

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А л е к с а н д р о в В.М.. Оприближенном решении одного типа интегральных уравнений. - ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
2. А л е к с а н д р о в В.М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. - ПММ, 1963, т.27, вып.5.
3. Б а б е ш к о В.А. Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике. - ДАН СССР, 1969, т.186, № 6.
4. А л е к с а н д р о в В.М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. - ПММ, 1968, т.32, вып. 5.
5. А л е к с а н д р о в В.М. Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя. - ПММ, 1969, т.33, вып. 1.
6. Koiter W. J. *Approximate solution of Wigner. Hopf type integral equations with applications, part 1-3.* - Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet., 1954, Bd. 57, No. 5.

УДК 539.3

В.П.ВУШКО

ІЗОТРОПНА ПЛАСТИНКА З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕННЯМ ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної пластинки товщиною $2h$ з еліптичним отвором L , край якого несиметрично підсилений пружним кільцем сталого перерізу. Площина осі кільця зміщена від середньої площини пластинки на величину ξ_0 /ексцентриситет підсилення/. Напруженодеформований стан підсилюючого кільця описується рівняннями теорії тонких криволінійних стержнів. Незалежно від навантаження пластинка знає згинального і узагальнено плоского напружених станів.

Будемо вважати, що підсилюючий стержень вільний від навантаження, а напруження та згинальні моменти у віддалених /від отвору/ частинах пластинки дорівнюють: $\sigma_x^\infty = p$; $\sigma_y^\infty = q$; $\tau_{xy}^\infty = z$; $M_x^\infty = M_1$;
 $M_y^\infty = M_2$; $H_{xy}^\infty = M_{12}$

Область D , яка міститься між двома конформальними еліпсами $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$, причому контур $\mathcal{L}_2$ віддалений в нескінченність, відобразимо на концентричне кільце, обмежене колами γ_1 і γ_2 радіусів $\rho_1 = 1$ і $\rho_2 = \infty$, площини ζ за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + \frac{m}{\zeta}); \quad m = \frac{a_1 - b_1}{2}, \quad R = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad /1/$$

де a_1 і b_1 - півосі еліпса $\mathcal{L}_1$.

У перетвореній області /1/ крайові умови нашої задачі при відсутності навантаження на кільце, згідно з формулами /5/-/12/ роботи [1] набувають вигляду ($z_1 > z_0$)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \int_{\gamma_1 \gamma_2} \overline{\Phi_1(\sigma)} F_1'(\sigma) \omega(\sigma) d\sigma &= -\frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \overline{F_1'(\sigma)} \frac{\delta \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} d\sigma + \\ &+ \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} [(z_1 - z_0) e_0 - i \frac{\eta_0 z_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma}] d \left[\frac{\overline{F_1(\sigma)}}{\omega(\sigma)} \right] + \int_{\gamma_2} (N_2 + iT_2) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma; \\ \int_{\gamma_2} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \kappa \int_{\gamma_1} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \int_{\gamma_1 \gamma_2} \overline{\Phi_1(\sigma)} F_1'(\sigma) \omega(\sigma) d\sigma &= \\ = -2\mu \int_{\gamma_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + i \theta_\sigma - \zeta_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - \frac{1}{z_1} \theta_\sigma \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \\ &+ \int_{\gamma_2} (N_2 + iT_2) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma; \\ (1 + \kappa) \int_{\gamma_1} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma = 2\mu \int_{\gamma_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + i \theta_\sigma - \right. \\ &- \zeta_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - \frac{1}{z_1} \theta_\sigma \right) \left. \right] \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \overline{F_1'(\sigma)} \frac{\delta \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} d\sigma + \\ &+ \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} [(z_1 - z_0) e_0 + i \frac{\eta_0 z_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma}] d \left[\frac{\overline{F_1(\sigma)}}{\omega(\sigma)} \right]; \\ \int_{\gamma_1 \gamma_2} \overline{\Psi_1(\sigma)} F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma = (1 + \kappa) \int_{\gamma_1} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\gamma_1 \gamma_2} \overline{\Phi_1(\sigma)} F_1'(\sigma) \omega(\sigma) d\sigma - \end{aligned}$$

$$-2\mu \int_{\delta_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + i\theta_\sigma - z_0 \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - \frac{1}{z_1} \theta_\sigma \right) \right] F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int_{\delta_2} (N_2 + iT_2) F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma;$$

$$\mathcal{K}^* \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega(\sigma) d\sigma = \mathcal{D}^* \int_{\delta_2} J_2(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \mathcal{D}^* \int_{\delta_1} \frac{z_1}{z_0} \left[\frac{C}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - i \frac{A}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + \frac{i\sigma \omega'(\sigma)}{z_1 |\omega'(\sigma)|} (C\theta_\sigma + iA\theta_\sigma) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma +$$

$$+ z_0^* \mathcal{D}^* \left\{ \int_{\delta_1} \left[(z_0 - z_1) e_0 + i \frac{h_2 z_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\overline{F_1(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \right] + \int_{\delta_1} e_0 \overline{F_1(\sigma)} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} d\sigma \right\};$$

$$\mathcal{K}^* \int_{\delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\delta_1} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega(\sigma) d\sigma - \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega(\sigma) d\sigma =$$

$$= \mathcal{D}^* \int_{\delta_2} J_2(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\delta_1} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\sigma - i \left(\frac{z_0}{z_1} \theta_\sigma - i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma;$$

$$(\mathcal{K}^* - 1) \int_{\delta_1} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega(\sigma) d\sigma = - \int_{\delta_1} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\sigma - i \left(\frac{z_0}{z_1} \theta_\sigma - i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma +$$

$$+ \mathcal{D}^* \int_{\delta_1} \frac{z_1}{z_0} \left[\frac{C}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - i \frac{A}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + \frac{i\sigma \omega'(\sigma)}{z_1 |\omega'(\sigma)|} (C\theta_\sigma + iA\theta_\sigma) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma -$$

$$- z_0^* \mathcal{D}^* \left\{ \int_{\delta_1} \left[(z_0 - z_1) e_0 + i \frac{h_2 z_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\sigma^2 \overline{F_1(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \right] - \int_{\delta_1} e_0 \overline{F_1(\sigma)} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} d\sigma \right\}$$

$$\int_{\delta_1 + \delta_2} \overline{\Psi_1^*(\sigma)} F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma = (1 - \mathcal{K}^*) \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \mathcal{D}^* \int_{\delta_2} J_2(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\delta_1} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\sigma - i \left(\frac{z_0}{z_1} \theta_\sigma - i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma,$$

де σ - афікс точки контура $\delta = \delta_1 + \delta_2$; $F_1(z)$ - довільна функція, голоморфна в перетвореній області

$$N_2 + iT_2 = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{2} - \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty - 2i\tau_\infty}{2} \frac{\rho_2^2 \overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma^2 \omega'(\sigma)};$$

$$J_2(\sigma) = \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} - \frac{M_y^\infty - M_x^\infty - 2iH_{xy}}{2} \cdot \frac{\rho_2^2 \overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma^2 \omega'(\sigma)}$$

Комплексні потенціали $\Phi_1(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$, $\Phi^*(\zeta) = \Phi^*[\omega(\zeta)]$,
 $\Psi_1(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$, $\Psi^*(\zeta) = \Psi^*[\omega(\zeta)]$ і довільна функція
 $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ зовні кола γ_1 допускають розклади:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta^{-k}; \quad \Phi^*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^* \zeta^{-k}; \quad \Psi_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^{-k}; \\ \Psi^*(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^{-k}; \quad F_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}, \quad \text{причому } B_0 = \frac{G_x^\infty + G_y^\infty}{4}; \\ A_0 &= \frac{G_y^\infty - G_x^\infty + 2iG_{xy}}{2}; \quad B_0^* = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}; \quad A_0^* = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}}{2D(1-\nu)}; \\ B_1 &= B_1^* = A_1 = A_1^* = 0. \end{aligned}$$

Величини e_0, θ_0, θ_n і θ_τ , що описують деформацію стержня, подамо на γ_1 у формі комплексних рядів Фур'є

$$\begin{aligned} e_0 &= d_0 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sigma^k; \quad \theta_0 = \beta_0 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k; \quad \theta_n = f_0 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sigma^k; \\ \theta_\tau &= \delta_0 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sigma^k. \end{aligned}$$

При наявності повної симетрії задачі відносно координатних осей x, y , напрямлених вздовж півосей еліптичного отвору, розклади набувають вигляду

$$e_0 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (\sigma^k + \bar{\sigma}^k); \quad \theta_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\sigma^k - \bar{\sigma}^k); \quad \theta_n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (\sigma^k - \bar{\sigma}^k);$$

$$\theta_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k (\sigma^k + \bar{\sigma}^k),$$

де $d_k, i\beta_k, if_k, \delta_k$ - дійсні величини.

Внесемо розклади /11/-/12/ у граничні умови /3/-/10/ і виконаємо інтегрування. Приймаючи при цьому всі E_j , крім E_n , рівними нулю, одержимо /при $\rho_2 \rightarrow \infty$ / нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу шуканих функцій

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_{kn}^i d_k + \alpha_{kn}^i \delta_k) + \sum_{k=2}^{\infty} (b_{kn}^i \beta_k^* + c_{kn}^i f_k^*) + \sum_{k=2}^{\infty} (p_{kn}^i A_k + f_{kn}^i A_k^* + g_{kn}^i B_k^* + \\ + h_{kn}^i B_k^*) = D_n^i; \quad (i = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \quad (n = (3, 5, 7, \dots)) \\ \beta_k^* = i\beta_k, \quad f_k^* = if_k; \quad A_k, B_k, A_k^*, B_k^* - \text{дійсні числа.} \end{aligned}$$

Коефіцієнти системи /13/ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 a_{kn}^1 &= c_0 n \left[4k_1 + \pi \delta_{kn} m^{\frac{k-n-1}{2}} \right]; \\
 b_{kn}^1 &= -\frac{1}{3} c_0 \delta^2_{kn} L_1; \\
 e_{kn}^1 &= S_1; \quad c_{kn}^1 = a_{kn}^1 = f_{kn}^1 = g_{kn}^1 = h_{kn}^1 = 0; \\
 D_n^1 &= (1_0 + 2m B_0) \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^2 &= 2\mu \left\{ S_1 - m \delta_{k,0} \cdot \delta_{n,1} - \frac{\delta(1-m^2)}{\pi} M_1 \right\}; \\
 b_{kn}^2 &= 2\mu \left[\frac{\delta^2_{kn}}{\pi} k_1 - S_1 \right]; \quad c_{kn}^2 = -\frac{4\mu \delta_{kn}}{\pi} k_1; \\
 d_{kn}^2 &= \frac{4\mu \delta_{kn}}{\pi} (1-m^2) M_1; \quad e_{kn}^2 = \mathcal{H} S_1; \\
 f_{kn}^2 &= g_{kn}^2 = h_{kn}^2 = 0; \quad D_n^2 = [(1-\mathcal{H})m B_0 + A_0] \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^3 &= -2\mu \left[S_3 + \delta_{k,0} \cdot \delta_{n,1} - \frac{\delta}{\pi} (1-m^2) M_3 \right] - 2\mu c_0 n \left[\frac{2}{\pi} k_3 + \frac{\delta_{kn}}{2} k_1 \right]; \\
 b_{kn}^3 &= 2\mu \left[\frac{\delta_{kn}^2}{\pi} k_3 + S_3 \right] + \frac{c_0}{3} \delta^2_{kn} L_3; \\
 c_{kn}^3 &= \frac{4\mu \delta_{kn}}{\pi} k_3; \quad d_{kn}^3 = -\frac{4\mu \delta_{kn}}{\pi} (1-m^2) M_3; \\
 e_{kn}^3 &= f_{kn}^3 = g_{kn}^3 = h_{kn}^3 = 0; \quad D_n^3 = -(1+\mathcal{H}) B_0 \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^4 &= -a_{kn}^3 \text{ при } E^* = 0; \quad b_{kn}^4 = -b_{kn}^3 \text{ при } E^* = 0; \quad c_{kn}^4 = -c_{kn}^3; \\
 d_{kn}^4 &= -d_{kn}^3; \quad e_{kn}^4 = n S_2; \quad f_{kn}^4 = -S_1; \quad g_{kn}^4 = h_{kn}^4 = 0; \\
 D_n^4 &= -[(1-\mathcal{H})B_0 + m A_0] \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^5 &= -3c_1 \delta_1 \delta_2 n \left[\frac{\delta_{kn}}{2} m^{\frac{k-n-1}{2}} + \frac{2}{\pi} k_1 \right]; \quad b_{kn}^5 = c_1 \delta_1 \delta_2 \frac{\delta^2_{kn}}{2\pi} L_1; \\
 d_{kn}^5 &= -c_2 \mu \delta \left[m^{\frac{k-n-1}{2}} - \frac{\delta}{\pi(1-m^2)} N_2 \right] + c_1 \delta^2 \frac{n}{1-m^2} P_1; \\
 c_{kn}^5 &= -c_1 \delta^2 n k \delta \left[m^{\frac{k-n-1}{2}} + \frac{\delta}{\pi(1-m^2)} N_1 \right] - c_2 \frac{n B}{1-m^2} P_2; \\
 e_{kn}^5 &= f_{kn}^5 = h_{kn}^5 = 0; \quad g_{kn}^5 = \mathcal{H}^* S_1; \quad D_n^5 = [A_0^* + (1+\mathcal{H}^*)m B_0^*] \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^6 &= b_{kn}^6 = e_{kn}^6 = f_{kn}^6 = h_{kn}^6 = 0; \quad c_{kn}^6 = \frac{2n}{\pi} k_2 - \frac{n\delta}{2(1-m^4)} P_2; \\
 d_{kn}^6 &= -\frac{2n}{\pi} k_1 - \frac{n\delta k}{2} m^{\frac{k-n-1}{2}}; \quad g_{kn}^6 = S_1; \quad D_n^6 = (2m B_0^* + A_0^*) \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^7 &= 3c_1 \delta_1 \delta_2 n \left[\frac{\delta_{kn}}{2} P_1 + \frac{2}{\pi} k_2 \right]; \quad b_{kn}^7 = -c_1 \delta_1 \delta_2 n k \frac{\delta^2_{kn}}{2\pi} L_3;
 \end{aligned}$$

$$c_{kn}^{\pm} = \frac{2n}{\mathcal{F}} K_4 - \frac{n\delta}{2(1-m^2)} P_4 + C_1 \delta \mathcal{F}^2 n \kappa [R_2 + \frac{\delta}{\mathcal{F}(1-m^2)} N_2] + C_2 \beta \frac{n}{1-m^2} P_4;$$

$$d_{kn}^{\pm} = -\frac{2n}{\mathcal{F}} K_3 - \frac{n\delta\kappa}{2} R_1 + C_2 \beta n \kappa [R_1 - \frac{\delta}{\mathcal{F}(1-m^2)} N_4] - C_1 \mathcal{F}^2 \delta \frac{n}{2(1-m^2)} P_3;$$

$$e_{kn}^{\pm} = f_{kn}^{\pm} = g_{kn}^{\pm} = h_{kn}^{\pm} = 0; \quad D_n^{\pm} = (1 - \mathcal{K}^*) B_0^* \delta_{n,1};$$

$$\alpha_{kn}^{\pm} = \beta_{kn}^{\pm} = e_{kn}^{\pm} = f_{kn}^{\pm} = 0; \quad c_{kn}^{\pm} = -c_{kn}^{\mp} \text{ при } \nu = -1; \quad d_{kn}^{\pm} = -d_{kn}^{\mp} \text{ при } \nu = 1;$$

$$g_{kn}^{\pm} = n S_2; \quad h_{kn}^{\pm} = -S_1; \quad D_n^{\pm} = \left\{ \left[\frac{2(1+\nu)}{1-\nu} + \mathcal{K}^* - 1 \right] B_0^* - m A_0^* \right\} \delta_{n,1}.$$

Тут введені такі позначення:

$$K_1 = J_{k+n+1} + J_{-k+n+1} - m(J_{k+n-1} + J_{-k+n-1});$$

$$K_2 = J_{k+n+1} - J_{-k+n+1} - m(J_{k+n-1} - J_{-k+n-1});$$

$$K_3 = J_{k-n+1} + J_{-k-n+1} - m(J_{k-n-1} + J_{-k-n-1});$$

$$K_4 = J_{k-n+1} - J_{-k-n+1} - m(J_{k-n-1} - J_{-k-n-1});$$

$$L_1 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j (2j+n+1) (J_{k+n+2j+1} + J_{-k+n+2j+1});$$

$$L_2 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j (2j-m+1) (J_{k-n+2j+1} + J_{-k-n+2j+1});$$

$$M_1 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j (J_{k+n+2j+1} + J_{-k+n+2j+1});$$

$$M_2 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j (J_{k-n+2j+1} + J_{-k-n+2j+1});$$

$$N_1 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j [j(1-m^2)+1] (J_{k+n+2j+1} + J_{-k+n+2j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^j (J_{k+n-2j+1} + J_{-k-n-2j+1});$$

$$N_2 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j [j(1-m^2)+1] (J_{k+n+2j+1} - J_{-k+n+2j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^j (J_{k+n-2j+1} - J_{-k-n-2j+1});$$

$$N_3 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j [j(1-m^2)+1] (J_{k-n+2j+1} + J_{-k-n+2j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^j (J_{k-n-2j+1} + J_{-k+n-2j+1});$$

$$N_4 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j [j(1-m^2)+1] (J_{k-n+2j+1} - J_{-k-n+2j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^j (J_{k-n-2j+1} - J_{-k+n-2j+1});$$

$$P_j = m^{\frac{n+k+1}{2}} + m^{\frac{n-k+1}{2(n-k+2)}} + \frac{(k-n-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n-k-1}{2(n-k+2)}};$$

$$P_2 = m^{\frac{n+k-1}{2}} - m^{\frac{n-k-1}{2}} \frac{(n-k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{k-n-1}{2}};$$

$$P_3 = m^{\frac{-n+k-1}{2}} + \frac{(n-k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n-k-1}{2}} + \frac{(n+k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n+k-1}{2}};$$

$$P_4 = m^{\frac{-n+k-1}{2}} + \frac{(n-k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n-k-1}{2}} - \frac{(n+k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n+k-1}{2}};$$

$$R_1 = m^{\frac{n+k-1}{2}} - m^{\frac{n-k-1}{2}}; J_{2\theta}(m) = m^{\theta} \int_0^1 \frac{x^{1/2\theta} dx}{V(1-x^2)(1-m^2 x^2)};$$

$$R_2 = m^{\frac{n+k-1}{2}} + m^{\frac{n-k-1}{2}};$$

$$S_1 = \delta_{k,n-1} - m \delta_{k,n-1}; S_2 = \delta_{k,n-1} + m \delta_{k,n-1}; S_3 = \delta_{k,n-1} - m \delta_{k,n-1}.$$

$$C_0 = \frac{E \tau \delta}{2 \eta}; C_1 = \frac{E}{E} (111) \delta; C_2 = \frac{3 \mu^*}{E} \delta^2 \delta (111)$$

Нормальні напруження в перетині стержня знаходимо за формулою

$$\sigma = E^* \left\{ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos k \theta - \frac{(1-m^2) \sum_{k=0}^{\infty} (\delta \alpha_k - 2 \delta_2 \delta_k) \cos k \theta}{(1+m^2-2m \cos 2\theta)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k (\delta \beta_k^* - 2 \delta_2 \delta_k^*) \cos k \theta}{(1+m^2-2m \cos 2\theta)^{3/2}} \right\}.$$

Зроблені розрахунки при таких даних /пластинка мідна, кільце-стальне/.

$$E^* = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \mu^* = 8,1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; E = 1,15 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \mu = 4,42 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \\ \nu = 0,3; \beta = 0,163; \delta = \frac{b}{h} = 0,1; \gamma = \frac{h}{k} = 3; j_1 = \frac{b}{h} = 2; j_2 = \frac{b}{h}; \delta_2 = \frac{b}{2}.$$

Розглядається два види нагрузки пластинки

$$1) \sigma_x^{\infty} = p; \sigma_y^{\infty} = \tau_{xy}^{\infty} = M_x^{\infty} = M_y^{\infty} = N_{xy}^{\infty} = 0; 2) \sigma_y^{\infty} = p; \sigma_x^{\infty} = \tau_{xy}^{\infty} = M_x^{\infty} = M_y^{\infty} = N_{xy}^{\infty} = 0.$$

Розрахунки велися на ЕОМ "Мінськ-22". Результати обчислень показані на рис. 1, 2.

На рис. 1 зображено залежність кільцевих напружень σ/ρ в пластинці від ексцентриситету підкріплення $\frac{b}{h}$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ /у першому випадку навантаження/ і при $\theta = 0$ /у другому випадку навантаження/. Криві 1, 2, 3 відносяться відповідно до точок верхньої, середньої і нижньої площин пластинки. Крива 4 зображає відповідні

напруження $\frac{\sigma}{p}$ в кільці на лінії спад з пластинкою.

З результатів наведеного числового аналізу видно, що зміщення площини осі підсилюючого кільця від серединної площини пластинки на величину ξ^* суттєво змінює величину напружень порівняно з симетричним підкріпленням ($\xi^*=0$).

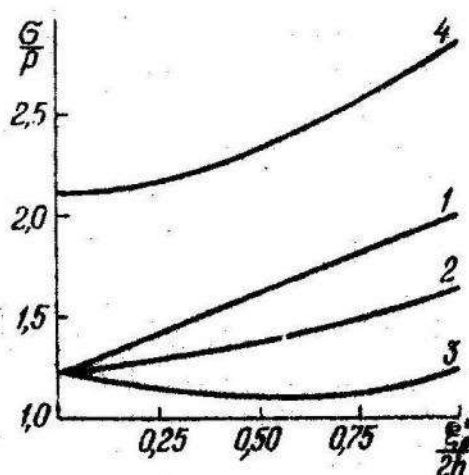


Рис. 1.

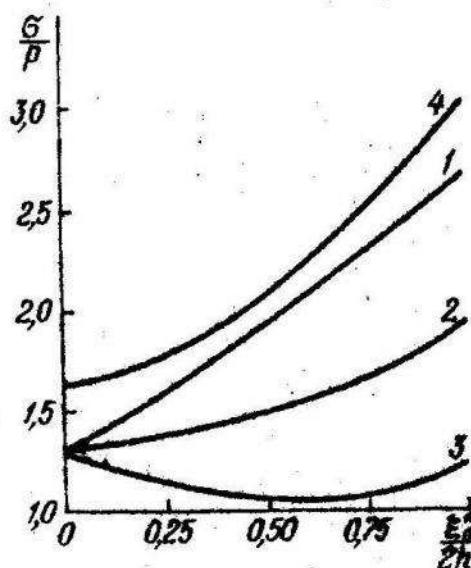


Рис. 2.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В у ш к о В.П., М а р т ы н о в и ч Т.Л. Об одном эффективном методе расчета пластинок с несимметрично подкрепленным краем. - Теория оболочек и пластин. Труды УШ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., "Наука", 1973.

2. М а р т ы н о в и ч Т.Л. К решению задач о напряженном состоянии пластинок с подкрепленным краем. - "Прикладная механика", 1970, т.4, вып. 9.

3. М а р т ы н о в и ч Т.Л., В у ш к о В.П. Об одном подходе к решению задач плоской теории упругости. - "Концентрация напряжений". 1971, вып. 3.