УДК 539.38

Р.І.МОКРИК, Ю.О.ПИР"ЄВ

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СМУГИ МАЛОЇ ТОВЩИНИ

Нехай у пружну смугу товщиною h, що лежить на жосткій півплощині, під дією сили і моменту втискується гладкий штамп, нагрітий до температури $T(x)$. Зовні штампа смуга вільна від навантаження і температура її границі дорівнює нулеві. Якщо смуга лежить без тертя на півплощині, то відповідну задачу назвемо задачею 1, якщо смуга зчеплена нерухомо з основою – задачею 2. Тепловий контакт між смугою і основою вважається ідеальним. Необхідно визначити контактні напруження під штампом $q(x)$.

Методами операційного числення описані задачі зводяться до знаходження функції $q^*(x)$ з наступного інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-1}^{1} q^*(\xi) K_m\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) - \int_{-1}^{1} t(\xi)\,\Theta_m\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi; \quad -1 \le x \le 1 \qquad /1/$$

де $\lambda = ha^{-1}$; $f(x) = E[2a(1-\nu^2)]^{-1}\delta(xa)$, $q^*(x) = q(xa)$, $t(\xi) =$

$= E\alpha_T[2(1-\nu)]^{-1}T(\xi a)$, $2a$ – величина площадки контакту; $\delta(xa)$ – осадка поверхні смуги в області контакту.

Ядра інтегральних рівнянь $K_m(t)$ і функції $\Theta_m(t)$ мають вигляд:

$$K_m(t) = \int_0^\infty \frac{L_m(u)}{u}\cos tu\,du; \quad \Theta_m(t) = \int_0^\infty \frac{N_m(u)}{u}\cos tu\,du;$$

$$L_1(u) = \frac{\operatorname{ch}2u - 1}{\operatorname{sh}2u + 2u}; \qquad L_2(u) = \frac{(3-4\nu)\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u - u}{u^2 + 4(1-\nu)^2 + (3-4\nu)\operatorname{sh}^2 u};$$

$$N_1(u) = \frac{\lambda^* + L_1(u)}{1 + \lambda^*\operatorname{cth}u}; \qquad \lambda^* = \frac{\lambda_c}{\lambda_n};$$

$m=1,2$ відповідають номерам задач; λ_c, λ_n – відповідно коефіцієнт теплопровідності матеріалу смуги і півплощини

$$N_2(u)=2(1-\nu)\cdot\frac{u(\lambda^*-thu)-\lambda^*(1-2\nu)\,thu-2(1-\nu)}{[u^2+4(1-\nu)^2+(3-4\nu)sh^2u](\lambda^*+thu)}+\frac{\lambda^* thu+1}{\lambda^*+thu}.$$

Якщо прийняти температуру штампа $T(x)=0$, з інтегральних рівнянь /1/ випливають рівняння чисто силових контактних задач, досліджених в роботах [1–4].

Зауважимо, що випадок $\lambda^*=0$ відповідає підтримуванню нижньої границі смуги при нульовій температурі, а $(\lambda^*)^{-1}=0$ теплоізоляції нижньої границі смуги. Для цих випадків введемо позначення

$$N_m(u)=N_{mj}(u)$$

$j=1$, коли $\lambda^*=0$ і $j=2$, якщо $(\lambda^*)^{-1}=0$.

Неважко показати, що функції $N_{mj}(u)\,u^{-1}$ поряд з функціями $L_m(u)u^{-1}$, які описані в роботі [4], зберігають ті ж самі властивості.

Асимптотичні при малих λ розв"язки інтегральних рівнянь /1/ можна одержати шляхом послідовних наближень.

Якщо $t(\xi)$ зобразити у вигляді

$$t(\xi)=\psi_+\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right)+\psi_-\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right)-\psi_1(\xi),$$

то розв"язок інтегрального рівняння /1/ у загальному випадку можна записати у формі

$$q^*(\xi)=q_0(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\bar\omega_+^n\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right)+\bar\omega_-^n\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right)\right];\qquad |\xi|\leqslant 1$$

$$q_0(\xi)=\omega_+^0\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right)+\omega_-^0\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right)-\omega_1(\xi). \qquad /2/$$

Функції $\bar\omega_\pm^n(t)$ визначаються послідовно зі співвідношень

$$\int_0^{\infty}\bar\omega_\pm^n(\tau)K_m(\tau-t)d\tau=\int_{\frac{2}{\lambda}}^{\infty}\bar\omega_\mp^{n-1}(\tau)K_m\left(\frac{2}{\lambda}-\tau-t\right)d\tau- \qquad /3/$$

$$-\delta_1^n\int_{\frac{2}{\lambda}}^{\infty}\left\{\psi_\mp(\tau)-\psi_1[\mp(\lambda\tau-1)]\right\}\theta_{mj}\left(\frac{2}{\lambda}-\tau-t\right)d\tau;$$

$$\bar{\omega}_{\mp}^{\circ}(\tau) = \omega_{\mp}^{\circ}(\tau) - \omega_1[\mp(\lambda\tau - 1)]; \quad \delta_1^n = \begin{cases} 1; & n = 1, \\ 0; & n > 1. \end{cases}$$

Застосовуючи перетворення Фур"є, функцію $\omega_1(\tau)$ можна записати у вигляді

$$\omega_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}(\eta)}{\bar{K}_m(\eta)} e^{-i\eta\tau\lambda^{-1}} d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\Psi}(\eta)\bar{\theta}_{mj}(\eta)}{\bar{K}_m(\eta)} e^{-i\eta\tau\lambda^{-1}} d\eta,$$

де $\bar{K}_m(z)2^{-1}$, $\bar{\theta}_{mj}(z)2^{-1}$, $\bar{\Psi}(z)$ – трансформанти Фур"є відповідно функцій $K_m(t)$, $\theta_{mj}(t)$, $\Psi_1(\lambda t)$, а

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) + f_+(t) + f_-(t)] e^{izt\lambda^{-1}} dt.$$

Функції $f_-(t)$, $f_+(t)$ є продовженням функції $f(t)$ довільним чином відповідно в області $-\infty < t < -1$ і $1 < t < \infty$.

Використовуючи метод Вінера – Хопфа функції $\omega_{\pm}^{\circ}(\xi)$ визначаємо за формулами

$$\omega_{\pm}^{\circ}(\xi) = S(\xi)\mathcal{H}_{\pm} + S(\xi)X_{\mp}. \qquad /4/$$

Тут введені позначення:

$$\mathcal{H}_{\pm}(t) = \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \bar{\Phi}_{\pm}(\eta)\varkappa(t,\eta)d\eta, \quad \varkappa(t,\eta) = \frac{e^{i\eta\lambda^{-1}}}{\bar{K}_m^-(\eta)(\eta - t)},$$

$$X_{\pm}(t) = \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \bar{\Psi}_{\mp}(\eta)\chi(t,\eta)d\eta, \quad \chi(t,\eta) = \frac{\bar{\theta}_{mj}(\eta)}{\bar{K}_m^-(\eta)(\eta - t)},$$

$$\bar{\Psi}_{\mp}(\eta) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_0^{\infty} \Psi_{\mp}(\xi) e^{i\eta\xi\lambda^{-1}} d\xi, \quad S(x)f = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{f(t)e^{-itx}}{2\pi i \bar{K}_m^+(t)} dt.$$

$\varepsilon : c > 0$; ε – як завгодно мале фіксоване число

$$\bar{\Phi}_{\pm}(\eta) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_{-1}^{\infty} [f(\pm\xi) + f_{\pm}(\pm\xi)] e^{i\eta\xi\lambda^{-1}} d\xi$$

$\bar{K}_m(z) = \bar{K}_m^+(z)\ \bar{K}_m^-(z)$, причому $\bar{K}_m^+(z)$ – регулярна функція в області $\Omega \cup (\mathrm{Im}\, z > 0)$; $\bar{K}_m^-(z)$ – регулярна функція в області $\Omega \cup (\mathrm{Im}\, z < 0)$; Ω – область регулярності функції $\bar{K}_m(z)$ і в якій відсутні її нулі.

Розглянемо важливий частинний випадок $f(x) = E\delta_0 [2a(1-\nu^2)]^{-1} = f_0 = const$, $t(x) = E\alpha_T T_0 [2(1-\nu)]^{-1} = t_0 = const$ /плоский штамп нагрітий до постійної температури/. Тоді $\omega_1(x)$ матиме вигляд

$$\omega_1(x) = f_0 (\mathcal{D}_m \lambda)^{-1} + t_0 A_{mj} \mathcal{D}_m^{-1}.$$

Використовуючи ідею наближеної факторизації [6] , апроксимуємо функції $L_m(u)u^{-1}$ і $N_{mj}(u)u^{-1}$ виразами

$$\frac{L_m(u)}{u} \simeq \frac{\sqrt{u^2 + B_m^2}}{u^2 + C_m} \quad ; \quad \frac{N_{mj}(u)}{u} \simeq \frac{\sqrt{u^2+B_m^2}\,(u^2+\alpha_{mj})}{(u^2+C_m)(u^2+\beta_{mj})}, \qquad /5/$$

задача 1: $B_1 = 1$, $C_1 = 2$; задача 2: $B_2 = 1{,}031$, $C_2 = 2{,}54$ при $\nu = 0{,}3$; задача 1-1: $\alpha_{11} = 0$, $\beta_{11} = 0$; задача 1-2: $\alpha_{12} = 3$, $\beta_{12} = 1{,}5$; задача 2-1: $\alpha_{21} = 1{,}852$, $\beta_{21} = 1{,}059$ при $\nu = 0{,}3$; задача 2-2: $\alpha_{22} = 3{,}749$, $\beta_{22} = 1{,}071$ при $\nu = 0{,}3$.

З /4/, враховуючи /5/, одержуємо формулу для контактного напруження в нульовому наближенні:

$$q_0(\tau) = \left[\frac{E\delta_0\, \omega(\tau)}{2(1-\nu^2)\mathcal{D}_m B_m a} + \Psi(\tau)\, \frac{E\ T_0\ \alpha_T\ \lambda\ S_1}{2(1-\nu)\ B_m}\right] \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \ ; |\tau| \leq 1$$

$$\omega(\tau) = \sqrt{\frac{\mathcal{D}_m B_m}{\pi}}\left(\alpha_-\, e^{-\alpha_+^2} + \alpha_+\, e^{-\alpha_-^2}\right) + \left[erf(\alpha_+) + erf(\alpha_-) - 1\right]\alpha_+\alpha_- \ ;$$

$$\Psi(\tau) = S_2\sqrt{\frac{B_m}{\pi}}\left(\alpha_- e^{-\alpha_+^2} + \alpha_+ e^{-\alpha_-^2}\right) - \Big[2ch(\beta_+^2) + 2ch(\beta_-^2) +$$

$$+ \frac{\alpha_{mj}}{\beta_{mj} S_1} - e^{\beta_+^2}\, erf(\gamma_+) - e^{\beta_-^2}\, erf(\gamma_-)\Big]\alpha_+\alpha_-$$

Аналогічно дістаємо вираз для прогину поза штампом

$$\delta(a-a\lambda t)=\delta_0\left[1-\operatorname{erf}\sqrt{-B_m t}+\sqrt{1-k_m}\operatorname{erf}\sqrt{-B_m(1-k_m)t}\,e^{\sqrt{C_m}t}\right]+$$

$$+h(1+\nu)\alpha_T T_0 S_1 S_3\left[\sqrt{B_m(1-k_m)}\,e^{\sqrt{C_m}t}\operatorname{erf}\sqrt{-B_m(1-k_m)t}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{B_m(1-k_{mj})}\,e^{\sqrt{\beta_{mj}}t}\operatorname{erf}\sqrt{-B_m(1-k_{mj})t}\right];\ -\infty<t<0,$$

де $\mathcal{D}_m=B_m C_m^{-1};\ k_m=\sqrt{C_m}\,B_m^{-1},\ k_{mj}=\sqrt{\beta_{mj}}\,B_m^{-1},\ A_{mj}=B_m\alpha_{mj}(C_m\beta_{mj})^{-1};$

$$\alpha_\pm=\left[(1\pm\tau)B_m\lambda^{-1}\right]^{0,5};\quad \beta_\pm=\left[(1\pm\tau)\sqrt{\beta_{mj}}\,\lambda^{-1}\right]^{0,5};\ \gamma_\pm=(\alpha_\pm^2+\beta_\pm^2)^{0,5};$$

$$S_1=\frac{\alpha_{mj}-\beta_{mj}}{2\beta_{mj}};\qquad S_2=\frac{(\sqrt{\beta_{mj}}+B_m)^{0,5}}{\sqrt{C_m}+\sqrt{\beta_{mj}}};\qquad S_3=\frac{(\sqrt{\beta_{mj}}+B_m)^{0,5}}{C_m-\beta_{mj}}.$$

При $T_0=0$ одержуємо результати чисто силової контактної задачі. Використовуючи знайдене нульове наближення $q_0(\tau)$, з /3/ знаходимо $\bar{\omega}^1(\tau)$ і так далі. Вираз для $\bar{\omega}^1(\tau)$ з точністю до членів порядку $\lambda^\mu\ (\mu>1)$ має вигляд

$$\bar{\omega}^1(\tau)=\frac{f_0}{\mathcal{D}_m\lambda}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\,e^{-B_m\frac{2}{\lambda}}\left\{\sqrt{\frac{2}{C_m}}\ \frac{1-k_m}{1+k_m}\ \frac{e^{-B_m\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}+(1-k_m)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\mathcal{D}_m}\,e^{B_m\tau}\left[\operatorname{erf}\sqrt{2B_m\tau}-1\right]\right\}+t_0S_1\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\,e^{-B_m\frac{2}{\lambda}}\times\right.$$

$$\times\left[\sqrt{\frac{2}{B_m}}\ \frac{1}{1+k_m}\ \frac{e^{-B_m\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}+e^{B_m\tau}\left(\operatorname{erf}\sqrt{2B_m\tau}-1\right)\right]\left(S_2-\frac{1}{(B_m+\sqrt{C_m})^{0,5}}\right)-$$

$$\left.-e^{-\sqrt{\beta_{mj}}\frac{2}{\lambda}}\left[S_2\frac{e^{-B_m\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}+e^{\sqrt{\beta_{mj}}\tau}\left(\operatorname{erf}\sqrt{B_m(1+k_{mj})\tau}-1\right)\right]\right\};\ 0<\tau<\infty.$$

Обчислення показали, що на відміну від чисто силових контактних задач [1, 3, 5], у контактних задачах термопружності нульове наближення є недостатнім, необхідним є знаходження принаймні першого наближення. У розглянутому частинному випадку врахування другого наближення при $\lambda<1$ змінює розв"язок менше ніж на 0,2%.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров В.М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. - ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.

2. Александров В.М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. - ПММ, 1963, т.27, вып.5.

3. Бабешко В.А. Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике. - ДАН СССР, 1969, т.186, № 6.

4. Александров В.М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. - ПММ, 1968, т.32, вып. 5.

5. Александров В.М. Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя. - ПММ, 1969, т.33, вып. 1.

6. Koiter W. T. Approximate solution of Wiener-Hopf type integral equations with applications, part 1-3. „- Proc. Koninkl. Ned Akad. Wet.," 1954, Bd. 57, No. 5.

УДК 539.3

В.П.ВУШКО

ІЗОТРОПНА ПЛАСТИНКА З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНИМ ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної пластинки товщиною $2h$ з еліптичним отвором L_0, край якого несиметрично підсилений пружним кільцем сталого перерізу. Площина осі кільця зміщена від серединної площини пластинки на величину ζ_0^* /ексцентриситет підсилення/. Напруженодеформований стан підсилюючого кільця описується рівняннями теорії тонких криволінійних стержнів. Незалежно від навантаження пластинка зазнає згинального і узагальнено плоского напружених станів.

Вважатимемо, що підсилюючий стержень вільний від навантаження, а напруження та згинальні моменти у віддалених /від отвору/ частинах пластинки дорівнюють: $\sigma_x^\infty = p$; $\sigma_y^\infty = q$; $\tau_{xy}^\infty = \tau$; $M_x^\infty = M_1$; $M_y^\infty = M_2$; $H_{xy}^\infty = M_{12}$