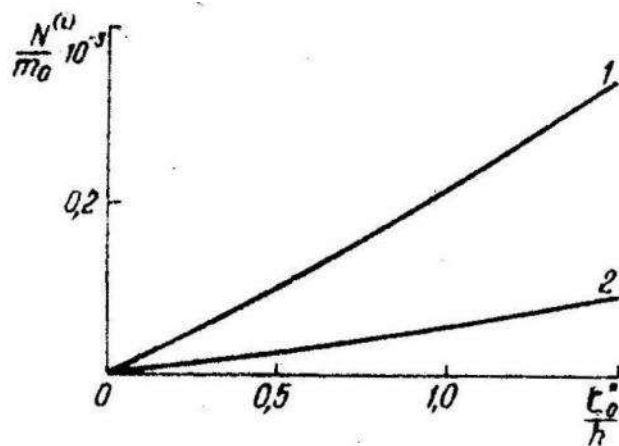


Рис. 2.

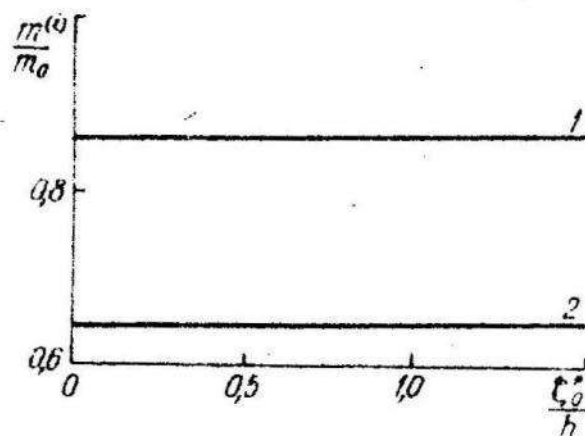


Рис. 3.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехтеоретиздат, 1957.
2. М а р т ы н о в и ч Т.Л. Анизотропная полуплоскость с подкрепленным краем. - "Инженерный журнал", 1955, т. V, вып. 2.