

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВ. ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 11



ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

1976

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМ. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК II

ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

ВИДАВНИЧЕ ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
Львів—1976

УДК 513

У збірнику вміщені статті з теорії функцій, теорії ймовірностей, диференціальних та інтегральних рівнянь, функціонального аналізу, геометрії і теорії пружності. Роботи призначені для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

Редакційна колегія:

Д.В. Гриліцький /відповідальний редактор/, В.Г. Костенко, О.М. Костовський, В.Е. Лянце, Т.Л. Мартинович, Є.М. Парасюк /відповідальний секретар/, В.Ф. Рогаченко, І.Г. Соколов.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.512

В.О.ГУНЕВИЧ

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ПЕЛІ

Нехай $\{\varphi_n\}$ – система майже ортогональних на $[a, b]$ в сенсі Белмана функцій, тобто

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 = A < \infty, \quad / 1 /$$

де

$$a_{ij} = \begin{cases} \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Відома теорема Пелі для ортонормованих систем [2] переноситься з деяким послабленням на системи м.о.з.Б., тобто справедлива наступна теорема.

Т е о р е м а. Нехай $\{\varphi_n\}$ – система м.о.з.Б. на $[a, b]$ функцій, для яких

$$|\varphi_n(t)| \leq M$$

майже всюди.

Якщо $f(t) \in L_p(a, b) \quad 1 < p \leq 2,$

то справедлива нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \leq A_p(a) \int_a^b |f(t)|^p dt, \quad / 2 /$$

де

$$c_k = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt \quad k = 1, 2, \dots$$

При цьому числа $\{C_k\}$ занумеровано так, що вони утворюють неспадну за абсолютною величиною послідовність, число $\alpha < p-2$ і стала $A_p(\alpha)$ не залежать від функції $f(t)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки, як відомо, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$, де $\alpha_n \geq 0$ і $\beta_n \geq 0$, є найбільшою, коли обидві послідовності $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ або рівночасно неспадні, або рівночасно незростаючі, то можна вважати, що числа C_k утворюють монотонно спадну за абсолютною величиною послідовність.

Нехай $1 < p < 2$, застосуємо до суми $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^p k^\alpha$ нерівність Гельдера

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^p k^\alpha \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (|C_k|^p)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k^\alpha)^{q'} \right\}^{\frac{1}{q'}},$$

де $q = \frac{p'}{p}$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^p k^\alpha \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^{p'} \right)^{\frac{p}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\alpha}{2-p}} \right)^{2-p}$$

Коли $\alpha < p-2$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\alpha}{2-p}}$ збіжний і тому, позначаючи $B = \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\alpha}{2-p}} \right]^{2-p}$, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^p k^\alpha \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^{p'} \right)^{\frac{p}{p'}} \cdot B.$$

/3/

Беручи до уваги /1/ і застосовуючи до виразу в правій частині нерівності /3/ теорему Фішера-Рісса для м.о.з.Б. систем [1], одержуємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^p k^\alpha &\leq B \cdot M^{2-p} (1 + \sqrt{A})^{p-1} \int_a^b |f(t)|^p dt = \\ &= A_p(\alpha) \int_a^b |f(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Таким чином, твердження теореми для $1 < p < 2$ доведено.

Що стосується граничного випадку $p=2$, то він тривіальний і відразу випливає з теореми Фішера-Рісса для м.о.з.Б. систем, якщо взяти до уваги, що для $p=2$, $p'=2$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 k^{\lambda} < \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \text{ оскільки } \lambda < 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Г у к е в и ч В.И., С о к о л о в И.Г. Обобщение одной теоремы Фисера-Рисса. - "Теория функций, функциональный анализ и их приложение", X.1968, вып. 7.
2. К а ч м а ж С., Ш т е й н г а у з Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.

УДК 517.946

І.М.КОЛОДІЙ

ТЕОРЕМА ПРО УСУВНУ ОСОБЛИВІСТЬ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

У цій роботі розглядаються еліптичні рівняння з виродженням виду

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A(x, u, u_x) &= B(x, u, u_x), \\ x &= (x_1, \dots, x_n), \quad u_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \\ A(x, u, u_x) &= (A_1(x, u, u_x), \dots, A_n(x, u, u_x)), \end{aligned} \quad //$$

в обмеженій області Ω n -мірного евклідового простору E^n . Доведено теорему про усуну особливості узагальнених розв'язків. Результат нашої роботи анонсовано в [1].

Нехай K_z - куб $(x: |x_i| < z, i=1, \dots, n)$; $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$, $\lambda_i(x)$ - невід'ємні функції в Ω ; $W'_\beta(\bar{\lambda}, \Omega)$,

$W'_\beta(\bar{\lambda}, \Omega)$ - повні нормовані простори /означення див. у [2] /.

Припустимо, що функції $A(x, u, \bar{p})$, $B(x, u, \bar{p})$, де $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$ задовольняють умови

$$A(x, u, \bar{p}) \bar{p} \geq a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |p_i|^\beta - d(x) |u|^\beta - g(x),$$

$$|A_i(x, u, \bar{p})| \leq a_2 \lambda_i(x) |p_i|^{\beta-1} + b(x) |u|^{\beta-1} + e(x), \quad /2/$$

$$|B(x, u, \bar{p})| \leq \sum_{i=1}^n c_i(x) |p_i|^{\beta-1} + \omega(x) |u|^{\beta-1} + f(x),$$

де a_1, a_2 - додатні константи; $\lambda_i(x), d(x), g(x), b(x), e(x)$

, $c_i(x), \omega(x), f(x)$ - невід'ємні функції; $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(\Omega)$,

$t_i \geq 1$; $\lambda_i(x), d(x), g(x), b^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x) \lambda_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x), e^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x) \lambda_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x), c_i^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x) \lambda_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x), \omega(x), f(x)$ належать $L_s(\Omega), s \geq 1$, причому числа β, t_i, s задовольняють нерівності

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} < \frac{\beta}{n}, \quad 1 < \beta < n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}, \quad 1 \leq t_i (\beta - 1).$$

Позначимо через $\mathcal{D}_\varepsilon$ множину точок таких, що їх відстань до компактної множини $\mathcal{D}$ менша ε , $\varepsilon > 0$.

О з н а ч е н н я . Функція $u(x) \in W'_\beta(\bar{\lambda}, K_{2z} \setminus \mathcal{D})$ називається узагальненим розв'язком рівняння /1/ в $K_{2z} \setminus \mathcal{D}$ за умов /2/, якщо для довільної функції $\psi(x) \in W'_\beta(\bar{\lambda}, K_{2z})$, що дорівнює нулю в деякому околі компактної множини $\mathcal{D}$, справедлива інтегральна то-
точність

$$\int_{K_{2z}} (A \psi_x + B \psi) dx = 0.$$

Т е о р е м а . Нехай $\mathcal{D}$ - компактна множина $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ -ємності нуль; $1 < \beta \leq \Delta^* \leq \Delta = n (1 + \max_i T_i^{-1})$, де T_i - верхня ме-
жа чисел t_i таких, що $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(K_{2z})$. Якщо $u(x)$ - узагаль-
нення розв'язок в сенсі нашого означення в $K_{2z} \setminus \mathcal{D}$ і для деякого $\delta > 0$

$$u(x) \in L_{\mu(1+\delta)}(K_{2z} \setminus \mathcal{D}), \quad \mu = (\beta-1) \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta}{\Delta^*}\right)^{-1},$$

то $u(x)$ - узагальнений розв'язок рівняння /1/ в кубі K_2 в сенсі роботи [2] .

З а у в а ж е н н я . Обмеження на числа α^* і β пов'язано з двома обставинами: 1/ при $\alpha^* > \Delta$ не існує компактної множини $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ - ємності нуль; 2/ можна навести приклад, який показує, що при β більших від відповідного Δ особливість неусувна навіть у класі обмежених функцій.

П р и к л а д . Розглянемо рівняння

$$\operatorname{div}(\rho^\varepsilon u_x / |u_x|^{\beta-2}) = 0, \quad \rho = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

в кубі $K_{2\varepsilon}$. У цьому випадку $\lambda_1(x) = \dots = \lambda_n(x) = \rho^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(K_{2\varepsilon})$ при $t_i < \frac{n}{\varepsilon}$, $T_1 = \dots = T_n = \frac{n}{\varepsilon}$, $\Delta = n + \varepsilon$. Функція $u(x) = \rho^{\frac{\beta-n-\varepsilon}{\beta-1}}$ при $\beta > \Delta = n + \varepsilon$ є обмеженим розв'язком нашого рівняння в $K_{2\varepsilon} \setminus 0$. Покажемо, що розв'язок у точці нуль має неусувну особливість, тобто як би ми не доозначили $u(x)$ у точці нуль,

$$\int_{K_2} \rho^\varepsilon u_x / |u_x|^{\beta-2} dx \neq 0$$

для деякої функції $\varphi(x) \in \dot{W}_\beta^1(\bar{\lambda}, K_2)$. Справді, для $\varphi(x) \in C^\infty(K_2)$, $\varphi(0) \neq 0$, $K_2 = \{x: |x| < 2\}$

$$\int_{K_2} \rho^\varepsilon u_x / |u_x|^{\beta-2} dx = \int_{K_2} \rho^\varepsilon \varphi_x / |\varphi_x|^{\beta-2} dx = \left(\frac{\beta-n-\varepsilon}{\beta-1}\right)^{\beta-1} \omega_n \varphi(0) \neq 0$$

де ω_n - поверхня одиничної сфери.

Д о в е д е н н я т е о р е м и . Нехай $\eta(x)$ і $\bar{\eta}(x)$ - невід'ємні функції, що задовольняють умову Ліпшица в $K_{2\varepsilon}$; $\eta(x)$ - фінітна в $K_{2\varepsilon}$, $\bar{\eta}(x)$ - обертається в нуль в деякому околі компактної множини D . Прийемо $q_0 = \frac{\beta-1}{\beta}(1+\delta)$, де $\delta > 0$ як завгодно мале число; $\bar{u} = |u| + \bar{\eta} + 1$, де $\bar{\eta} = \bar{\eta}(2\varepsilon)$ те саме, що і в роботі [2] .

Для $q \gg q_0$ і $\ell \gg \bar{\eta}$ визначимо функції

$$v = F(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^q \\ q_0^{-1} [q \ell^{q-q_0} \bar{u}^{q_0} + (q_0 - q) \ell^q], & \text{якщо } x \leq \bar{u} \leq \ell \\ & , \text{коли } \ell \leq \bar{u} \end{cases}$$

$$G(u) = [F(\bar{u})(F'(\bar{u}))^{\beta-1} + q^{\beta-1} x^{\beta q - \beta + 1}] \operatorname{sign} u, \quad -\infty < u < +\infty.$$

Ці функції задовольняють нерівності:

$$F(\bar{u}) \leq \frac{q}{q_0} \ell^{q-q_0} \bar{u}^{q_0}; \quad \bar{u} F'(\bar{u}) \leq q F(\bar{u}); \quad |G(u)| \leq F(\bar{u})(F'(\bar{u}))^{\beta-1};$$

$$\beta \frac{\sigma}{1+\sigma} (F'(\bar{u}))^\beta \leq G'(u) \leq \beta (F'(\bar{u}))^\beta; \quad G'(u) = \begin{cases} = \frac{\beta q - \beta + 1}{q} (F'(\bar{u}))^\beta, & u < \ell - x \\ \geq \frac{\beta q_0 - \beta + 1}{q} (F'(\bar{u}))^\beta, & u > \ell - x \end{cases}$$

Приймемо, що $Y(x) = (\eta(x) \bar{\eta}(x))^\beta G(u)$. Тоді майже всюди в K_{22}

$$\begin{aligned} Y_x A + Y B &= (\eta \bar{\eta})^\beta G'(u) A u_x + \beta (\eta \bar{\eta})^{\beta-1} G(u) A (\eta \bar{\eta})_x + (\eta \bar{\eta})^\beta G(u) B > \\ &\geq (\eta \bar{\eta})^\beta G'(u) (a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |u_{x_i}|^\beta - \bar{d}(x) \bar{u}^\beta) - \beta (\eta \bar{\eta})^{\beta-1} |G(u)| \sum_{i=1}^n (\eta \bar{\eta})_{x_i} \times \\ &\times (a_2 \lambda_i(x) |u_{x_i}|^{\beta-1} + \bar{b}(x) \bar{u}^{\beta-1}) - (\eta \bar{\eta})^\beta |G(u)| \left(\sum_{i=1}^n C_i(x) |u_{x_i}|^\beta + \bar{\omega}(x) \bar{u}^{\beta-1} \right) > \\ &\geq \frac{\beta \sigma}{1+\sigma} a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) (F'(u))^\beta |\bar{u}_{x_i}|^\beta - a_2 \beta \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\bar{u}_{x_i}|^{\beta-1} (\eta \bar{\eta})^{\beta-1} \times \\ &\times |(\eta \bar{\eta})_{x_i}| |F'(\bar{u})|^{\beta-1} F(\bar{u}) - |(\eta \bar{\eta}) F'(\bar{u})| \sum_{i=1}^n C_i(x) |(\eta \bar{\eta}) F'(\bar{u}) \bar{u}_{x_i}|^{\beta-1} - \\ &- \beta |(\eta \bar{\eta}) F'(\bar{u}) \bar{u}|^\beta \bar{d}(x) - \sum_{i=1}^n |(\eta \bar{\eta})_{x_i} F(\bar{u})| |(\eta \bar{\eta}) F'(\bar{u}) \bar{u}|^{\beta-1} \bar{b}(x) - \\ &- |(\eta \bar{\eta})^\beta F(\bar{u})| |(\eta \bar{\eta}) F'(\bar{u}) \bar{u}|^{\beta-1} \bar{\omega}(x) \geq \beta a_1 \frac{\sigma}{1+\sigma} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \times \\ &\times |(\eta \bar{\eta}) v_{x_i}|^\beta - a_2 \beta \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |(\eta \bar{\eta}) v_{x_i}|^{\beta-1} |(\eta \bar{\eta})_{x_i} v| - \\ &- \beta q^\beta \bar{d}(x) |(\eta \bar{\eta}) v|^\beta - \sum_{i=1}^n C_i(x) |(\eta \bar{\eta}) v_{x_i}|^{\beta-1} |(\eta \bar{\eta}) v| - \\ &- q^{\beta-1} |(\eta \bar{\eta}) v|^\beta \bar{\omega}(x) - q^{\beta-1} \sum_{i=1}^n |(\eta \bar{\eta})_{x_i} v| |(\eta \bar{\eta}) v|^{\beta-1} \bar{b}(x). \end{aligned}$$

означення $\bar{b}(x)$, $\bar{d}(x)$, $\bar{\omega}(x)$ див. в [2]./. Звідси, як і в роботі [2], одержуємо

$$\int_{K_{22}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\eta \bar{\eta}| v_{x_i}|^\beta dx \leq C \left[\int_{K_{22}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |(\eta \bar{\eta})_{x_i}| v|^\beta dx + \int_{K_{22}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\eta_{x_i} \bar{\eta}| v|^\beta dx + \right. \\ \left. + q^\beta \int_{K_{22}} |(\eta \bar{\eta}) v|^\beta \left(\sum_{i=1}^n C_i(x) \lambda_i^{1-\beta}(x) + \sum_{i=1}^n \bar{b}^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x) \lambda_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x) + \bar{d}(x) + \bar{\omega}(x) \right) dx \right] \quad /3/$$

Зауважимо, що $v \leq \frac{q}{q_0} \ell^{q-q_0} \bar{u}^{q_0} \leq C(q, \ell) \bar{u}^{q_0}$. Тому при будь-яких фіксованих q і ℓ

$$\int_{K_{22}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) (\eta/\eta_{x_i}|v|)^\beta dx \leq C(q, \ell) \int_{K_{22}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\bar{\eta}_{x_i}|^\beta \bar{u}^{\beta q_0} dx. \quad /4/$$

Враховуючи припущення нашої теореми та нерівність Гельдера, маємо

$$\int_{K_{22} \setminus D} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\bar{\eta}_{x_i}|^\beta \bar{u}^{\beta q_0} dx \leq \sum_{i=1}^n \left(\int_{K_{22}} \lambda_i(x) |\bar{\eta}_{x_i}|^{d^*} dx \right)^{\frac{\beta}{d^*}} \left(\int_{K_{22} \setminus D} \lambda_i(x) \times \right. \\ \times \bar{u}^{\frac{d^* \beta q_0}{d^* - \beta}} dx \Big)^{\frac{d^* - \beta}{d^*}} \leq \sum_{i=1}^n \left(\int_{K_{22}} \lambda_i(x) |\bar{\eta}_{x_i}|^{d^*} dx \right)^{\frac{\beta}{d^*}} \left(\int_{K_{22}} \lambda_i(x) dx \right)^{\frac{1}{d^*} \frac{d^* - \beta}{d^*}} \times \\ \times \left(\int_{K_{22} \setminus D} \bar{u}^{\frac{d^* \beta q_0}{d^* - \beta} \frac{S}{S-1}} dx \right)^{\frac{S-1}{S} \frac{d^* - \beta}{d^*}} \leq C \left(\int_{K_{22}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\bar{\eta}_{x_i}|^{d^*} dx \right)^{\frac{\beta}{d^*}} \quad /5/$$

Замінімо в /3/-/5/ $\bar{\eta}$ на $\bar{\eta}^{(V)}$, де $\bar{\eta}^{(V)}$ - функції із леми роботи [3], і спрямуємо V до ∞ . Тоді з /3/-/5/ і леми роботи [3] випливає /при кожному фіксованому q і ℓ / нерівність

$$\int_{K_{22} \setminus D} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\eta v_{x_i}|^\beta dx \leq C q^\beta \left[\int_{K_{22} \setminus D} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\eta_{x_i}| v|^\beta dx + \int_{K_{22} \setminus D} |\eta v|^\beta \times \right. \\ \times \left. \left(\sum_{i=1}^n C_i(x) \lambda_i^{1-\beta}(x) + \sum_{i=1}^n \bar{b}^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x) \lambda_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x) + \bar{d}(x) + \bar{\omega}(x) \right) dx \right]. \quad /6/$$

З огляду на наслідок роботи з [3] міра $\mathcal{D}$ дорівнює нулю. Із нерівності /6/ так само як у роботі [2] одержуємо

$$(z^{-n} \int_{K_p \setminus \mathcal{D}} \bar{u}^{\beta m p} dx)^{\frac{1}{m p}} \leq [C (\frac{p}{s'})^{\beta} (\frac{z}{\sigma})^{\beta} (1 + P_{(22)} M_{(22)})]^{\frac{s'}{p}} (z^{-n} \int_{K_{p+m} \setminus \mathcal{D}} \bar{u}^{\beta p} dx)^{\frac{1}{p}},$$

де $2 < p - s + \sigma \leq 2z$, $m = \frac{k}{s'} > 1$, $k \leq n (n - \beta + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i})^{-1}$, $p = s' q$,

$$s' = \frac{s}{s-1}, \quad q \geq q_0.$$

Прийmemo $p = s' q_0 m^v$, $v = 0, 1, 2, \dots$, $p_v = p + \sigma = (1 + 2^{-v})z$, $p = p_{v+1}$ і проітеруємо цю нерівність. Тоді, враховуючи умови теореми, маємо

$$\begin{aligned} \forall q_0 \max_{K_2 \setminus \mathcal{D}} \bar{u} &\leq C (1 + M_{(22)} P_{(22)})^{\frac{1}{q_0} \frac{m}{m-1} \frac{1}{\beta}} (z^{-n} \int_{K_{2z} \setminus \mathcal{D}} \bar{u}^{s' p q_0} dx)^{\frac{1}{s' p q_0}} = \\ &= C (z^{-n} \int_{K_{2z} \setminus \mathcal{D}} \bar{u}^{\frac{\beta-1}{1-s'}(1+\sigma)} dx)^{\frac{1-s'}{\beta-1} \frac{1}{1+\sigma}} \leq C (z^{-n} \int_{K_{2z} \setminus \mathcal{D}} \bar{u}^{\frac{(\beta-1)(1+\sigma)}{(1-s')(1-\frac{\beta}{2})}} dx)^{\frac{(1-s')(1-\frac{\beta}{2})}{(\beta-1)(1+\sigma)}} / 7/ \end{aligned}$$

Отже, $\forall q_0 \max_{K_{2z} \setminus \mathcal{D}} \bar{u} \leq C$, тобто функції $u(x)$ і $\bar{u}(x)$ рівномірно обмежені в $K_2 \setminus \mathcal{D}$.

Із нерівностей /6/, /7/ при $q = q_0$ записуємо

$$\int_{K_2 \setminus \mathcal{D}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \bar{u}^{\beta(q_0-1)} |\bar{u}_{x_i}|^{\beta} dx \leq C (\int_{K_{2z}} \bar{u}^{\beta q_0 s'} dx)^{\frac{1}{s'}}.$$

Через те що функція $\bar{u}(x)$ обмежена в $K_2 \setminus \mathcal{D}$ і $q_0 < 1$, то $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\bar{u}_{x_i}|^{\beta} \in L_1(K_2 \setminus \mathcal{D})$, тобто функції $\bar{u}(x)$ і $u(x)$ належать $W_{\beta}'(\bar{\lambda}, K_2 \setminus \mathcal{D})$. І через те що міра $\mathcal{D}$ дорівнює нулю, то $u(x) \in W_{\beta}'(\bar{\lambda}, K_2)$.

Підставимо в інтегральну тотожність функцію $\varphi(x) = \eta \bar{\eta}^{(v)}$, де $\eta \in W_{\beta}'(\bar{\lambda}, K_2)$, а $\bar{\eta}^{(v)}$ - функція із леми роботи [3].

Тоді

$$\int_{K_2} [(\eta \bar{\eta}^{(v)})_{x_i} A + (\eta \bar{\eta}^{(v)}) B] dx = 0.$$

Спрямувавши V до ∞ , одержимо $\int_{K_2} (\eta_x A + q B) dx = 0$ для довільної функції $\eta(x) \in \tilde{W}_2^1(\bar{\Lambda}, K_2)$, тобто $U(x)$ - узагальнений розв'язок в K_2 .

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. К о л о д и й І.М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1971, т.197, № 2.

2. К о л о д и й І.М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9.

3. К о л о д и й І.М. Про ємність множин. У цьому ж віснику.

УДК 517.946

І.М.КОЛОДІЙ

ПРО ЄМНІСТЬ МНОЖИН

У цій роботі введено поняття $(\mathcal{L}^*, \bar{\lambda})$ - ємності множини, що узагальнює поняття $\mathcal{L}$ - ємності множини, сформульоване в роботі

[4]. Це поняття використовується при доведенні теорем про усунув особливість, аналогічних відповідним теоремам для гармонічних функцій. Результат статті анонсовано в [1].

Нехай Ω - обмежена область в n - мірному евклідовому просторі E^n , $x = (x_1, \dots, x_n)$; $K_2 = \{x: |x_i| < 2, i=1, \dots, n\}$ - куб.

О з н а ч е н н я 1. Нехай $\mathcal{D}$ компактна множина в Ω . Тоді

$(\mathcal{L}^*, \bar{\lambda})$ ємність множини $\mathcal{D}$ називається число

$$\inf \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\psi_{x_i}|^{d^*} dx, \quad 1 \leq d^* < +\infty, \quad \lambda_i(x) \geq 0, \lambda_i \in L_1,$$

де $\inf$ береться по всіх неперервно-диференційованих, фінітних в Ω функціях, які не менші одиниці на $\mathcal{D}$.

Означення 2. /див. [4] /. Нехай Q обмежена множина в E^n . Тоді α - ємність множини Q називається числом

$$\inf_{E^n} \int |\Phi_x|^\alpha dx, \quad 1 \leq \alpha < +\infty,$$

де $\inf$ береться по всіх неперервно-диференційованих функціях, які не менші одиниці на Q і фінітні в E^n при $\alpha < n$ або фінітні в деякому фіксованому кубі $K_{R_0} \supset Q$ при $\alpha \geq n$.

Зауваження 1. Якщо Q - компактна множина в Ω і α - ємність Q дорівнює нулю, то в означенні 2 можна обмежитись неперервно-диференційованими функціями, фінітними в Ω .

Щоб довести це твердження, достатньо показати, що існує послідовність неперервно-диференційованих функцій $\tilde{\Phi}_\nu(x)$, фінітних в Ω , така, що $\int_\Omega |\tilde{\Phi}_\nu|^\alpha dx \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. Якщо α - ємність Q дорівнює нулю, то існує послідовність неперервно-диференційованих функцій $\Phi_\nu x$, фінітних в E^n , така, що $\int_{E^n} |\Phi_\nu x|^\alpha dx \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. Нехай $\eta = \eta(x)$ - гладка, фінітна в Ω , функція; побудуємо функцію $\tilde{\Phi}_\nu = \eta \Phi_\nu$. Тоді,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\tilde{\Phi}_\nu|^\alpha dx &= \int_\Omega |(\eta \Phi_\nu)_x|^\alpha dx \leq C(\alpha, n) \left[\int_\Omega \eta^\alpha |\Phi_\nu x|^\alpha dx + \int_\Omega |\eta_x|^\alpha |\Phi_\nu|^\alpha dx \right] \leq \\ &\leq C(\alpha, n) \left[\int_{E^n} |\Phi_\nu x|^\alpha dx + \int_{E^n} |\eta_x|^\alpha |\Phi_\nu|^\alpha dx \right] \equiv C(\alpha, n) (\mathcal{I}_{1,\nu} + \mathcal{I}_{2,\nu}). \end{aligned}$$

За умовою $\mathcal{I}_{1,\nu} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$; оцінимо $\mathcal{I}_{2,\nu}$ при $\alpha < n$, використовуючи нерівність Гельдера і теорему С.Л.Соболева [3]

$$\mathcal{I}_{2,\nu} \leq C(\alpha, n, \Omega) \left(\int_{E^n} |\Phi_\nu|^\alpha dx \right)^{\frac{n-\alpha}{n}} \leq C(\alpha, n, \Omega) \int_{E^n} |\Phi_\nu x|^\alpha dx,$$

причому зауважимо, що $C(\alpha, n, \Omega)$ не залежить від носіїв функції Φ_ν , тобто не залежить від ν і тому $\mathcal{I}_{2,\nu} \rightarrow 0$ при $\alpha < n$.

Якщо ж $\alpha = n$, то $C(\alpha, n, \Omega)$ в останній нерівності залежить і від міри носіїв функції Φ_ν , які містяться в фіксованому кубі $K_{R_0} \supset \Omega \supset Q$. Тому $\mathcal{I}_{2,\nu} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ і в випадку $\alpha = n$.

Якщо розглядаємо множини α -ємності нуль, то тим самим накладаємо обмеження $\alpha \leq n$, тому що при $\alpha > n$ будь-яка обмежена множина має ненульову α -ємність /справді, будь-яка обмежена множина містить точку і тому α -ємність цієї множини не менша α -ємності точки, а α -ємність точки при $\alpha > n$ не дорівнює нулю; див. [4] /.

Отже, ми довели, що існує послідовність функцій $\tilde{\Phi}_\nu(x)$, фінітних в Ω , на яких досягається $\inf$, тобто для множин нульової α -ємності достатньо розглядати функції $\Phi(x)$, фінітні лише в Ω . Якщо ж α -ємність дорівнює нулю по функціях, фінітних в Ω , то вона, очевидно, дорівнює нулю і по функціях, фінітних в E^n . Таким чином для множин нульової α -ємності $\inf$ на гладких функціях, фінітних в E^n , дорівнює $\inf$ по функціях, фінітних в Ω . Тому, оперуючи множиною α -ємності нуль, вважатимемо, що функції $\Phi(x)$ в означенні 2 фінітні в Ω .

З а у в а ж е н н я 2. Якщо α -ємність компактної множини Q дорівнює нулю і $\alpha^* = \frac{\alpha}{s}(s-1)$, $\lambda_i(x) \in L_s$, $s > 1$, то $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ -ємність Q дорівнює нулю.

Справедливість цього твердження випливає з зауваження 1 і оцінки

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\Psi_{x_i}|^{\alpha^*} dx \leq C \left(\int_{\Omega} |\Psi_x|^{\alpha} dx \right)^{\frac{\alpha^*}{\alpha}}.$$

З а у в а ж е н н я 3. Якщо $\alpha^* > n(1 + \max T_i^{-1})$, де T_i - верхня межа чисел t_i таких, що $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(\Omega)$, то $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ -ємність компактної множини Q не дорівнює нулю.

Справді, коли $\alpha^* > n(1 + \max T_i^{-1})$, то існує таке $\alpha > n$, що $\alpha^* > \alpha(1 + \max T_i^{-1})$, або $(\alpha^* - \alpha)\alpha^{-1} > \max T_i^{-1}$. Тобто

$\frac{d^*-d}{d} > \frac{1}{T_i}$. Отже, існує таке число t_i , що $\frac{d^*-d}{d} > \frac{1}{t_i}$,
або $\frac{d}{d^*-d} < T_i$. Тоді, використавши нерівність Гельдера маємо

$$\int_{\Omega} |\Psi_x|^d dx \leq C \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \lambda_i(x) |\Psi_{x_i}|^{d^*} dx \right)^{\frac{d}{d^*}} \left(\int_{\Omega} (\lambda_i^{-1}(x))^{\frac{d}{d^*-d}} dx \right)^{\frac{d^*-d}{d}} \leq \\ \leq C \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \lambda_i(x) |\Psi_{x_i}|^{d^*} dx \right)^{\frac{d}{d^*}}.$$

Таким чином,

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\Psi_{x_i}|^{d^*} dx \geq C \left(\inf_{\Omega} \int_{\Omega} |\Psi_x|^d dx \right)^{\frac{d}{d^*}}.$$

Звідси випливає наше твердження.

Отже, можна зробити такий висновок, коли говоримо, що $(d^*, \bar{\lambda})$ -ємність компактної множини дорівнює нулю, то тим самим накладемо обмеження $d^* \leq n(1 + \max_i T_i^{-1})$.

Позначимо через $U(\mathcal{D})$ множину функцій $\bar{\eta}(x)$, $0 \leq \bar{\eta}(x) \leq 1$ що задовольняють умову Ліпшица і перетворюються в нуль в околі множини $\mathcal{D}$.

Л е м а 1. Нехай $\mathcal{D} \subset \Omega$ компактна множина $(d^*, \bar{\lambda})$ -ємності нуль, $1 \leq d^* \leq n(1 + \max_i T_i^{-1})$. Тоді існує послідовність функцій $\bar{\eta}^{(v)}(x) \in U(\mathcal{D})$ така, що $\bar{\eta}^{(v)}(x) \rightarrow 1$ майже всюди і $\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\bar{\eta}^{(v)}(x)|^{d^*} dx \rightarrow 0$, де $\lambda_i(x) \in L_S$, $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}$, причому числа S та t_i задовольняють умови роботи [2].

Д о в е д е н н я . За означенням існує послідовність $\Psi^{(v)}(x)$ неперервно-диференційованих, фінітних в Ω функцій, які не менше від одиниці в $\mathcal{D}$, а

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\Psi_{x_i}^{(v)}|^{d^*} dx \leq \frac{1}{v}.$$

Функції $2\Psi^{(v)}(x) > 1$ в деякому околі $\mathcal{D}$. Розглянемо функцію

$$\Psi^{(v)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } \Psi^{(v)} < 0, \\ 2\Psi^{(v)}, & \text{коли } 0 < 2\Psi^{(v)} < 1, \\ 1, & \text{коли } 2\Psi^{(v)} > 1. \end{cases}$$

Очевидно, що $\bar{\psi}^{(v)}(x)$ яка задовольняє умову Ліпшица, дорівнює одиниці в околі $\mathcal{D}$ і задовольняє нерівність

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\bar{\psi}_{x_i}^{(v)}|^{\alpha^*} dx \leq C \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\psi_{x_i}^{(v)}|^{\alpha^*} dx \leq \frac{C}{v}.$$

Функція $\bar{\psi}^{(v)}(x)$ фінітна в Ω і тому за лемою роботи [4]

$$\left(\int_{\Omega} |\bar{\psi}^{(v)}(x)|^{k\alpha^*} dx \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{C}{v}, \quad k > 1.$$

З останньої нерівності випливає, що існує підпослідовність, ми знову позначимо її $\bar{\psi}^{(v)}(x)$, така що $\bar{\psi}^{(v)}(x) \rightarrow 0$ майже всюди. Тому функція $\bar{\eta}^{(v)}(x) = 1 - \bar{\psi}^{(v)}(x)$ задовольняє умови леми 1.

Н а с л і д о к . Якщо $\mathcal{D}$ компактна множина $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ -ємності нуль $1 \leq \alpha^* \leq n(1 + \max_i T_i^{-1})$, то міра $\mathcal{D}$ дорівнює нулю.

Дійсно функції $\bar{\psi}^{(v)}(x) = 1$ на $\mathcal{D}$ для кожного v . З другого боку $\bar{\psi}^{(v)} \rightarrow 0$ майже всюди. Отже, міра $\mathcal{D}$ дорівнює нулю.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. К о л о д и й І.М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1971, т.197.
2. К о л о д и й І.М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип.9.
3. С о б о л е в С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во Ленинградского ун-та, 1950.
4. J. Serrin. *Local behavior of solutions of quasilinear equations - Acta Math*, 1964, 111, p 3-4.

Г.П.БОЙКО

УЗАГАЛЬНЕНА ОСНОВНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ
РІВНЯННЯ $\Delta^3 u = 0$

Нехай $\mathcal{D}$ - обмежена область в R^3 з границею S класу C^∞ ;
 $\nu(y)$ - одиничний вектор внутрішньої нормалі до S у точці y .
 у [3] побудовано потенціали U_1 , U_2 , U_3 , за допомогою
 яких крайова задача

$$\begin{aligned} \Delta^3 u(x) &= 0, \quad x \in \mathcal{D}, \\ u|_S &= f_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_S &= f_2, \\ \Delta u|_S &= f_3, \end{aligned} \quad /1/$$

де f_1, f_2, f_3 - досить гладкі функції на S , зводиться до
 системи інтегро-диференціальних рівнянь, еквівалентної системі
 інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Ці потенціали мають
 вигляд

$$\begin{aligned} U_1(x, \mu_1) &= \frac{1}{\pi} \int_S \left\{ \mu_1(y) \Psi_{11}(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 \mu_1(y) \Psi_{12}(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 \mu_1(y) \Psi_{13}(x, y) \right\} dS_y, \\ U_2(x, \mu_2) &= \frac{1}{\pi} \int_S \left\{ \mu_2(y) \Psi_{21}(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 \mu_2(y) \Psi_{22}(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 \mu_2(y) \Psi_{23}(x, y) \right\} dS_y, \\ U_3(x, \mu_3) &= \frac{1}{\pi} \int_S \mu_3(y) \Psi_{31}(x, y) dS_y, \end{aligned}$$

де β_1, β_2 - головні напрями поверхні S в точці y , ядра
 $\Psi_{11}(x, y)$, $\Psi_{12}(x, y), \dots, \Psi_{31}(x, y)$ виражаються лінійно через
 фундаментальні розв'язки рівняння /1/ та похідні від них.

Тут ми розглядаємо, використовуючи побудовані в [3] ядра по-
 тенціалів U_1 , U_2 , U_3 , узагальнену / в сенсі [1] / основну
 крайову задачу для рівняння /1/.

Позначимо через S_ε паралельну до S поверхню, розміщену на відстані ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, по напрямку нормалі $\nu(y)$ від поверхні S /припускаємо існування такого додатного числа ε_0 , що для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ поверхні S_ε не мають точок самоперетину/. Нехай $\mathcal{D}(S)$ - простір нескінченно диференційованих на S /основних/ функцій, $\mathcal{D}'(S)$ - простір лінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{D}(S)$ /простір узагальнених функцій/. Під $\langle \varphi, F \rangle$ розуміємо дію узагальненої функції F на основну φ . Якщо $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix}$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, то $\langle \varphi, F \rangle = \sum_{i=1}^k \langle \varphi_i, F_i \rangle$ [2].

Далі простір основних вектор-функцій розмірності k позначаємо через $[\mathcal{D}(S)]^k$, простір узагальнених вектор-функцій розмірності k - через $[\mathcal{D}'(S)]^k$. Функції $\varphi \in [\mathcal{D}(S)]^k$ продовжимо до функцій із $[\mathcal{D}(S_\varepsilon)]^k$ таким чином: $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y)$, якщо $x_\varepsilon = y + \varepsilon \nu(y)$.

Постановка задачі. Нехай $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{D}'(S)$. В області $\mathcal{D}$ знайти розв'язок рівняння /1/, що задовольняє умови

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = \langle \varphi, F_1 \rangle, \quad /2/$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial \nu x_\varepsilon} dS_\varepsilon = \langle \varphi, F_2 \rangle, \quad /3/$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \Delta u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = \langle \varphi, F_3 \rangle \quad - /4/$$

для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(S)$.

Нехай

$$\Psi(x,y) \begin{pmatrix} \Psi_{11}(x,y) & \Psi_{12}(x,y) & \Psi_{13}(x,y) & \Psi_{21}(x,y) & \Psi_{22}(x,y) & \Psi_{23}(x,y) & \Psi_{31}(x,y) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_{1x}}\right)^2 \Psi_{11}(x,y) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial s_{1x}}\right)^2 \Psi_{31}(x,y) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_{2x}}\right)^2 \Psi_{11}(x,y) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial s_{2x}}\right)^2 \Psi_{31}(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{11}(x,y) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{31}(x,y) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_{1x}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{11}(x,y) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial s_{1x}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{31}(x,y) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_{2x}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{11}(x,y) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial s_{2x}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{31}(x,y) \\ \Delta_x \Psi_{11}(x,y) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta_x \Psi_{31}(x,y) \end{pmatrix},$$

$$C(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \lambda_1(y) & \lambda_2(y) & \lambda_3(y) & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)^2 F_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_2}\right)^2 F_1 \\ F_2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)^2 F_2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_2}\right)^2 F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{31} \end{pmatrix},$$

$\lambda_1(y), \lambda_2(y), \lambda_3(y)$ визначені в [3]. Тут під $\left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^2 F_j$ розуміємо узагальнену функцію, визначену формулою

$\langle g, \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^2 F_j \rangle = \langle \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^{2*} g, F_j \rangle, \quad i, j = 1, 2$
 для кожної $g \in \mathcal{D}(S)$, де $\left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^{2*}$ / $i = 1, 2$ - спряжений оператор до оператора $\left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^2$, тобто такий, що

$$\int_S \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^2 u \cdot v \, dS = \int_S u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^{2*} v \, dS$$

для довільних досить гладких u, v . Існування спряжених в такому сенсі операторів доведено, наприклад, в [1].

При наших припущеннях наявні такі справедливі твердження:

Л е м а 1. Оператор $(K\varphi)(y) \equiv \int_S \varphi(x) \Psi(x, y) dS_x$ діє в просторі $[\mathcal{D}(S)]^2$.

Л е м а 2. Перетворення $\langle g, A \rangle = \langle \varphi_g, F \rangle$, /5/
де $g = (g_1, \dots, g_7) \in [\mathcal{D}(S)]^2$, $\varphi_g = (\varphi_{g_1}, \dots, \varphi_{g_7})$ - розв'язок системи інтегральних рівнянь

$$\varphi(y) C(y) + \frac{1}{\pi} \int_S \varphi(x) \Psi(x, y) dS_x = g(y), \quad /6/$$

встановлює ізоморфізм простору $[\mathcal{D}(S)]^2$ на себе. Формула обертан-ня має вигляд

$$\langle \varphi, F \rangle = \langle \varphi(y) C(y) + \frac{1}{\pi} \int_S \varphi(x) \Psi(x, y) dS_x, A \rangle$$

для кожної $\varphi \in [\mathcal{D}(S)]^2$.

Твердження леми 2 випливає з єдиності розв'язку системи /6/ як транспонованої до відповідної системи інтегральних рівнянь в [3] і леми 1.

Із вигляду матриць $\Psi(x, y)$ і $C(y)$ та властивостей розв'язків системи /6/ випливає, що

$$\begin{aligned} A_{12} &= \left(\frac{\partial}{\partial s_1} \right)^2 A_{11}, & A_{13} &= \left(\frac{\partial}{\partial s_2} \right)^2 A_{11}, \\ A_{22} &= \left(\frac{\partial}{\partial s_1} \right)^2 A_{21}, & A_{23} &= \left(\frac{\partial}{\partial s_2} \right)^2 A_{21}. \end{aligned} \quad /7/$$

Т е о р е м а. Нехай $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{D}'(S)$, узагальнені функції A_{11}, A_{21}, A_{31} визначені згідно з /5/ і /6/, тоді функція

$$\begin{aligned} u(x) &= \langle \Psi_{11}(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial s_{1y}} \right)^2 \Psi_{12}(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial s_{2y}} \right)^2 \Psi_{13}(x, y), A_{11} \rangle + \\ &+ \langle \Psi_{21}(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial s_{1y}} \right)^2 \Psi_{22}(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial s_{2y}} \right)^2 \Psi_{23}(x, y), A_{21} \rangle + \\ &+ \langle \Psi_{31}(x, y), A_{31} \rangle, \quad x \in \mathcal{D}, y \in S \end{aligned} \quad /8/$$

є розв'язком задачі /1/-/4/.

Д о в е д е н н я . Легко бачити, що коли функція $U(x)$ задовольняє умови /2/ і /3/, то вона також задовольняє умови

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \Psi(x_\varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial s_{i,\varepsilon}} \right)^2 U(x_\varepsilon) ds_\varepsilon = \left(\frac{\partial}{\partial s_i} \right)^2 \Psi, F_1 >, \quad /2' /$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \Psi(x_\varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial s_{i,\varepsilon}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \nu_{x_\varepsilon}} U(x_\varepsilon) ds_\varepsilon = \left(\frac{\partial}{\partial s_i} \right)^2 \Psi, F_2 >, \quad /3' /$
 для кожної $\Psi \in \mathcal{D}(S)$. Бизначимо узагальнені функції $A_{12}, A_{13}, A_{22}, A_{23}$ за формулою /7/, тоді функцію /8/ можна зобразити у вигляді

$$U(x) = \langle \Psi_{11}(x, y), A_{11} \rangle + \langle \Psi_{12}(x, y), A_{12} \rangle + \langle \Psi_{13}(x, y), A_{13} \rangle + \quad /9/ \\ + \langle \Psi_{21}(x, y), A_{21} \rangle + \langle \Psi_{22}(x, y), A_{22} \rangle + \langle \Psi_{23}(x, y), A_{23} \rangle + \langle \Psi_{31}(x, y), A_{31} \rangle, \\ x \in \mathcal{D}, y \in S.$$

Підставляємо /9/ послідовно в умови /2/, /2' /, /3/, /3' /, /4/ з основними функціями $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_2$, а потім додаємо одержані рівності. Використовуючи аналог теореми Фубіні [1], формули стрибків відповідних потенціалів [3], /7/ і лему 2, переконуємось, що функція /9/ задовольняє умови /2/-/4/. Оскільки функції $\Psi_{ij}(x, y)$ / $i, j = 1, 2, 3$ / виражаються лінійно через фундаментальні розв'язки рівняння /1/ і похідні від них, то за властивостями узагальнених функцій функція /8/ задовольняє також рівняння /1/ в області $\mathcal{D}$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Г у п а л о А. - В.С. Обобщенные граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. Автореф. канд. дис., Львов, 1968.

2. Г е л ь ф а н д И.М., Ш и л о в Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.

3. Л о б о д з и н с к а я И.Г. Решение краевых задач для полигармонических уравнений в n -мерном пространстве методом потенциалов. Автореф. канд. дис., Львов, 1961.

УДК 517.946

Г.-В.С.ГУПАЛО

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Розглядаємо задачу Діріхле для рівняння Пуассона, коли граничні значення і права частина рівняння є узагальненими функціями.

1. Нехай Ω - обмежена область в n -вимірному евклідовому просторі E^n , S - її $n-1$ -вимірна безмежно гладка границя. Введемо такі позначення: через $\nu(x)$ позначимо орт внутрішньої нормалі n_x до поверхні S у точці x ; через $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ - простір безмежно диференційовних /основних/ функцій $\psi(x)$ в $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$; $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ - простір лінійних неперервних функціоналів /узагальнених функцій/ на $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$; $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$ - простір безмежно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar{\Omega}$; $\mathcal{D}'_0(\bar{\Omega})$ - простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$, очевидно, що $\mathcal{D}'(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{D}'_0(\bar{\Omega})$; $\mathcal{D}(S)$ - простір безмежно диференційовних /основних/ функцій $\psi(x)$ на поверхні S ; $\mathcal{D}'(S)$ - простір лінійних неперервних функціоналів /узагальнених функцій/ на $\mathcal{D}(S)$. Дію узагальненої функції $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'_0(\bar{\Omega})$ / $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ / на основну функцію $\psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$ / $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ / позначимо так: $(\mathcal{F}, \psi)$, а дію узагальненої функції $\mathcal{A} \in \mathcal{D}'(S)$ на основну функцію $\psi \in \mathcal{D}(S)$ - так: $\langle \mathcal{A}, \psi \rangle$.

2. Постановка задачі. Нехай $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'_0(\bar{\Omega})$ і $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'(S)$, треба знайти розв'язок рівняння

$$\Delta u = \mathcal{F} \quad (1)$$

в обмеженій області $\Omega \subset E^n$, який задовольняє граничну умову

$$u = G \quad /2/$$

на поверхні S .

Будемо вважати, що $u \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ є розв'язком задачі /1/-/2/, якщо для будь-якої функції $\psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$ виконується рівність

$$(u, \Delta \psi) - (f, \psi) = - \langle G, \frac{\partial \psi}{\partial n} \rangle. \quad /3/$$

Л е м а 1. Розв'язок задачі /1/-/2/ в розумінні /3/ єдиний.

Справді, нехай існують два розв'язки u_1 і u_2 задачі /1/-/2/. Різницю їх позначимо через u , тоді з /3/ одержимо, що $(u, \Delta \psi) = 0$ для будь-якої функції $\psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$. Отже, $u \equiv 0$ в розумінні $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.

Нехай $G \in \mathcal{D}'(S)$, вважатимемо [3], [1], що функція $u(x)$ визначена в обмеженій області $\Omega \subset E^n$ набуває на S узагальнені граничні значення G , коли

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} u(x_\epsilon) \psi(x_\epsilon) dS_\epsilon = \langle G, \psi \rangle \quad \text{для кожної } \psi \in \mathcal{D}(S), \quad /4/$$

де S_ϵ - поверхня паралельна до поверхні S , $\psi(x_\epsilon) = \psi(x)$, коли $x_\epsilon = x + \epsilon \nu(x)$, $x_\epsilon \in S_\epsilon$, $x \in S$.

Л е м а 2. Нехай $f = 0$. Якщо $u = G \in \mathcal{D}'(S)$ на поверхні S в розумінні /4/, то u є розв'язком задачі /1/-/2/ в розумінні /3/.

Д о в е д е н н я. Коли $f = 0$ і $u = G$ на поверхні S в розумінні /4/, то маємо узагальнену задачу Діріхле для рівняння Лапласа, яка розглянута в [1]. Її розв'язок, згідно теореми 2 з [1] можна зобразити у вигляді

$$u(x) = \langle A, \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \rangle, \quad x \in \Omega. \quad /5/$$

де $\langle A, g \rangle = \langle G, Y_g \rangle$; Y_g - розв'язок інтегрального рівняння

$$g(y) = p\psi(y) + \int_S \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \psi(x) dx, \quad y \in S; \quad /6/$$

$p = \frac{\omega_n}{2}$, ω_n - площа поверхні одиничної сфери в E^n ; $\omega(x, y)$ - фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в E^n .

Для доведення леми досить показати, що

$$\int_{\Omega} \langle A, \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \rangle \Delta \psi(x) dx =$$

$$= - \langle A, p \frac{d\psi}{dn} + \int_S \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \frac{d\psi}{dn} dx \rangle \quad \text{для кожної } \psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}). \quad /7/$$

Дійсно,

$$\int_{\Omega} \langle A, \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \rangle \Delta \psi(x) dx = \langle A, \int_{\Omega} \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \Delta \psi(x) dx \rangle. \quad /8/$$

Розглянемо $\int_{\Omega} \omega(x, z) \Delta \psi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \omega(x, z) \Delta \psi(x) dx,$

де K_ε - шар радіуса ε з центром у точці z і поверхнею

Σ_ε . Застосувавши формулу Гріна до області $\Omega \setminus K_\varepsilon$ і зробивши граничний перехід при $\varepsilon \rightarrow 0$, та врахувавши, що $\psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$, одержимо

$$\int_{\Omega} \omega(x, z) \Delta \psi(x) dx = - \int_S \omega(x, z) \frac{d\psi}{dn} dx - \omega_n \psi(z). \quad /9/$$

Згідно з /9/ і формулою стрибка нормальної похідної потенціалу простого шару [2]

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \Delta \psi(x) dx = - \int_S \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \frac{d\psi}{dn} dx - \frac{\omega_n}{2} \frac{d\psi}{dn}. \quad /10/$$

Підставивши /10/ в /8/, остаточно маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle A, \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \rangle \Delta \psi(x) dx = \\ = - \langle A, p \frac{d\psi}{dn} + \int_S \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n_y} \frac{d\psi}{dn} \rangle \quad \text{для кожної } \psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Лема доведена.

Нехай $\Gamma(x, y)$ - функція Гріна задачі Діріхле для області Ω .

Визначимо узагальнену функцію u_G за правилом

$$(u_G, \psi) = \langle G, \frac{\partial}{\partial n_y} \int_{\Omega} \Gamma(x, y) \psi(x) dx \rangle \quad \text{для кожної } \psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \quad /11/$$

а узагальнену функцію u_f за правилом

$$(u_f, \psi) = (f, \int_{\Omega} \Gamma(x, y) \psi(y) dy) \quad \text{для кожної } \psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}). \quad /12/$$

Легко показати, що u_G, u_f - елементи простору $\mathcal{D}'(\Omega)$. Має місце наступна лема, яка дає представлення розв'язку задачі /1/-/2/.

Л е м а 3. Узагальнена функція

$$u = u_G + u_f \quad /13/$$

є розв'язком задачі /1/-/2/ в розумінні /3/.

Д о в е д е н н я . Треба показати, що має місце рівність

$$(u_G, \Delta \psi) + (u_f, \Delta \psi) - (f, \psi) = - \langle G, \frac{\partial \psi}{\partial n} \rangle \quad \text{для кожної } \psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}). \quad /14/$$

Згідно /11/ і /12/ маємо

$$(u_G, \Delta \psi) = - \langle G, \frac{\partial \psi}{\partial n} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}). \quad /15/$$

$$(u_f, \Delta \psi) = (f, \psi), \quad \psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}). \quad /16/$$

Підставивши /15/ і /16/ в /14/, переконуємось, що лема доведена.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г у п а л о Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле, -ДАН УРСР, 1966, 843-846.
2. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., "Мир", 1964.
3. Szmydt Z. *Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzati*. -Atti della Accadem. Naz. dei Lincei, 32, 367 (1962).

УДК 513.011.3

І.С.КРУК

ТОЧНІСТЬ ОБЧИСЛЕННЯ ЗА НОМОГРАМАМИ ТА СПОСОБИ

ЇЇ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Поряд з електронно-обчислювальною технікою ще довго для полегшення праці будуть використовуватись різні обчислювальні прилади і в першу чергу номограми, виготовлені на звичайному креслярському папері.

Звичайно, обчислення за номограмами носить наближений характер. Відповідь, що знаходиться за номограмою, містить в собі деяку помилку. Оцінка цієї помилки при будь-якому обчисленні, звичайно, бажана, а в деяких випадках просто необхідна.

У цій роботі ставимо за мету вказати: 1/ джерела виникнення помилок при обчисленні за номограмами; 2/ способи оцінки точності обчислення за допомогою номограм, коли розглядати номограми як певний рисунок, накреслений у графічній площині.

Розглядаємо номограму, накреслену в графічній площині, де графічні точки розглядаються як кола достатньо малого радіуса ω , а графічні прямі, як смужки шириною 2ω [2].

На основі лабораторних досліджень Д.І.Каргін [1] виявив, що величина ω перебуває в межах між 0,08 і 0,13 мм. Помилка відповіді буде визначатися в основному помилками операцій на номограмі при її знаходженні.

Під час побудови номограм, як і при їх читанні, маємо справу з помилками, які вносяться в результат з огляду на розміри реальних /графічних/ точок і прямих, якими оперуємо при цьому. Одним з істотних джерел виникнення помилок в обчисленні є існування у графічній площині графічно-інцидентних елементів /точок і прямих/.

Дві графічні точки $A(A')$ і $B(B')$ називаються графічно-інцидентними, якщо відстань між відповідними їм евклідовими точками менша або рівна 2ω , тобто, коли $A'B' \leq 2\omega$. Якщо ж $\omega = 0$, тобто $A' \equiv B'$, то такі точки звуться абсолютно інцидентними /рис.1/.

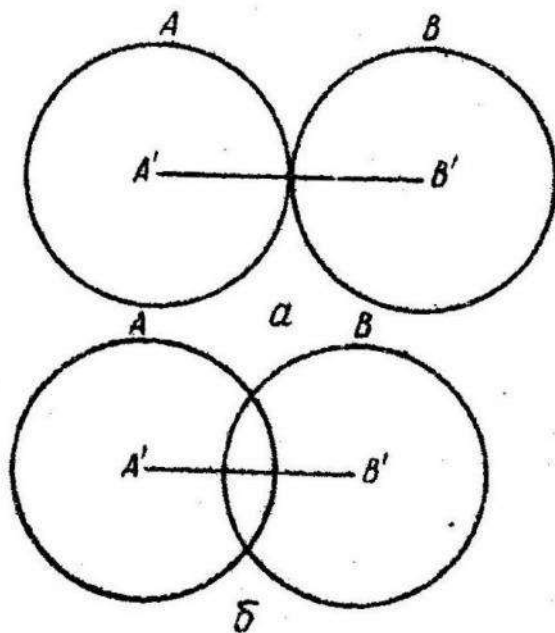


Рис. 1.

Дві графічно-інцидентні точки визначають коло радіуса 2ω з центром в середині евклідового відрізка $A'B'$. Це коло можна назвати первинною помилкою інцидентності двох графічних точок.

Графічна точка $A(A')$ і пряма $\alpha(\alpha')$ називаються графічно інцидентними, якщо відстань від евклідової точки A' до евклідової прямої α' не перевищує 2ω , тобто $A'O' \leq 2\omega$. Коли $A' \equiv O'$, то точка A і пряма α зветься абсолютно інцидентними.

Те ж саме можна сказати і про дві графічні прямі або про графічну точку і графічне коло.

Дві графічні прямі $\alpha(\alpha')$ і $\beta(\beta')$ вважаються графічно інцидентними, якщо $\alpha' \parallel \beta'$ і відстань між ними не перевищує 2ω , тобто $O'O' \leq 2\omega$. Коли $O' \equiv O'$, то прямі зветься абсолютно інцидентними.

Графічне коло $K(K')$ і точка $A(A')$ графічно інцидентні, якщо $A'O' \leq 2\omega$ /рис. 2/.

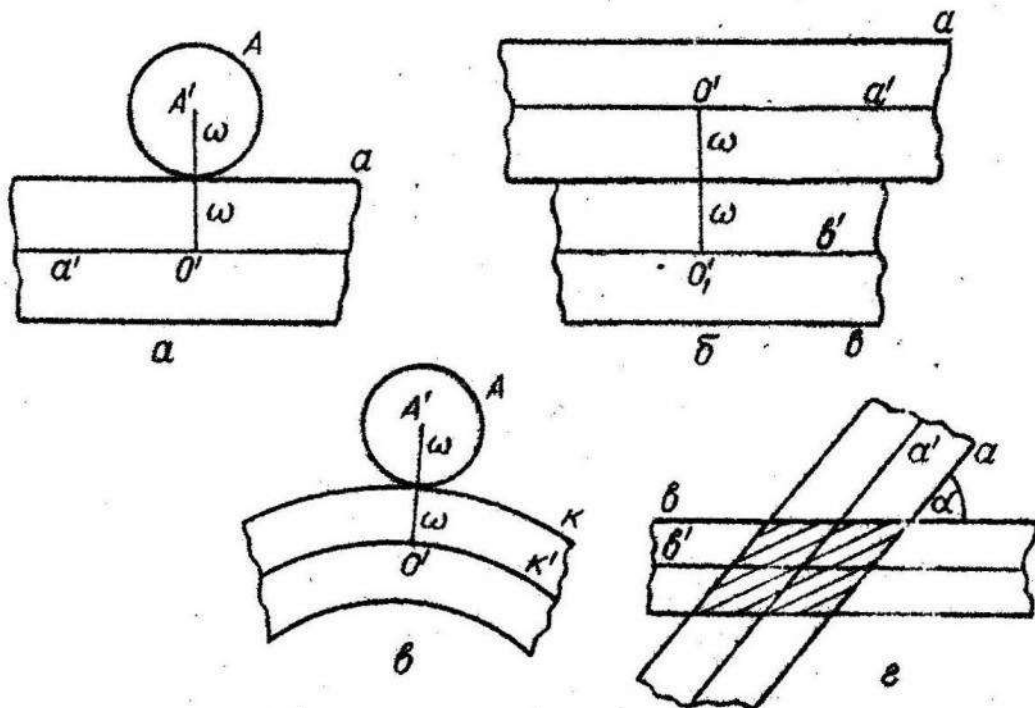


Рис. 2.

При побудовах і користуванні номограмами зустрічаємось не тільки з первинними помилками, що виникають внаслідок графічної інцидентності елементів, але і з такими, які виникають внаслідок перетину двох графічних прямих, графічної прямої і графічного кола, двох графічних кіл і т.д.

Якщо дві графічні прямі перетинаються, то вони визначають точку, точність позначення якої характеризується площею помилок, форма і величина якої залежить в основному від кута $\angle$, під яким перетинаються ці прямі /рис.2/.

Якщо позначити площу помилок через S , то

$$S = \frac{4\omega^2}{\sin \angle}.$$

Користуючись даними попереднього розділу, можемо тепер перейти до розгляду питання про точність обчислень за номограмами.

Розглянемо номограму квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, що складається з трьох шкал, рівняння яких мають вигляд:

$$x_1 = 0, y_1 = mp \quad - \text{рівняння шкали } p,$$

$$x_2 = H, y_2 = nq \quad - \text{рівняння шкали } q,$$

$$x_3 = \frac{H}{1 + \frac{n}{m}x}, y_3 = \frac{-nx^2}{1 + \frac{n}{m}x} \quad - \text{рівняння шкали } x,$$

де m і n - масштабні множники; H - відстань між шкалами.

Перші дві шкали прямолінійні, третя - криволінійна. Схематично ця номограма зображена на рис. 3.

Процес знаходження коренів квадратного рівняння за цієї номограмою можна розбити на такі етапи: 1/ за даними значеннями p і q на відповідних шкалах позначити точки; 2/ через ці точки провести пряму; 3/ визначити точку перетину цієї прямої з шкалою x ; 4/ прочитати помітки знайдених точок перетину, які и будуть коренями квадратного рівняння.

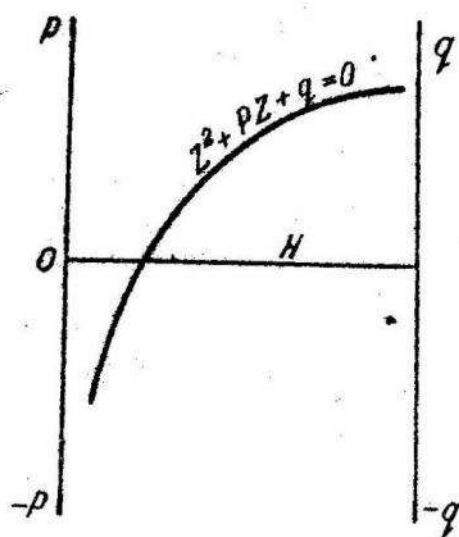


Рис. 3.

Очевидно, що ні один з цих етапів не можна виконати точно. Всі вони виконуються з певними похибками /наближено/.

Розглянемо кожну з цих операцій окремо і проаналізуємо, як впливає кожна з її похибок на похибку відповіді. На першому етапі виникають такі похибки. При знаходженні точок на шкалах p і q за їх позначками доводиться проводити графічну інтерполяцію. Це треба робити особливо тоді, коли необхідно знайти корені загального квадратного рівняння вигляду $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$. Щоб скористатися побудованою номограмою для знаходження його коренів, його необхідно звести до виду:

$$z^2 + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$

тобто $\frac{\beta}{\alpha}$ і $\frac{\gamma}{\alpha}$ здебільшого дробові числа. Розбиття на око поділок між двома штрихами на два, три і так далі частин приводить до геометричної похибки в нанесенні точок поділу, яка дорівнює $(0,2 \pm \pm \omega) \text{ мм}$ /рис.4/. Ця помилка має напрям вздовж шкали. Наявна також помилка в напрямку нормалі до шкали I . Взагалі у графічних пло-

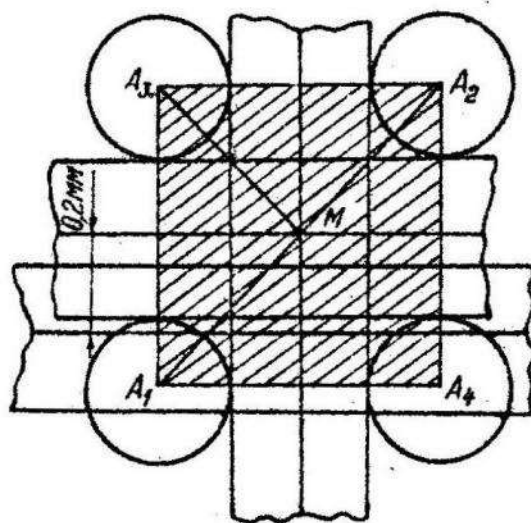


Рис. 4.

щині точність визначення точки на шкалі визначається площею помилок, величина якої дорівнює $2(0,2 \pm \omega) \cdot 4\omega = 8\omega(0,2 \pm \omega)$. Якщо врахувати, що ω змінюється від 0,8 до 0,13 мм, то максимальне значення цієї площі – 0,3 мм.

Розглянемо другий етап нашої задачі – проведення прямої через дві точки. Ця операція тісно пов'язана з попередньою. Від того, як точно вибрана точка на шкалі, залежить точність проведення прямої. Взагалі, всі можливі прямі, які можна одержати тут, розмістяться у смужці шириною $A_1 A_2 + 6\omega$ і довжиною AB , де $A_1 A_2$ – сума проєкцій помилок Δ і Δ_1 відповідно вздовж прямої і вздовж нормалі на діагональ прямокутника з площею помилок, який ми розглядали в першому етапі; AB – відстань між точками. Розглянемо рис.5. На ньому показані крайні можливі положення прямої відповідей залежно від похибки, яку ми допустили в першому етапі. У $\Delta C, D, D_2$ висота h є проєкцією всіх помилок, допущених у перших двох етапах, на напрямок, перпендикулярний до одного з положень прямої AB . З рис. 5 видно, що

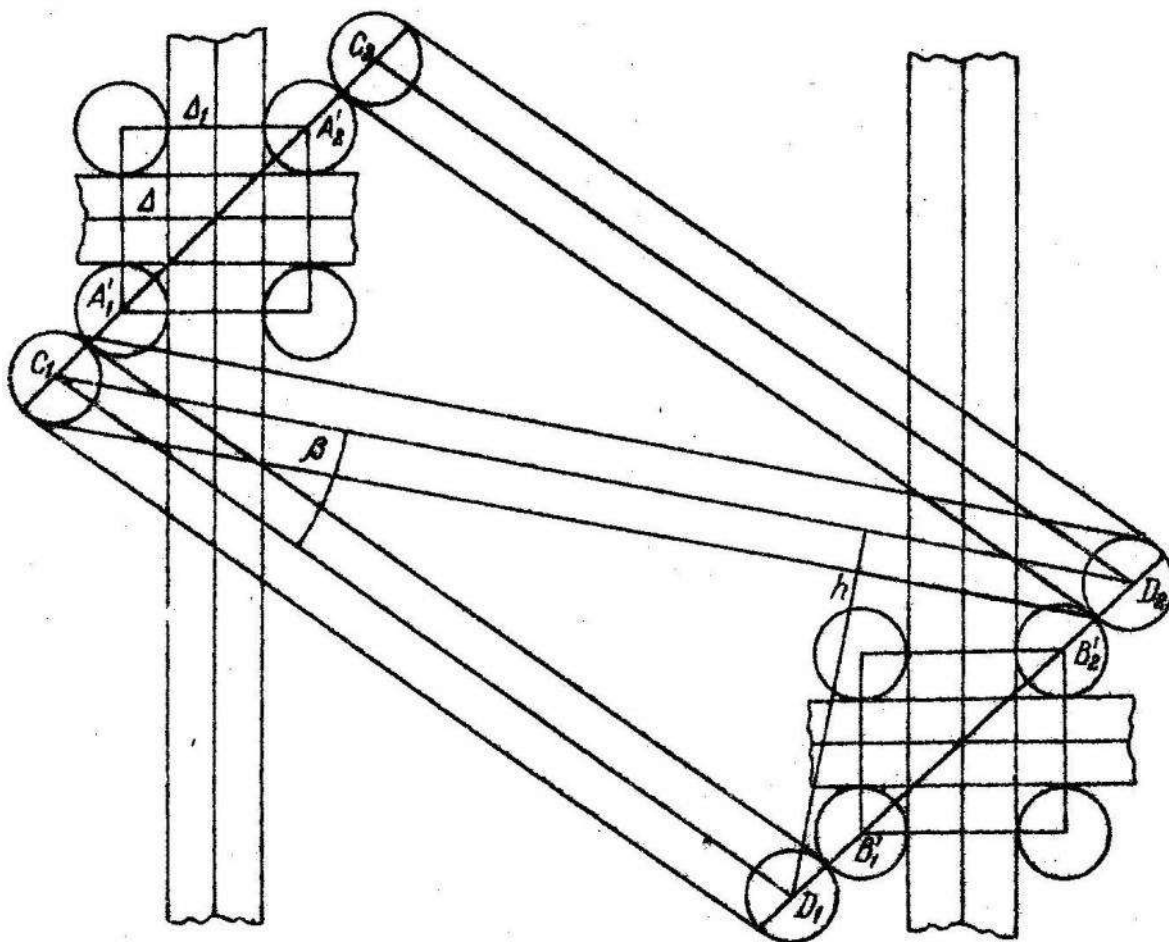


Рис. 5.

$$h = l \sin \beta \quad \text{або} \quad h = l \sin \beta.$$

Звідси висновок: помилка проведення прямої через дві точки прямо пропорційна відстані між точками, тобто відстані між шкалами номограми. Чим менша величина h , тим менший кут β , тобто тим більша точність проведення прямої через дві точки.

Розглянемо третій етап - знаходження перетину прямої відповіді з шкалою відповідей. Тут розглядається перетин прямої з кривою. Перетинаючись, вони утворюють фігуру, обмежену двома паралель-

ними прямолінійними відрізками і двома криволінійними. Оскільки це перетин у безмежно малому проміжку, то цю фігуру можемо розглядати як звичайний паралелограм, площа якого

$$S = \frac{4w^2}{\sin \alpha},$$

де α - кут між прямою і прямолінійною шкалою. Точність визначення точки перетину прямої відповідей з шкалою відповідей визначатиметься цією площею. З формули видно, що коли пряма нормальна до шкали відповідей, то точність визначення точки перетину найбільша, оскільки S має мінімальне значення. Чим менший кут α , тим точність визначення точки перетину менша. Отже, точність побудови точки перетину прямої відповідей з шкалою відповідей перебуває в обернено пропорційній залежності з кутом їх перетину.

І, нарешті, останній етап - похибка прочитання відповіді на шкалі відповідей приблизно того ж порядку, що й похибка нанесення точки за її поміткою на шкалі, тобто ця похибка, як було доведено вище, приблизно дорівнює 0,3 мм.

Кінцева похибка, яку можна прийняти за суму всіх похибок, що були допущені в процесі відшукування відповіді, дорівнює довжині поділки між дійсною точкою перетину прямої з шкалою відповідей і знайденою точкою. Ціна цієї поділки дає нам похибку відповіді, що одержана за номограмою. Величина такої похибки залежатиме від виду номограми, виду шкал, і для однієї і тієї ж номограми в різних місцях вона може набирати різних значень.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Б у й м о л а Г.Л. Дослідження первинних помилок геометричних побудов.-Ученне записки Львовского госуниверситета им.Ив. Франко, серия механико-математическая, 1954, т.ХХІХ, вып.1/6/.

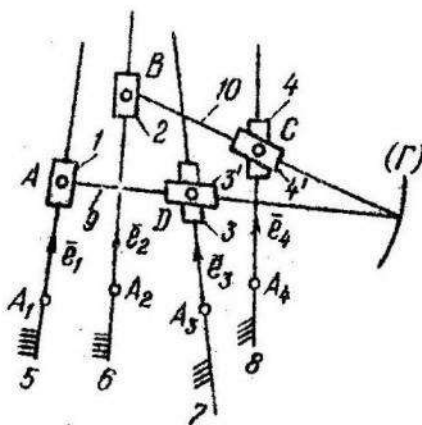
2. П е н т к о в с к и й М.В. Номография. М.-Л., Техиздат, 1949.

УДК 513

С.В.ДЕНИСКО

МЕХАНІЗМИ ДЛЯ УТВОРЕННЯ ПАРАБОЛ

Зображений на рисунку плоский механізм має таку будову. Повзуни 1, 2, 3, 4 переміщуються відповідно вздовж напрямних 5, 6, 7, 8 так, що $\overline{A_1A} = \lambda \bar{e}_1$, $\overline{A_2B} = \kappa_2 \lambda \bar{e}_2$, $\overline{A_3C} = \kappa_3 \lambda \bar{e}_3$, $\overline{A_4D} = \kappa_4 \lambda \bar{e}_4$ / A_1, A_2, A_3, A_4 - зафіксовані точки; $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ - сталі; λ - змінна; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ - орти. Таке переміщення повзунів 1, 2, 3, 4 можна здійснити за допомогою складного зубчастого механізму [1], у якого вказані повзуни в



зубчастими рейками. Повзуни 3, 3' утворюють обертальну пару $\mathcal{D}$, а повзуни 4, 4' - обертальну пару $\mathcal{C}$. Кривошип 9 є прямою для повзуна 3, а кривошип 10 - повзуна 4. Точка перетину прямих AD , BC описує криву Γ .

Крива Γ належить параболі тоді і тільки тоді, коли розглянутий механізм задовольняє умови

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_2 &= 0, \quad \mathcal{Y}_1 \mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{F}_2^2 - 2\rho(\mathcal{F} \mathcal{F}_1 + \mathcal{Y}_1 \mathcal{E}) = 0, \\ \mathcal{E}_2^2 + 2\mathcal{D}_2 \mathcal{F}_2 - 2\rho(\mathcal{E} \mathcal{E}_1 + \mathcal{F}_1 \mathcal{D} + \mathcal{D}_1 \mathcal{F}) &= 0, \\ \mathcal{E}_2 \mathcal{F}_2 - \rho(\mathcal{Y}_1 \mathcal{D} + \mathcal{F}_1 \mathcal{E} + \mathcal{E}_1 \mathcal{F}) &= 0, \quad \mathcal{D}_2 \mathcal{E}_2 - \rho(\mathcal{D}_1 \mathcal{E} + \mathcal{E}_1 \mathcal{D}) = 0, \\ \mathcal{D}_2^2 - 2\rho \mathcal{D}_1 \mathcal{D} &= 0. \end{aligned} \quad /1/$$

У рівностях /1/

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (x_3' - x_1')(x_4^2 - x_2^2) - (x_3^2 - x_1^2)(x_4' - x_2'), \\ \mathcal{D}_1 &= (x_4^2 x_3' - x_1' x_3^2)(x_4' - x_2') - (x_2^2 x_4' - x_1' x_4^2)(x_3' - x_1'), \\ \mathcal{D}_2 &= (x_4^2 x_3' - x_1' x_3^2)(x_4^2 - x_2^2) - (x_2^2 x_4' - x_2' x_4^2)(x_3' - x_1'), \\ \mathcal{E} &= (\kappa_3 e_3' - e_1')(x_4^2 - x_2^2) + (\kappa_4 e_4^2 - \kappa_2 e_2^2)(x_3' - x_1') - \\ &\quad - (\kappa_3 e_3^2 - e_1^2)(x_4' - x_2') - (\kappa_4 e_4' - \kappa_2 e_2')(x_3^2 - x_1^2), \\ \mathcal{E}_1 &= (x_3' e_1^2 + x_1^2 \kappa_3 e_3' - x_3^2 e_1' - x_1' \kappa_3 e_3^2)(x_4' - x_2') + \\ &\quad + (x_1^2 x_3' - x_1' x_3^2)(\kappa_4 e_4' - \kappa_2 e_2') - (x_4' \kappa_2 e_2^2 + \\ &\quad + x_2^2 \kappa_4 e_4' - x_4^2 \kappa_2 e_2' - x_2' \kappa_4 e_4^2)(x_3' - x_1') - (x_2^2 x_4' - \\ &\quad - x_2' x_4^2)(\kappa_3 e_3' - e_1'), \quad \mathcal{E}_2 = -(x_4' \kappa_2 e_2^2 + x_2^2 \kappa_4 e_4' - x_4^2 \kappa_2 e_2' - \\ &\quad - x_2' \kappa_4 e_4^2)(x_3^2 - x_1^2) - (x_2^2 x_4' - x_2' x_4^2)(\kappa_3 e_3^2 - e_1^2) + (x_3' e_1^2 + \\ &\quad + x_1^2 \kappa_3 e_3' - x_3^2 e_1' - x_1' \kappa_3 e_3^2)(x_4^2 - x_2^2) + (x_1^2 x_3' - x_1' x_3^2)(\kappa_4 e_4^2 - \\ &\quad - \kappa_2 e_2^2), \quad \mathcal{F} = (\kappa_4 e_4^2 - \kappa_2 e_2^2)(\kappa_3 e_3' - e_1') - (\kappa_3 e_3^2 - e_1^2)(\kappa_4 e_4' - \\ &\quad - \kappa_2 e_2'), \quad \mathcal{F}_1 = \kappa_3 (e_1^2 e_3' - e_1' e_3^2)(x_4' - x_2') + (x_3' e_1^2 + x_1^2 \kappa_3 e_3' - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x_3^2 e_1' - x_1' \kappa_3 e_3^2)(\kappa_4 e_4' - \kappa_2 e_2') - \kappa_2 \kappa_4 (e_2^2 e_4' - \\
& - e_2' e_4^2)(x_3' - x_1') - (x_4' \kappa_2 e_2^2 + x_2^2 \kappa_4 e_4' - x_4^2 \kappa_2 e_2' - \\
& - x_2' \kappa_4 e_4^2)(\kappa_3 e_3' - e_1'), \quad \mathcal{F}_2 = (x_3' e_1^2 + x_1^2 \kappa_3 e_3' - \\
& - x_3^2 e_1' - x_1' \kappa_3 e_3^2)(\kappa_4 e_4^2 - \kappa_2 e_2^2) + \kappa_3 (e_1^2 e_3' - \\
& - e_1' e_3^2)(x_4^2 - x_2^2) - (x_4' \kappa_2 e_2^2 + x_2^2 \kappa_4 e_4' - \\
& - x_4^2 \kappa_2 e_2' - x_2' \kappa_4 e_4^2)(\kappa_3 e_3^2 - e_1^2) - \\
& - \kappa_2 \kappa_4 (e_2^2 e_4' - e_2' e_4^2)(x_3^2 - x_1^2),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_1 = \kappa_3 (e_1^2 e_3' - e_1' e_3^2)(\kappa_4 e_4' - \kappa_2 e_2') -$$

$$- \kappa_2 \kappa_4 (e_2^2 e_4' - e_2' e_4^2)(\kappa_3 e_3' - e_1'),$$

$$\mathcal{G}_2 = \kappa_3 (e_1^2 e_3' - e_1' e_3^2)(\kappa_4 e_4^2 - \kappa_2 e_2^2) -$$

$$- \kappa_2 \kappa_4 (e_2^2 e_4' - e_2' e_4^2)(\kappa_3 e_3^2 - e_1^2),$$

причому x_m^i - координати точки A_m , а e_m^i - координати вектора $\vec{e}_m$ відносно прямокутної декартової системи координат x^i , x^2 , яка вибрана так, що рівняння параболи у цій системі координат має вигляд $(x^2)^2 = 2\rho x^1$.

З умов /1/ випливають такі твердження.

1. Якщо точка A_1 суміщається з точкою A_3 , а точка A_2 з точкою A_4 , то крива Γ не належить параболі.

Д о в е д е н н я . Нехай крива Γ належить параболі. Тоді з перших двох рівностей системи /1/ матимемо

$$\kappa_3 (e_1^2 e_3' - e_1' e_3^2)(\kappa_4 e_4' - \kappa_2 e_2') - \kappa_2 \kappa_4 (e_2^2 e_4' - e_2' e_4^2)(\kappa_3 e_3' - e_1') = 0,$$

$$\kappa_3 (e_1^2 e_3' - e_1' e_3^2)(\kappa_4 e_4' - \kappa_2 e_2') - \kappa_2 \kappa_4 (e_2^2 e_4' - e_2' e_4^2)(\kappa_3 e_3' - e_1') = 0$$

або

$$\kappa_3 (e_1^2 e_3' - e_1' e_3^2)(\kappa_4 e_4^2 - \kappa_2 e_2^2) - \kappa_2 \kappa_4 (e_2^2 e_4' -$$

$$-e'_2 e_4^2)(\kappa_3 e_3^2 - e_1^2) = 0, (\kappa_4 e_4^2 - \kappa_2 e_2^2)(\kappa_3 e_3^2 - e_1^2) - \\ - (\kappa_3 e_3^2 - e_1^2)(\kappa_4 e_4^2 - \kappa_2 e_2^2) = 0.$$

Згідно з умовами твердження $e_1^2 e_3^2 - e_1' e_3'^2 \neq 0, e_2^2 e_4^2 - e_2' e_4'^2 \neq 0$.

Тому в першому випадку приходимо до висновку, що вектори $\kappa_3 \bar{e}_3 - \bar{e}_1$, $\kappa_4 \bar{e}_4 - \kappa_2 \bar{e}_2$ колінеарні. Очевидно, це буде і в другому випадку. Отже, в обох випадках для будь-яких значень λ вектори $\overline{AD} = \lambda(\kappa_3 \bar{e}_3 - \bar{e}_1)$, $\overline{BC} = \lambda(\kappa_4 \bar{e}_4 - \kappa_2 \bar{e}_2)$ колінеарні. Це неможливо, так як прямі AD , BC перетинаються.

Суперечність доводить наше твердження.

2. Якщо $\kappa_3 = \kappa_4$, $\kappa_2 = 1$, а напрямні 7, 8 паралельні напрямній 5, що збігається з напрямною 6, то крива Γ не належить параболі.

Д о в е д е н н я . Нехай крива Γ належить параболі. Тоді згідно з умовами твердження з третьої рівності системи /1/ матимемо $e_1^2 = 0$ або $(x_4^2 - x_3^2)e_1' + (x_3' - x_4')e_1^2 = 0$ і тільки ці випадки.

У першому випадку з п'ятої рівності системи /1/ випливає, що $x_3^2 = x_4^2$. Тому шоста рівність системи /1/ зважаючи на цьому рівність цієї системи набуває вигляду $x_4' - x_3' = \kappa_3(x_2' - x_1')$. А це означає, що механізм відтворює одну й тільки одну точку.

У другому випадку четверта рівність системи /1/ матиме вигляд $x_4' - x_3' = \kappa_3(x_2' - x_1')$. Отже, знову механізм відтворює всього лиш одну точку.

Таким чином, кожен з можливих випадків приводить до суперечності, що і доводить наше твердження.

3. Нехай $\kappa_2 = 1$, $\kappa_3 = \kappa_4$. Нехай напрямна 5, якій паралельні напрямні 6, 7, 8 збігається з віссю параболі $(x^2)^2 = 2\rho x'$, а

точки A_1, A_2, A_3, A_4 - на дотичній до цієї параболи в її вершині. Крива збігатиметься з вказаною параболою тоді й тільки тоді, коли $x_3' = -\frac{(\kappa-1)(x_2^2)^2}{2\rho}$, $x_3^2 = (\kappa-1)x_2^2$, $x_4^2 = \kappa x_2^2$.

Д о в е д е н н я . Зважаючи на умови твердження, перша, друга, третя і сьома рівності системи /1/ є тотожностями.

З шостої та п'ятої рівностей системи /1/ маємо відповідно $x_4^2 = \kappa x_2^2$, $x_3^2 = (\kappa-1)x_2^2$. Враховуючи це з четвертої рівності системи /1/ знаходимо $x_3' = -\frac{(\kappa-1)(x_2^2)^2}{2\rho}$.

Твердження доведено.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. А р т о б о л е в с к и й И.И. Теория механизмов. М., "Наука", 1967.

УДК 517.946

Л.С.ПАРАСЮК, Є.М.ПАРАСЮК

ОДНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЗМІШАНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Розглядаємо еліптичне диференціальне рівняння другого порядку з виродженням в циліндричних координатах $(z, \bar{z})$ з деяким параметром μ ($0 < \mu < 1$) вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \quad /1/$$

при крайових умовах на площині виродження $\bar{z} = 0$

$$\lim_{\bar{z} \rightarrow 0} u(z, \bar{z}) = 0, \quad z > a, \quad /2/$$

$$\lim_{\bar{z} \rightarrow 0} \bar{z} \mu \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = -f(z) \quad z < a. \quad /3/$$

Покажемо, що аналогічно як в [3] задача /1/, /2/, /3/ за допомогою перетворення Ханкеля зводиться до розв'язування парних інтегральних рівнянь.

Позначимо через

$$\bar{U}(\lambda, z) = \int_0^{\infty} z U(z, z) J_0(\lambda z) dz$$

трансформанту Ханкеля нульового порядку шуканого розв'язку задачі /1/, /2/, /3/. Тоді функція $\bar{U}(\lambda, z)$ повинна бути розв'язком рівняння

$$z \frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} + \mu \frac{d \bar{U}}{dz} - \lambda^2 \bar{U} = 0. \quad / 4 /$$

Необхідний розв'язок рівняння /4/ можна зобразити у вигляді

$$\bar{U}(\lambda z) = C(\lambda) z^{\nu/2} K_{\nu}(2\lambda \sqrt{z}),$$

де $K_{\nu}(2\lambda \sqrt{z})$ - модифікована циліндрична функція або так звана функція Макдональда порядку $\nu = 1 - \mu$; $C(\lambda)$ - довільна стала, яка визначається за допомогою крайових умов /2/, /3/.

На основі оберненого перетворення Ханкеля розв'язок задачі /1/, /2/, /3/ можна записати у вигляді

$$U(z, z) = \int_0^{\infty} \lambda C(\lambda) z^{\frac{1-\mu}{2}} K_{1-\mu}(2\lambda \sqrt{z}) J_0(\lambda z) d\lambda. \quad / 5 /$$

При цьому матимемо

$$z^{\mu} \frac{\partial U}{\partial z} = - \int_0^{\infty} \lambda^2 C(\lambda) z^{\mu/2} K_{\mu}(2\lambda \sqrt{z}) J_0(\lambda z) d\lambda. \quad / 6 /$$

Використовуючи /5/, /6/, а також відому асимптотику функції $K_{\nu}(x)$

$$K_{\nu}(x) \approx \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{x^{\nu}}, \quad \nu > 0, x \rightarrow 0 \quad / 7 /$$

для визначення $C(\lambda)$ із умов /2/, /3/ одержуємо такі парні інтегральні рівняння:

$$\int_0^{\infty} u^{\alpha} A(u) J_0(ur) du = 0, \quad r > 1, \quad /8/$$

$$\int_0^{\infty} u^{\beta} A(u) J_0(ur) du = g(r), \quad 0 < r < 1, \quad /9/$$

де $A(u) = u C(\frac{u}{\alpha})$, $\rho = \frac{z}{\alpha}$, $g(\rho) = \frac{2\alpha^{3-\mu} f(z)}{J(\mu)}$, $\alpha = \mu - 1$; $\beta = 1 - \mu$.

Розв'язавши рівняння /8/, /9/, одержимо значення $C(\lambda)$ у вигляді

$$C(\lambda) = \frac{2^{\mu+1} \alpha^{3-\mu}}{J(1-\mu) J(\mu)} \int_0^1 z^{2-\mu} J_{1-\mu}(\alpha \lambda \eta) d\eta \int_0^1 f(\alpha t \eta) \frac{t dt}{(1-t^2)^{\mu}}. \quad /10/$$

У випадку, якщо $f(z) = C$, де $C = const$, стала $C(\lambda)$ знаходиться в явному вигляді

$$C(\lambda) = \frac{2^{\mu} \alpha^{2-\mu} C}{J(2-\mu) J(\mu) \lambda} J_{2-\mu}(\alpha \lambda), \quad /11/$$

де $J_{2-\mu}(\alpha \lambda)$ - функція Бесселя 1-го роду.

Підставивши /11/ в /5/, одержуємо розв'язок задачі /1/, /2/, /3/ в даному частинному випадку у вигляді

$$u(z, z) = \frac{2^{\mu} \alpha^{2-\mu} z^{\frac{1-\mu}{2}} C}{J(2-\mu) J(\mu)} \int_0^{\infty} K_{1-\mu}(2\lambda \sqrt{z}) J_{2-\mu}(\alpha \lambda) J_0(\lambda z) d\lambda. \quad /12/$$

Як і в загальному випадку легко показати, що функція /12/ задовольняє рівняння /1/ і крайові умови /2/, /3/ при $f(z) \equiv C$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. К р а т ц е р А., Ф р а н ц В. Трансцендентные функции. М., ИЛ, 1963.
2. Л е б е д е в Н.Н. Специальные функции и их приложение, М.-Л., Физматгиз, 1963.
3. П а р а с ю к Л.С. Об одной граничной задаче для кругового отверстия, дифференциальное уравнение которой вырождается на границе области $Z = 0$. - "Математическая физика", вып. 13, 1973.
4. П а р а с ю к Л.С. О некоторых краевых задачах в полуплоскости для вырождающихся эллиптических уравнений с параметром. - "Математическая физика", вып. 18, 1975.
5. С н е д д о н И. Преобразование Фурье. М. ИЛ, 1955.

УДК 517.917

Б.В.КОВАЛЬЧУК, Л.М.ЛІСЕВИЧ

ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ Й АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

1. Поняття згортки і рівність Парсеваля для S^2 - майже періодичних матриць.

Відомо [1], якщо $f(x) \in S^2$ - майже періодична функція, то рівномірно по $x \in (-\infty, +\infty)$ існує функція

$$\varphi(x) = M_t \{ f(x+t) \overline{f(t)} \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt,$$

яка називається згорткою функції $f(x)$.

О з н а ч е н н я . Згорткою S^2 - майже періодичної матриці

$F(x) = [f_{jk}(x)]$ назовемо матрицю.

$$\Phi(x) = [\varphi_{jk}(x)] = [M_t \{ f_{jk}(x+t) \overline{f_{jk}(t)} \}]. \quad /1.1/$$

Т е о р е м а 1.1. Для всякої S^2 - майже періодичної матриці

$F(x) = [f_{jk}(x)]$ її згортка $\Phi(x) = [\varphi_{jk}(x)]$ є майже періодичною матрицею Бора, причому

$$M \{ \Phi(x) \} = [|M \{ f_{jk}(x) \} |^2]. \quad /1.2/$$

Д о в е д е н н я . Те, що згортка /1.1/ є майже періодичною матрицею Бора, випливає з того, що всі функції

$$\psi_{jk}(x) = M_t \{ f_{jk}(x+t) \overline{f_{jk}(t)} \}$$

є майже періодичними функціями Бора [1] .

Далі, тому що функції $\psi_{jk}(x)$ існують рівномірно відносно x , то можлива перестановка їх середніх значень по x і по t . А тому на основі властивостей середнього значення одержимо

$$\begin{aligned} M_x \{ \phi(x) \} &= [M_x \{ \psi_{jk}(x) \}] = [M_x \{ M_t \{ f_{jk}(x+t) \overline{f_{jk}(t)} \} \}] = \\ &= [M_t \{ \overline{f_{jk}(t)} \cdot M_x \{ f_{jk}(x+t) \} \}] = [M_t \{ \overline{f_{jk}(t)} M_x \{ f_{jk}(x) \} \}] = \\ &= [M_x \{ f_{jk}(x) \} \cdot \overline{M_t \{ f_{jk}(t) \} \}] = [|M_x \{ f_{jk}(x) \} |^2]. \end{aligned}$$

Н а с л і д о к . Якщо $A(\lambda) = [a_{jk}(\lambda)]$ є матричні коефіцієнти Фур'є S^2 - майже періодичної матриці $F(x)$, то для її згортки $\phi(x)$ матричні коефіцієнти Фур'є мають вигляд $A^*(\lambda) = [|a_{jk}(\lambda)|^2]$.

Т е о р е м а 1.2. Для будь-якої S^2 - майже періодичної матриці $(x) = [f_{jk}(x)]$ з рядом Фур'є

$$F(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}$$

наявна рівність Парсеваля

$$\sum_n \|A_n\|^2 = \|F\|^2 \quad /1.3/$$

Д о в е д е н н я . Тому що ряд із квадратів норм матричних коефіцієнтів Фур'є $A_n = [a_{jk}(\lambda_n)]$ збіжний [2] і для кожної S^2 - майже періодичної функції $f_{jk}(x)$ наявна рівність Парсеваля

$$\sum_n |a_{jk}(\lambda_n)|^2 = \|f_{jk}\|^2,$$

то

$$\sum_n \|A_n\|^2 = \sum_n \left(\sum_{j,k} |a_{jk}(\lambda_n)|^2 \right) =$$

$$= \sum_{j,k} \left(\sum_n |a_{jk}(\lambda_n)|^2 \right) = \sum_{j,k} \|f_{jk}\|^2 = \|F\|^2.$$

2. Теорема єдиності для S^p - майже періодичних матриць.

Т е о р е м а 2.1. Якщо для S^p - майже періодичної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ її матричні коефіцієнти Фур'є $A(\lambda) = [a_{jk}(\lambda)]$ дорівнюють нулю, то така матриця дорівнює нулю майже всюди.

Д о в е д е н н я . Матричні коефіцієнти Фур'є S^p - майже періодичної матриці $F(x)$ мають вигляд

$$A(\lambda) = M \{ F(x) e^{-i\lambda x} \} = [M \{ f_{jk}(x) e^{-i\lambda x} \}].$$

З умови $A(\lambda) = 0$ випливає

$$a_{jk}(\lambda) = M \{ f_{jk}(x) e^{-i\lambda x} \} = 0 \quad (-\infty < \lambda < +\infty).$$

Тоді на основі теореми єдиності для S^p - майже періодичних функцій [3] одержимо, що $f_{jk}(x) = 0$ майже всюди для всіх j, k .

А це означає, що $F(x) = 0$ майже всюди.

Н а с л і д о к . Якщо дві S^p - майже періодичні матриці $F_1(x)$ і $F_2(x)$ мають однакові ряди Фур'є, то вони співпадають майже всюди.

Т е о р е м а 2.2. Якщо для S^p - майже періодичної матриці $F(x)$ її ряд Фур'є

$$F(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} \quad /2.1/$$

збігається рівномірно за S^p - нормою, то його сума дорівнює матриці $F(x)$ майже всюди, тобто

$$F(x) = \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} \quad /2.2/$$

Д о в е д е н н я . Рівномірно збіжний за S^p - нормою тригонометричний ряд /2.1/ є рядом Фур'є своєї суми

$$S(x) = \sum_n A_n e^{i\lambda_n x},$$

причому $S(x) \in S^p$ - майже періодичною матрицею [2]. Таким чином, дві S^p - майже періодичні матриці $F(x)$ і $S(x)$ мають однакові ряди Фур'є. А тому на основі теореми єдиності вони співпадають майже всюди. Отже, рівність /2.2/ справедлива.

Н а с л і д о к . Якщо матричні коефіцієнти ряду Фур'є /2.1/ задовольняють умову

$$\sum_n \|A_n\|_{S^p} < \infty, \quad /2.3/$$

то наявна рівність /2.2/.

3. Теорема апроксимації для S^p - майже періодичних матриць.

Т е о р е м а 3.1. Якщо $F(x) \in S^p$ - майже періодична матриця, то для кожного $\varepsilon > 0$ можна вказати скінченний тригонометричний многочлен $P_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} C_n e^{i\lambda_n x}$, де $C_n = [C_{jk}^{(n)}]$, що виконується нерівність

$$\|F(x) - P_\varepsilon(x)\|_{S^p} < \varepsilon. \quad /3.1/$$

Д о в е д е н н я . Нехай $F(x) = [f_{jk}(x)]$ і $P_\varepsilon(x) = [P_{jk}^\varepsilon(x)]$, де $P_{jk}^\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} C_{jk}^{(n)} e^{i\lambda_n x}$, є матрицями виміру $z \times \ell$. Відомо [1], що за заданим $\varepsilon > 0$ для сукупності S^p - майже періодичних функцій $f_{jk}(x)$ з відносно щільною множиною $\frac{\varepsilon}{2\ell}$, S^p - майже періодів можна вказати такий скінченний тригонометричний многочлен $P_{jk}^\varepsilon(x)$, що

$$\|f_{jk}^p(x) - P_{jk}^\varepsilon(x)\|_{S^p} < \frac{\varepsilon}{2\ell}$$

для всіх j, k .

А тому

$$\|F(x) - P_\varepsilon(x)\|_{S^p} \leq \sum_{j,k} \|f_{jk}^p(x) - P_{jk}^\varepsilon(x)\|_{S^p} < \varepsilon.$$

Нерівність /3.1/ виконана.

З а у в а ж е н н я . Апроксимуючий многочлен $P_\varepsilon(x)$, взагалі кажучи, може містити показники, відмінні від показників Фур'є матриці $F(x)$. Однак, як випливає з [1], за Λ_n можна брати показники Фур'є матриці $F(x)$.

Т е о р е м а 3.2. Якщо $F(x) = [f_{jk}^p(x)] \in S^p$ - майже періодична матриця, то існує послідовність узагальнених тригонометричних многочленів Бохнера-Фейєра $\sigma_{B_n}^F(x) = [\sigma_{B_n}^{f_{jk}}(x)]$, де $\sigma_{B_n}^{f_{jk}}(x)$ послідовність тригонометричних многочленів Бохнера-Фейєра для кожної функції $f_{jk}(x)$, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x) - \sigma_{B_n}^F(x)\|_{S^p} = 0. \quad /3.2/$$

Це твердження доводиться також на основі аналогічної теореми для S^p - майже періодичної функції [1].

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Д е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.
2. Д і с е в и ч Л.М., К о в а л ь ч у к Б.В. Середнє значення і поняття ряду Фур'є для S^p - майже періодичних матриць. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип.10, Теоретична та прикладна математика, 1975.
3. A.Besicovitch. *Almost periodic functions* Cambridge, 1932.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ
ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(4)} + P_1(x)y'' + (P_2(x) + r(x))y' + P_3(x)y = 0 \quad /1/$$

наймає така теорема.

Т е о р е м а . Нехай у рівнянні /1/ $P_3(x)$ неперервна, а $r(x)$, $P_1(x)$ і $P_2(x) = \lambda \bar{q}^3(x) \neq 0$ неперервно диференційовні функції відносно один, два і три рази на інтервалі $x_0 \leq x < \infty$. Нехай також

$$A(x) = \bar{q}^2(x)(\mu - 5\bar{q}''(x)\bar{q}(x) + \frac{5}{2}\bar{q}'^2(x)), \quad B(x) = \lambda \bar{q}^3(x) + A'(x),$$

$$C(x) = (\nu - \frac{3}{2}\lambda \bar{q}'(x))\bar{q}^4(x) + 0,3 A''(x) + (0,3 A(x))^2,$$

$\pm \beta_1$ - дійсні корені рівняння $\beta^6 + 2\mu\beta^4 + (\mu^2 - 4\nu)\beta^2 - \lambda^2 = 0$, де μ, λ, ν - довільні сталі, причому $-\alpha_1^2 = \frac{1}{2}(\frac{\beta_1^2}{2} + \mu + \frac{\lambda}{\beta_1}) < 0$, $\alpha_2^2 = \frac{1}{2}(\frac{\beta_1^2}{2} + \mu - \frac{\lambda}{\beta_1}) > 0$.

Тоді за умови

$$\bar{q}(x) > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \bar{q}^{-1}(t) dt = \infty, \int_{x_0}^{\infty} b(t) dt < \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_i(x) \bar{q}^2(x) = 0 \quad (i=2,3,4)$$

$$\text{або } \bar{q}(x) < 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \eta(x, x_0) = -\infty, \int_{x_0}^{\infty} b(t) dt < 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_i(x) \bar{q}^2(x) = 0 \quad (i=1,2),$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \alpha, \alpha_2) &= \varphi_2(x, -\alpha_1, -\alpha_2) = -\alpha_2 [(\beta_1 - \alpha_1)^2 + \alpha_2^2] \left[\left(\frac{3}{2} \bar{q}'' \bar{q} + \frac{3}{4} \bar{q}'^2 - (\beta_1 + 2\alpha_1) \bar{q}' + \left(\frac{\beta_1}{2} + \alpha_1 \right)^2 \right) (A(x) - \right. \\ &\quad \left. - P_1(x) + \bar{q}(3\bar{q}' - \beta_1 - 2\alpha_1) \left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - P_1'(x) \right) + \bar{q}^2(C(x) + r(x) - P_3(x) - A''(x)) \right) W^{-1}; \\ \varphi_3(x) &= -2\alpha_1 \left\{ \left[\frac{3}{2} (\beta_1^2 + \frac{\lambda}{\beta_1}) (\bar{q}'' \bar{q} + \frac{1}{2} \bar{q}'^2) + \beta_1 (2\beta_1^2 + 2\mu - \frac{\lambda}{\beta_1}) \bar{q}' + \frac{1}{2} (\beta_1^4 + \mu\beta_1^2 - \lambda\beta_1 - \frac{\lambda\mu}{\beta_1} + \frac{\lambda^2}{\beta_1^2}) \right] (A(x) - \right. \\ &\quad \left. - P_1(x) + \bar{q} \left[3(\beta_1^2 + \frac{\lambda}{\beta_1}) \bar{q}' + \beta_1 (2\beta_1^2 + 2\mu - \frac{\lambda}{\beta_1}) \right] \left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - P_1'(x) \right) + (\beta_1^2 + \frac{\lambda}{\beta_1}) \bar{q}^2 (C(x) + r(x) - \right. \\ &\quad \left. - P_3(x) - A''(x)) \right) W^{-1}; \quad \varphi_4(x) = -2\alpha_2 \left\{ \left[3\beta_1 (\bar{q}'' \bar{q} + \frac{1}{2} \bar{q}'^2) - \frac{2\lambda}{\beta_1} \bar{q}' - \beta_1 (A^2 + \mu) \right] (A(x) - A(x)) + \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{q} (3\beta_1 \bar{q}' - \frac{\lambda}{\beta_1}) \left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - P_1'(x) \right) + 2\beta_1 \bar{q}^2 (C(x) + r(x) - P_3(x) - A''(x)) \right\} W^{-1}; \end{aligned}$$

$$k(x) = 4/q(x) \max [|\varphi_1(x)|, |\varphi_2(x)|, |\varphi_3(x)|, |\varphi_4(x)|], W = 2\alpha_1 \alpha_2 (2\beta_1^4 + 2\beta_2^4 + \frac{\lambda^2}{\beta_1^2}),$$

рівняння /1/ має фундаментальну систему розв'язків, асимптотичне зображення яких за $x \rightarrow \infty$ дають формули

$$y_1(x, x_0) = \vartheta^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} + \alpha_1\right) \Psi(x, x_0)\right] (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /2/$$

$$y_2(x, x_0) = \vartheta^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} - \alpha_1\right) \Psi(x, x_0)\right] (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /3/$$

$$y_3(x, x_0) = \vartheta^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[-\frac{\beta_1}{2} \Psi(x, x_0)\right] (\cos \alpha_2 \Psi(x, x_0) + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /4/$$

$$y_4(x, x_0) = \vartheta^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[-\frac{\beta_1}{2} \Psi(x, x_0)\right] (\sin \alpha_2 \Psi(x, x_0) + o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \quad /5/$$

За тих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних цієї фундаментальної системи розв'язків одержуються формальними диференціюваннями головних частин формул /2/ - /5/.

Те ж саме наявне для похідних другого і третього порядку цих розв'язків за додаткових умов

$$i \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (A(x) - P_1(x)) \vartheta^2(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (P_1'(x) - r(x)) \vartheta^3(x) = 0.$$

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. К о с т о н к о Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. - "Дифференциальные уравнения", 1974, т.10, № 10.

2. П а в л о к І.А. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Г.П.ГУВАНОВ, Б.В.КОВАЛЬЧУК

ОЦІНКА ЗАЛИШКУ ПРИ НАБЛИЖЕННІ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ
ЗМІННИХ ЗРІЗАНИМИ СЕРЕДНІМИ ВІД ПОЛІНОМІВ, ЩО НАЙЛІПШІ
У ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

Нехай $H\omega_1\omega_2$ є клас неперервних 2π - періодичних відносно кожної змінної x та y функцій $f(x,y)$, які задовольняють умову

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq \omega_1(|x_2 - x_1|) + \omega_2(|y_2 - y_1|),$$

де $\omega_1(t)$ і $\omega_2(z)$ - задані опуклі модулі неперервності.

Задається система рівновіддалених точок (x_k, y_ℓ) , де

$$x_k = \frac{k\pi}{m}, y_\ell = \frac{\ell\pi}{n}, k = \overline{1, 2m}, \ell = \overline{1, 2n}.$$

Кожній функції $f(x,y)$ з даного класу ставляться у відповідність зрізані середні арифметичні $\sigma_{mn}^{(pq)}(f; x, y)$ від тригонометричних поліномів степеня $(m-1)$ по x і степеня $(n-1)$ по y , які найліпше наближають неперервну 2π - періодичну відносно x та y функцію в заданій системі точок.

Такі суми мають вигляд

$$\sigma_{mn}^{(pq)}(f; x, y) = \frac{1}{4mn(p+1)(q+1)} \sum_{k=1}^{2m} \sum_{\ell=1}^{2n} f(x_k, y_\ell) \varphi_m^{(p)}(x, k) \varphi_n^{(q)}(y, \ell), \quad /1/$$

де

$$\varphi_r^{(s)}(t, \nu) = \sin \frac{2r-s-1}{2}(t_\nu - t) \sin \frac{s+1}{2}(t_\nu - t) \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}(t_\nu - t).$$

Позначимо через $E_{mn}^{(pq)}(H\omega_1\omega_2; x, y)$ верхню межу відхилень функції $f(x,y)$ від поліномів /1/, поширену на весь клас $H\omega_1\omega_2$, тобто

$$E_{mn}^{(pq)}(H\omega_1\omega_2; x, y) = \sup_{f \in H\omega_1\omega_2} |f(x, y) - \sigma_{mn}^{(pq)}(f; x, y)|.$$

Т е о р е м а . Для функції $f(x, y)$ класу $H_{\omega_1 \omega_2}$ справедлива асимптотична рівність

$$\begin{aligned} E_{mn}^{(pq)}(H_{\omega_1 \omega_2}; x, y) &= \frac{2}{\pi^2} |\sin mx \sin ny| \ln \frac{m}{p+1} \ln \frac{n}{q+1} \times \\ &\times \min \left[\omega_1 \left(\frac{\pi}{m} \right), \omega_2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right] + \frac{1}{\pi} |\sin mx| \ln \frac{m}{p+1} \omega_1 \left(\frac{\pi}{m} \right) + \frac{1}{\pi} |\sin ny| \ln \frac{n}{q+1} \times \\ &\times \omega_2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + O \left(|\sin mx \sin ny| \ln \frac{mn}{(p+1)(q+1)} \min \left[\omega_1 \left(\frac{\pi}{m} \right), \omega_2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right] \right) + \\ &+ O \left(|\sin mx| \omega_1 \left(\frac{\pi}{m} \right) + |\sin ny| \omega_2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

де $x \neq x_k, y \neq y_l$.

При доведенні теореми ми опираємося на деякі результати, одержані в роботах [2, 3].

З а у в а ж е н н я . У випадку $\omega_1(t) = Mt^\alpha, \omega_2(z) = Nz^\beta (\alpha < \alpha, \beta \leq 1)$ клас таких функцій позначаємо через $H_{MN}^{(\alpha, \beta)}$, де $M, N = \text{const}$.

На класі функцій $H_{MN}^{(\alpha, \beta)}$ справедлива асимптотична рівність

$$\begin{aligned} E_{mn}^{(pq)}(H_{MN}^{(\alpha, \beta)}; x, y) &= \frac{2}{\pi^2} |\sin mx \sin ny| \ln \frac{m}{p+1} \times \\ &\times \ln \frac{n}{q+1} \min \left[M \left(\frac{\pi}{m} \right)^\alpha, N \left(\frac{\pi}{n} \right)^\beta \right] + \frac{M}{\pi} |\sin mx| \ln \frac{m}{p+1} \left(\frac{\pi}{m} \right)^\alpha + \\ &+ \frac{N}{\pi} |\sin ny| \ln \frac{n}{q+1} \left(\frac{\pi}{n} \right)^\beta + O \left(|\sin mx \sin ny| \ln \frac{mn}{(p+1)(q+1)} \times \right. \\ &\times \left. \min \left[\frac{1}{m^\alpha}, \frac{1}{n^\beta} \right] \right) + O \left(\frac{|\sin mx|}{m^\alpha} + \frac{|\sin ny|}{n^\beta} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

де $x \neq x_k, y \neq y_l$.

Аналогічна оцінка при $p=q=0$ для інтерполяційних тригонометричних поліномів з рівновіддаленими вузлами інтерполяції одержана в [1].

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Г а в р и л ю к В.Г. Про наближення функцій двох змінних інтерполяційними поліномами типу сум Фур'є. - ДАН УРСР, 1973, № 4.
2. Г у б а н о в Г.П., К о в а л ь ч у к Б.В. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій двох змінних поліномами, найкращими в заданій системі точок. - ДАН УРСР, 1966, № 1.
3. Г у б а н о в Г.П., К о в а л ь ч у к Б.В. Наближення функцій двох змінних середніми сумами від поліномів, найкращих в заданій системі точок. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1965, вип. 2.

П Р И К Л А Д Н А М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.55

Г.Г.ЦЕГЕЛИК

ВІДІЛЕННЯ ВІСМУГ, ЯКІ НЕ МІСТЯТЬ НУЛІВ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Розглянемо збіжний у деякій повній трубчастій області T_B подвійний ряд Діріхле [1,5]

$$f(z, w) = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu} \exp(\alpha_{\mu} z + \beta_{\nu} w), \quad (1)$$

де

$$A_{00} \neq 0, \quad 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots \rightarrow \infty, \quad 0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu}{\alpha_{\mu}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu}{\beta_{\nu}} = 0.$$

Позначимо через M множину пар індексів (μ, ν) , для яких $A_{\mu\nu} \neq 0$; і зафіксуємо пару індексів $(k, \ell) \in M$.
Нехай $|A_{\mu\nu}| = a_{\mu\nu}$, $(\mu, \nu) \in M$ і N - множина пар індексів (μ, ℓ) , для яких $A_{\mu\ell} = 0$ і хоч би для одного індекса ν при фіксованому μ $A_{\mu\nu} \neq 0$ ($\nu \neq \ell, \mu \neq k$). Кожній парі індексів $(\mu, \ell) \in N$ ставимо у відповідність довільні додатні числа $\alpha_{\mu\ell}$ і $\beta_{\mu\ell}$.

Виберемо довільну послідовність додатних чисел /параметрів/
 $\{\gamma_{\mu\nu}\}$, яка задовольняє умову

$$\sum_{\substack{(\mu,\nu) \in M \\ (\mu,\nu) \neq (\kappa,\ell)}} \gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\kappa\ell}. \quad /2/$$

Приймемо $M \cup N = E$

$$C_{\mu\ell}(\kappa, \ell) = \left(\frac{\gamma_{\kappa\ell} \alpha_{\mu\ell}}{\gamma_{\mu\ell} \alpha_{\kappa\ell}} \right)^{\frac{1}{\alpha_{\kappa\ell} - \alpha_{\mu\ell}}}, \quad (\mu, \ell) \in E,$$

$$d_{\mu\nu}(\mu, \ell) = \left(\frac{\gamma_{\mu\ell} \alpha_{\mu\nu}}{\gamma_{\mu\nu} \alpha_{\mu\ell}} \right)^{\frac{1}{\beta_{\ell} - \beta_{\nu}}}, \quad (\mu, \nu) \in E.$$

Нехай

$$z_1 = \max_{\mu < \kappa} C_{\mu\ell}(\kappa, \ell), \quad R_1 = \inf_{\mu > \kappa} C_{\mu\ell}(\kappa, \ell),$$

$$z_2 = \max_{\nu < \ell} d_{\mu\nu}(\mu, \ell), \quad R_2 = \inf_{\nu > \ell} d_{\mu\nu}(\mu, \ell).$$

Т е о р е м а 1. Якщо при $\kappa, \ell \neq 0$ існує такий набір параметрів $\{\gamma_{\mu\nu}\}$, $(\mu, \nu) \in M$, який задовольняє умову /2/, що $R_1 > z_1, R_2 > z_2$, то ряд Діріхле /1/ не перетворюється в нуль у бісмузі

$$\{\ln z_1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \ln R_1, \ln z_2 \leq \operatorname{Re}(w) \leq \ln R_2\}.$$

Т е о р е м а 2. Якщо $\kappa = \ell = 0$, то завжди можна вибрати такий набір параметрів $\{\gamma_{\mu\nu}\}$, $(\mu, \nu) \in M$, який задовольняє умову /2/, при якому ряд Діріхле /1/ не перетворюється в нуль в області

$$\{-\infty < \operatorname{Re}(z) < \ln R_1, -\infty < \operatorname{Re}(w) < \ln R_2\}.$$

Методика доведення теорем аналогічна як у [2,3].

При $\kappa = 0, \ell \neq 0$ і $\kappa \neq 0, \ell = 0$ теорема 1 залишається справедливою, однак у першому випадку смуга $\ln z_1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \ln R_1$ заміниться півплощиною $-\infty < \operatorname{Re}(z) < \ln R_1$, а в другому випадку смуга $\ln z_2 \leq \operatorname{Re}(w) \leq \ln R_2$ заміниться півплощиною $-\infty < \operatorname{Re}(w) < \ln R_2$.

Слід зауважити, що вперше аналогічні теореми для подвійних рядів Діріхле розглядались в [4]. Для їх знаходження використовували апарат мажорант і діаграм Ньютона.

Якщо розглядати поліном Діріхле від двох комплексних змінних, то теорема 1 для нього залишається справедливою. Однак у випадку поліному Діріхле завжди можна виділити від двох до восьми "максимальних" областей, в яких цей поліном не перетворюється в нуль.

П р и к л а д 1. Нехай

$$f(z, w) = \sum_{\mu, \nu=0}^2 A_{\mu\nu} \exp(\alpha_\mu z + \beta_\nu w),$$

$$\text{де } |A_{00}| = |A_{20}| = |A_{02}| = |A_{22}| = 0,5, \quad |A_{10}| = |A_{01}| = |A_{21}| = |A_{12}| = 1,$$

$$|A_{11}| = 16, \quad \alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0,5, \quad \alpha_2 = \beta_2 = 1.$$

Покладемо $k = l = 1$, $\gamma_{00} = \gamma_{10} = \gamma_{20} = \gamma_{01} = \gamma_{21} = \gamma_{02} = \gamma_{12} = \gamma_{22} = 1/8$, $\gamma_{11} = 1$. Тоді на основі теореми 1 одержуємо, що $f(z, w)$ не перетворюється в нуль у бісмузі

$$\{-2 \ln 2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \ln 2, \quad -2 \ln 2 \leq \operatorname{Re}(w) \leq 2 \ln 2\}.$$

П р и к л а д 2. Нехай

$$f(z, w) = \sum_{\mu, \nu=0}^1 A_{\mu\nu} \exp(\alpha_\mu z + \beta_\nu w),$$

$$\text{де } |A_{\mu\nu}| = 1, \quad (\mu, \nu) = (0, 1), \quad \alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 1.$$

Покладемо $\gamma_{kl} = 1$, $\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{3}$, $(\mu, \nu) \neq (k, l)$. Тоді при рівних $k \neq l$ одержуємо, що $f(z, w)$ не перетворюється в нуль в областях

$$\{-\infty < \operatorname{Re}(z) < -\ln 3, \quad -\infty < \operatorname{Re}(w) < -\ln 3\},$$

$$\{\ln 3 < \operatorname{Re}(z) < \infty, \quad -\infty < \operatorname{Re}(w) < -\ln 3\},$$

$$\{-\infty < \operatorname{Re}(z) < -\ln 3, \quad \ln 3 < \operatorname{Re}(w) < \infty\},$$

$$\{\ln 3 < \operatorname{Re}(z) < \infty, \quad \ln 3 < \operatorname{Re}(w) < \infty\}.$$

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Г р о м о в В.П. Кратные ряды полиномов Дирихле. - "Сибирский математический журнал", 1969, X, № 3.
2. К о с т о в с к и й А.Н., Ц е г о л и к Г.Г. О локализации решений системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными с помощью параметров. - "Вычислительная и прикладная математика", 1969, вып. 7.
3. Ц е г е л и к Г.Г. Виділення смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле не перетворюються в нуль. - "Вісник Львівського ун-ту, сер. механіко-математична", 1972, вип. 7.
4. Ч у л ь к и й Л.М. Асимптотические свойства мажоранты и диаграммы Ньютона функций двух комплексных переменных и их приложения. Автореф. канд. дисс. Львов, 1972.
5. Artemiades Nicolas. Sur les séries de Dirichlet à deux variables. - "Bull. sci. math.", 1953, 77, mars-avril.

УДК 519.21

І.Д.КВІТ

ПРИСКОРЕНА ЗМІНА ВІДБИТТЯ

1. В і д б и т т я д о д а т н о з н а ч н о ї в и п а д -
к о в о ї з м і н н о ї. Нехай додатнозначна випадкова змінна
 ξ має функцію розподілу

$$F(t), t > 0; F(0) = 0; \int_0^{\infty} dF(t) = 1. \quad /1/$$

З обмеженості інтеграла /1/ випливає існування таких додатних
сталих α та β , що мелінове інтегрально перетворення

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} dF(t), (z = x + iy, i = \sqrt{-1}), \quad /2/$$

абсолютно збігається в смугі

$$1 - \alpha < x < 1 + \beta, (\alpha > 0, \beta > 0), \quad /3/$$

паралельній до осі ординат. Перетворення /2/ назовемо в і д б и т -

т я м додатнозначної випадкової змінної ξ з функцією розподілу /1/. Відбиття /2/ є аналітичною функцією принаймні в смузі /3/. Наведемо декілька прикладів додатнозначних випадкових змінних та їх відбить:

Додатнозначна випадкова змінна, ξ	Функція розподілу, $f(t)$	Відбиття, $\varphi(z)$
1	2	3
Мономна	$\begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^\alpha, & 0 \leq t < 1, \alpha > 0, \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$	$\frac{\alpha}{z + \alpha - 1}, 1 - \alpha < \operatorname{Re} z$ /4/
Модуль змінної Коші	$\begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} t, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sin \frac{\pi z}{2}}, 0 < \operatorname{Re} z < 2$ /5/
Експонентна	$\begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$	$\Gamma(z), 0 < \operatorname{Re} z$ /6/
Бета-один-/1, α /	$\begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - (1-t)^\alpha, & 0 \leq t < 1, \alpha > 0, \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$	$\alpha B(z, \alpha), 0 < \operatorname{Re} z$ /7/
Дискретний фактор бозонів *	$\begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\kappa+1) \zeta(\kappa+1)}, & \alpha > 0, \\ \frac{1}{\kappa+1} \leq t < \frac{1}{\kappa}, (\kappa=1, 2, \dots), \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$	$\frac{\zeta(z+\alpha)}{\zeta(\alpha+1)}, 1 - \alpha < \operatorname{Re} z$ /8/

2. Прискорено змінні функції I. Нехай функція $f(x)$ буде задана та неперервна на інтервалі (a, b) . Для кожних двох точок x_1, x_2 цього інтервалу $a < x_1 < x_2 < b$ знайдемо добуток значень функції у цих точках $f(x_1) f(x_2)$ та квадрат функції в середньому з цих точок $f^2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. Будемо вважати, що функція $f(x)$ прискорено змінюється на

(a, b) , якщо виконується функціональна нерівність

$$f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_1)f(x_2), \quad a < x_1 < x_2 < b. \quad /9/$$

Коли заходить протилежна нерівність, то $f(x)$ сповільнено змінюється; при знаковій рівності $f(x)$ рівномірно змінюється. Наприклад, функція $f(x) = x^{-\alpha}$, $(\alpha > 0)$, прискорено змінюється на додатній півосі $x > 0$; функція $f(x) = a^x$, $(a > 0)$ рівномірно змінюється на всій осі $-\infty < x < \infty$; функція $f(x) = x^\alpha$, $(\alpha > 0)$ сповільнено змінюється на додатній півосі $x > 0$.

З означення /9/ випливають наступні властивості:

1. Сума та добуток прискорено змінних функцій є прискорено змінна функція.
2. Прискорено змінна в деякому інтервалі функція після лінійного перетворення її аргументу залишається прискорено змінною у відповідному інтервалі.
3. **Т е о р е м а .** Для того щоб неперервна в смузі $1-\alpha < x < 1+\beta$, $(\alpha > 0, \beta > 0)$ функція $\varphi(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$, для якої $\varphi(1) = 1$, була відбиттям додатнозначної випадкової змінної ξ , необхідно та досить, щоб $\varphi(x)$ прискорено змінювалася на інтервалі $(1-\alpha, 1+\beta)$.

Н е о б х і д н і с т ь . Нехай додатнозначна випадкова змінна ξ має функцію розподілу /1/ та відбиття /2/ в смузі /3/. Очевидно, що відбиття /2/ в смузі /3/ є неперервна функція та при $z = 1$ приймає значення 1, $\varphi(1) = 1$. Покажемо, що $\varphi(x)$ прискорено змінюється на інтервалі $(1-\alpha, 1+\beta)$.

Справді, при довільних дійсних u та v , які неодноразово дорівнюють нулю, для функції розподілу /1/ маємо строгу нерівність

$$\int_0^\infty \left\{ u t^{\frac{x_1-1}{2}} + v t^{\frac{x_2-1}{2}} \right\}^2 dF(t) > 0, \quad 1-\alpha < x_1 < x_2 < 1+\beta. \quad /10/$$

У термінах відбиття /2/ нерівність /10/ набуває вигляду

$$u^2 \varphi(x_1) + 2uv \varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + v^2 \varphi(x_2) > 0, \quad 1-\alpha < x_1 < x_2 < 1+\beta. \quad /11/$$

Із додатної означеності останньої квадратичної форми випливає нерівність

$$\varphi^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \varphi(x_1)\varphi(x_2), \quad 1-\alpha < x_1 < x_2 < 1+\beta, \quad /12/$$

що за означенням /9/ характеризує прискорену зміну функції $\varphi(x)$ на інтервалі $(1-\alpha, 1+\beta)$.

Д о с т а т н і с т ь . Нехай неперервна в смузі $1-\alpha < \operatorname{Re} z < 1+\beta$ функція $\varphi(z)$, для якої $\varphi(1) = 1$, задовольняє функціональну нерівність /12/. Тоді $\varphi(z)$ є відбиттям деякої додатнозначної випадкової змінної ξ .

Дійсно, нерівності /12/ відповідає додатно означена квадратична форма /11/, де u та v - довільні дійсні числа, які неодноразово дорівнюють нулю. Хай у квадратичній формі /11/ $u=0, v=1, x_2=x$, де $1-\alpha < x < 1+\beta$. Тоді одержимо нерівність

$$\varphi(x) > 0.$$

Отже, функція $\varphi(x)$ неперервна та додатна на інтервалі $1-\alpha < x < 1+\beta$. Можемо вважати, що $\varphi(x)$ представляє момент маси порядку $x-1$ при кожному x з інтервалу $(1-\alpha, 1+\beta)$. Такий момент можна зобразити за допомогою інтеграла Стільт'єса у вигляді /порівн. [1] /

$$\varphi(x) = \int_0^\infty t^{x-1} dF(t),$$

де $F(t)$ - функція розподілу маси /неспадна функція, неперервна справа та $F(0)=0$ /. Оскільки за умовою $\varphi(1)=1$, то $\int_0^\infty dF(t) = 1$. Таким чином, $F(t)$ - функція розподілу ймовірностей деякої додатнозначної випадкової змінної ξ і отже, $\varphi(z)$ її відбиття.

Доведена теорема свідчить про те, що множина відбить додатно-значних випадкових змінних еквівалентна класові функцій, що прискорено змінюються в околі одиниці та набувають значення один у точці один. Функціональна нерівність /12/ переходить для кожного відбиття /2/ у конкретну нерівність. Наприклад, відбиття /5/, /7/ і /8/ та функціональна нерівність /12/ дають змогу записати такі нерівності:

для функції синус

$$\sin \frac{\pi x_1}{2}, \sin \frac{\pi x_2}{2} < \sin^2 \frac{\pi(x_1+x_2)}{4}, \quad 0 < x_1 < x_2 < 2;$$

для функції бета, як функції першого аргументу

$$B^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}, d\right) < B(x_1, d) B(x_2, d), \quad 0 < x_1 < x_2;$$

для дзета-функції Рімана

$$\zeta^2\left(\frac{x_1+x_2}{2} + d\right) < \zeta(x_1 + d) \zeta(x_2 + d), \quad 1-d < x_1 < x_2.$$

Отже, всі ці функції прискорено змінюються на вказаних інтервалах.

4. Н а с л і д к и . 1/ Якщо додатнозначна випадкова змінна має початкові моменти

$$m_j = \int_0^\infty t^j dF(t), \quad (j=1, 2, \dots), \quad /13/$$

то вони задовольняють нерівність

$$m_1 < m_2^{\frac{1}{2}} < m_3^{\frac{1}{3}} < m_4^{\frac{1}{4}} < \dots \quad /14/$$

Справді, хай у нерівності /12/ $x_1 = j$, $x_2 = j+2$. Тоді дістаємо нерівність

$$\varphi^2(j+1) < \varphi(j) \varphi(j+2).$$

Піднесемо останню нерівність до j -го степеня,

$$\varphi^{2j}(j+1) < \varphi^j(j) \varphi^j(j+2),$$

і приймемо в результаті послідовно $j=1, 2, \dots, j$. Перемножимо сторонами всі так одержані j нерівностей. Одержимо нерівність

$$\varphi^{2j}(j+1) < \varphi^{j-1}(j+1) \varphi^j(j+2),$$

або остаточно

$$\varphi_j^{\frac{1}{j}}(j+1) < \varphi_j^{\frac{1}{j+1}}(j+2), \quad (j=1,2,\dots). \quad /15/$$

Оскільки з порівняння /13/ і /2/ маємо

$$m_j = \varphi(j+1), \quad (j=1,2,\dots),$$

то нерівність /15/ переходить у нерівність

$$m_j^{\frac{1}{j}} < m_{j+1}^{\frac{1}{j+1}}, \quad (j=1,2,\dots), \quad /16/$$

тобто, в нерівність /14/. Наприклад, для експонентного розподілу /6/ властивість початкових моментів /16/ набуває вигляду

$$\sqrt[j]{j!} < \sqrt[j+1]{(j+1)!}, \quad (j=1,2,\dots).$$

Із прискореної зміни /12/ відбиття /2/ на інтервалі /3/ випливає логарифмічна випуклість функції $\varphi(x)$ на інтервалі /3/.

Дійсно, хай у /12/ $x_1 = x, x_2 = x + 2\Delta, \Delta > 0$. Тоді одержуємо нерівність

$$\varphi^2(x+\Delta) < \varphi(x)\varphi(x+2\Delta).$$

Додамо до обидвох сторін останньої нерівності вираз

$$-2\varphi(x+\Delta)\varphi(x) + \varphi^2(x)$$

і результат поділимо на Δ^2 . Дістаємо нерівність

$$\left[\frac{\varphi(x+\Delta) - \varphi(x)}{\Delta} \right]^2 < \varphi(x) \frac{\varphi(x+2\Delta) - 2\varphi(x+\Delta) + \varphi(x)}{\Delta^2}.$$

Звідси при $\Delta \rightarrow 0$ формально маємо нерівність

$$[\varphi'(x)]^2 \leq \varphi(x)\varphi''(x), \quad /17/$$

яка разом з нерівністю $\varphi(x) > 0$ характеризує логарифмічну випуклість відбиття /2/ на інтервалі /3/. Існування похідних, що виступають у нерівності /17/, впливає з аналітичності відбиття /2/ в смузі /3/. Відбиття /6/, /7/ і /8/ та функціональна нерівність /17/ дають змогу записати відповідні нерівності для гама-, бета- і дзета-функції.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. К в і т І.Д. Характеристичні функції. Вид-во Львів.ун-ту, 1972.

ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо рівняння

$$P(x) = 0, \quad /1/$$

де P - оператор, що діє з банахового простору X в простір Y того ж типу. Для розв'язування рівняння /1/ розглянемо однокроковий метод, коли послідовність $\{x_n\}$ визначена за формулою

$$x_{n+1} = x_n - Q(x_n), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad /2/$$

де $Q(x)$ - деякий оператор, що діє з X в X .

Т е о р е м а 1. Нехай $x_0 \in X$, $S = \{x: \|x - x_0\| \leq \rho\}$ і на S виконуються умови

1. Оператор $P(x)$ диференційовний по Фреше;
2. Похідна $P'(x)$ задовольняє умову Гельдера

$$\|P'(x) - P'(y)\| \leq L \|x - y\|^\alpha, \quad \alpha \leq 1;$$

$$3. \|P(x) - P'(x) Q(x)\| \leq \gamma \|P(x)\|, \quad \gamma < 1;$$

$$4. \|Q(x)\| \leq \lambda \|P(x)\|;$$

$$5. \gamma + \frac{L\lambda^2}{1+\alpha} \|P(x_0)\|^\alpha < 1.$$

Тоді рівняння /1/ має в S розв'язок x^* , до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за /2/, причому для $k \leq m$, де m визначається в умови

$$\gamma_1 \|P(x_m)\|^\alpha < \gamma \leq \gamma_1 \|P(x_{m-1})\|^\alpha,$$

$$\|x_k - x^*\| \leq \left(\sum_{i=k}^m \delta_i^{\frac{(1+\alpha)^i - 1}{\alpha}} + \delta_i^{\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}} \frac{\delta_i}{1 - \delta_i} \right) \lambda \|P(x_0)\|, \quad /3/$$

а для $k > m$

$$\|x_k - x^*\| \leq \lambda \frac{\delta_i}{1 - \delta_i} \delta_i^{\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}} \|P(x_0)\|, \quad /4/$$

де

$$\delta_i = \left(\gamma_i + \frac{L\lambda^2}{1+\alpha} \right) \|P(x_0)\|^\alpha, \quad \delta_i = \gamma + \frac{L\lambda^2}{1+\alpha} \|P(x_m)\|^\alpha.$$

Д о в е д е н н я . Використавши формулу [2]

$$P(x_{n+1}) = P(x_n) + \int_0^1 P'(x_n + t(x_{n+1} - x_n))(x_{n+1} - x_n) dt$$

і умови теореми, одержимо

$$\|P(x_{n+1})\| \leq (\gamma + \frac{\lambda \lambda^2}{1+\lambda} \|P(x_n)\|^{\lambda}) \|P(x_n)\| \quad /5/$$

або

$$\|P(x_{n+1})\| \leq \begin{cases} (\gamma + \frac{\lambda \lambda^2}{1+\lambda} \|P(x_n)\|^{\lambda})^{\lambda+1} & n < m, \\ (\gamma + \frac{\lambda \lambda^2}{1+\lambda} \|P(x_n)\|^{\lambda}) \|P(x_n)\| & n \geq m. \end{cases} \quad /6/$$

З /2/, використовувачи умову 4 теореми 1 і оцінку /6/, одержує-

мо

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \begin{cases} \lambda \delta^{\frac{(1+\lambda)^n - 1}{\lambda}} \|P(x_0)\| & n < m, \\ \lambda \delta^{\frac{(1+\lambda)^m - 1}{\lambda}} \delta_1^{n-m} \|P(x_0)\| & n \geq m, \end{cases} \quad /7/$$

для $\rho > 0$, $n > m$ наявна оцінка

$$\|x_{n+\rho} - x_n\| \leq \lambda \delta^{\frac{(1+\lambda)^m - 1}{\lambda}} \delta_1^{n-m} (1 - \delta_1^{\rho}) \|P(x_0)\|.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна, існує $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, причому $P(x^*) = 0$. З /7/ можна показати справедливості оцінок /3/, /4/, а також умову, що всі $x_n \in S$ і $x^* \in S$.

Теорема доведена.

Введемо позначення $\sum_{i=n}^{\infty} \delta^{\frac{(1+\lambda)^i - 1}{\lambda}} = H_n^{\lambda}(\delta)$.

Т е о р е м а 2. Нехай $x_0 \in X$, $S = \{x: \|x - x_0\| \leq \rho\}$ і на S

виконуються умови:

1. умови 1-2 теореми 1;
2. $\|P(x) - P'(x) Q(x)\| \leq \gamma \|P(x)\|^{1+\lambda}$;
3. $\|Q(x)\| \leq \lambda \|P(x)\|$;
4. $\delta = (\gamma + \frac{\lambda \lambda^2}{1+\lambda}) \|P(x_0)\|^{\lambda} < 1$.

Тоді рівняння /1/ має в S ($\rho = \lambda H_0^{\lambda}(\delta) \|P(x_0)\|$) розв'язок x^* , до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за формулою /2/.

причому

$$\|x_n - x^*\| \leq \lambda H_n^d(\delta) \|P(x_0)\|. \quad /8/$$

Доведення аналогічне доведенню теореми .

П р и м і т к а 1. Доведені теореми є підсиленням раніше відомих результатів про збіжність методів типу /2/, а також теорема 1 підсилює теорему 1 з [4] .

П р и м і т к а 2. Теорем 1,2 можна розглядати як твердження про стійкість методу /2/. Дані теореми дають можливість визначити допустиму похибку обчислення $Q(x)$ на кожному кроці ітерації при умові збереження максимально можливого порядку збіжності.

Розглянемо збурений аналог методу /2/, який запишемо так:

$$x_{n+1} = x_n - Q(x_n) - V(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad /9/$$

Т е о р е м а 3. Нехай $x_0 \in X$, $S = \{x : \|x - x_0\| \leq \rho\}$ на S виконуються умови:

1. умови 1-3 теореми 2;
2. $\|V(x)\| \leq f_2 \|P(x)\|$, $\|P'(x)V(x)\| \leq f_1 \|P(x)\|^{1+d}$;
3. $\delta = (f + f_1 + \frac{L(\lambda + f_2)^2}{1+d}) \|P(x_0)\|^d < 1$.

Тоді рівняння /1/ має в S ($\rho = \lambda H_0^d(\delta) \|P(x_0)\|$) розв'язок x^* , до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, одержана за /9/, причому

$$\|x_n - x^*\| \leq \lambda H_n^d(\delta) \|P(x_0)\|.$$

П р и м і т к а 3. Теорема 3 дає можливість розглядати методи типу Ньютона-Канторовича /різницький аналог, Стефенса, запропонований В.А.Курчатовим [3] й інші/ другого та нижчого порядку збіжності як збурення методу Ньютона - Канторовича [1].

П р и м і т к а 4. Аналогічні теореми мають місце при виконанні умов

$$\begin{aligned} \|P(x) - P'(x)Q(x)\| &\leq f \|P(x)\|, \\ \delta = f + f_1 + \frac{L(\lambda + f_2)^2}{1+d} \|P(x_0)\|^d &< 1. \end{aligned}$$

При використанні методів /2/ можливі випадки, коли в точці x_0 умова 4 теореми 2 не виконується, тобто має місце нерівність $(\gamma + \frac{L\lambda^2}{1+d}) \|P(x_0)\|^d > 1$. У таких випадках послідовність $\{x_n\}$ розбіжна. Розглянемо модифікацію формули /2/, а саме

$$x_{n+1} = x_n - \nu_n Q(x_n) \quad n=0,1,2,\dots \quad /10/$$

і виберемо ν_n таким, щоб послідовність $\{x_n\}$, одержана за /10/, збігалася.

У нашому випадку ν_n залежить від номера ітерації і ми вибератимемо його з умови

$$\nu_n = \begin{cases} \frac{1 - (\gamma + \frac{L\lambda^2}{1+d}) \|P(x_n)\|^d}{2L\lambda^2 \|P(x_n)\|^d} (1+d) & \text{якщо } \frac{L\lambda^2 \|P(x_n)\|^d}{1+d} + \gamma \|P(x_n)\|^d > 1 \\ 1 & \text{якщо } \frac{L\lambda^2 \|P(x_n)\|^d}{1+d} + \gamma \|P(x_n)\|^d \leq 1. \end{cases} \quad /11/$$

Т е о р е м а 4. Нехай $x_0 \in X$, $S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \rho\}$ і на

S виконуються умови 1-3 теореми 2, $\gamma \|P(x_0)\|^d < 1$.

Тоді рівняння /1/ має в S ($\rho = (\sum_{i=0}^p \delta^i + \delta^p H_0^d(\delta_i)) \lambda \|P(x_0)\|$) розв'язок x^* , до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, одержана за формулою /10/, /11/, причому для $k \leq p$

$$\|x_k - x^*\| \leq (\sum_{i=k}^p \delta^i + \delta^p H_0^d(\delta_i)) \lambda \|P(x_0)\|,$$

а для $k > p$

$$\|x_k - x^*\| \leq \delta^p H_{k-p}^d(\delta_i) \lambda \|P(x_0)\|,$$

де ρ визначається з умови

$$\nu_\rho < 1, \quad \nu_{\rho+i} = 1 \quad i > 0,$$

а

$$\delta = 1 - \frac{(1 - (\gamma + \frac{L\lambda^2}{1+d}) \|P(x_0)\|^d)^2}{4L\lambda^2 \|P(x_0)\|^d} (1+d), \quad \delta_i = (\gamma + \frac{L\lambda^2}{1+d}) \|P(x_i)\|^d.$$

П р и м і т к а 5. Теорема 4 дає практичні рекомендації для знаходження розв'язку /1/ у випадку поганого початкового наближення.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Канторович Л.В. О методе Ньютона. - "Труды Института математики АН СССР", 1949, вып.28.
2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., "Наука", 1969.
3. Курчатова В.А. Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений. - ДАН СССР, 1971, 198, № 3.
4. Поляк Б.Т. Градиентные методы решения уравнений и неравенств. - "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1964, 4, № 6.

УДК 517.9

Г.Т.ДУДИКЕВИЧ

РОЗРАХУНОК ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ

ЕЛЕКТРОДІВ БЛОЧНИМ МЕТОДОМ ВЕРХНЬОЇ РЕЛАКСАЦІЇ

Для розрахунку полів системи просторових електродів з осьо-
вою симетрією чисельними методами знаходження розв'язку зводиться
до системи лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку, що
утруднює застосування точних методів. У цьому випадку використо-
вуються наближені ітераційні методи, які ґрунтуються на повторному
застосуванні простого алгоритму, і початкове наближення уточнюєть-
ся на кожному наступному кроці.

1. Нехай потрібно знайти розв'язок рівняння Лапласа в циліндричній
системі координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad /1/$$

в осесиметричній області із заданими значеннями потенціалів на
електродах електронно-оптичних систем.

На осі Ox /при $z = 0$ / рівняння /1/ набуває вигляду

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad /2/$$

Апроксимуючи рівняння /1/, /2/ кінцеворізнцевими аналогами з точністю $O(h^2)$, де h - крок сітки, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + (1 + \frac{h}{2\tau_j}) u_{i,j+1} + (1 - \frac{h}{2\tau_j}) u_{i,j-1} - 4u_{i,j}] &= q_j, \\ \frac{1}{h^2} [u_{i+1,1} + u_{i-1,1} + 4u_{i,2} - 6u_{i,1}] &= 0. \end{aligned} \quad /4/$$

2. Для розв'язування цієї системи рівнянь високого порядку застосовується метод верхньої релаксації по лініях. Спочатку на $/k+1/-$ й ітерації $/k=0,1,2,\dots/$ методом прогонки 2 визначають проміжні значення $u^{(k+1)}$ із системи

$$\begin{aligned} u_{i+1,j}^{(k+1)} - 4u_{i,j}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + (1 + \frac{h}{2\tau_j}) u_{i,j+1}^{(k)} + (1 - \frac{h}{2\tau_j}) u_{i,j-1}^{(k+1)} &= 0, \\ u_{i+1,1}^{(k+1)} - 6u_{i,1}^{(k+1)} + u_{i-1,1}^{(k+1)} + 4u_{i,2}^{(k)} &= 0 \quad (i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,N), \end{aligned}$$

а потім обчислюють значення $u_{i,j}^{(k+1)}$ за формулою

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \omega (u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}). \quad /5/$$

Причому цикл по вузлах ведеться послідовно вздовж стрічок зліва направо від нижньої стрічки до верхньої, а ω - оптимальний параметр релаксації, який обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 1 \quad \text{при } k \leq N_1, \\ \omega_{k+1} &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{(\lambda_M + \omega_k - 1)^2}{\lambda_{M_1} \cdot \omega_k^2}}}, \end{aligned} \quad /6/$$

де λ_M - максимальне власне число матриці ітераційного процесу.

Для визначення λ_M спочатку перші ітерації проводяться зі значенням $\omega_0 = 1$, а потім обчислюються величини

$$\lambda_k = \frac{\sum_{i,j} |u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}|}{\sum_{i,j} |u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k-1)}|}$$

до задоволення нерівності

$$\left| \frac{\lambda_i^{(k)}}{\lambda_i^{(k-1)}} - 1 \right| \leq \epsilon_1,$$

де ϵ_1 - мала задана величина /приблизно 10^{-2} - 10^{-3} /.

Приймаючи $\lambda_{M_1} = \lambda_i^{(k)}$, за /6/ визначається наближене значення оптимального параметра релаксації $\omega_k = \omega_{opt}$. Дана методика дає змогу визначити ω_{opt} із заданою точністю ϵ_1 в 4-6 раз швидше, ніж методом підбору.

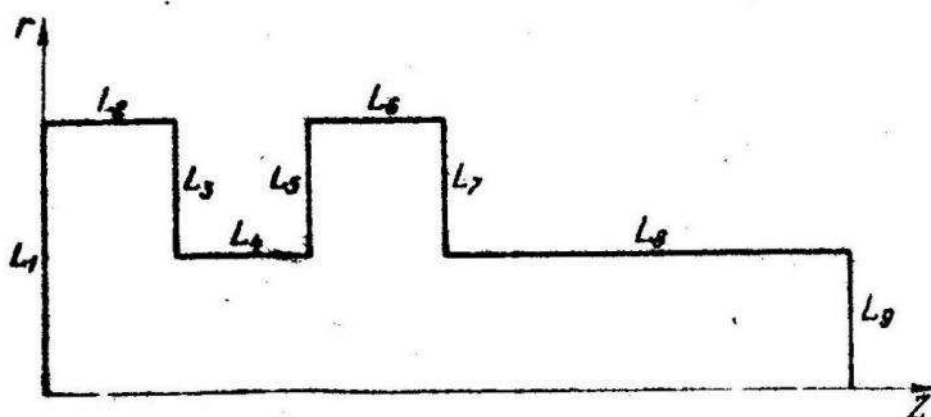
Далі за формулою /5/ обчислюються значення $u_{i,j}^{(k)}$ аж до задоволення нерівності

$$\frac{|u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}|}{\max\{|u_{i,j}^{(k+1)}|, |u_{i,j}^{(k)}|\}} \leq \epsilon,$$

де ϵ - мала задана величина порядку 10^{-7} - 10^{-8} .

3. Даню методикю розв'язувались три контрольні задачі:

- 1/ прямокутник розмірами 8 x 3,5 з кроком $h = 0.5$ і з граничними умовами: на лівій стороні потенціал дорівнює 1, на правій - 0, на верхній потенціал змінюється за лінійним законом від 1 до 0;
- 2/ ця ж область і граничні умови, тільки $h = 0,25$;
- 3/ тріод /див. рисунок/ із відповідними значеннями потенціалів



на границі:

на $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 = 0$,

на $L_7, L_8, L_9 = 1$, на L_6 — лінійний розподіл

від 0 до 1.

У таблиці наведено результати розрахунків цих трьох задач блочним методом верхньої релаксації, методом верхньої релаксації по точках [1] і методом змінних напрямків [1], які підтверджують ефективність блочного методу.

Результати розрахунків контрольних задач.

Задача	Метод	Кількість ітерацій	Час рахунку й ітерації, с	Загальний час рахунку, с
1	МВР по лініях	18	0,8	15
	МВР по точках	53	0,4	21,2
	Метод змінних напрямків	57	1,5	85,5
2	МВР по лініях	40	2,5	100
	МВР по точках	78	1,6	124
	Метод змінних напрямків	31	6,2	192
3	МВР по лініях	29	8	232
	МВР по точках	134	5,5	737
	Метод змінних напрямків	230	8	1840

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. И д ь и н В.П. Разностные методы решения эллиптических уравнений. Новосибирск, 1970.
2. Ш а м а н с к и й В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. II. Киев, "Наукова думка", 1966.

УДК 518:517:948

Ю.М. ЦЕРВИНА

ЗБУРЕНИЙ АНАЛОГ МЕТОДУ ДОТИЧНИХ ГІПЕРБОЛ

При практичній реалізації чисельних методів аналізу [2] та теорії оптимального керування [6] нерідко зустрічається задача розв'язування системи нелінійних рівнянь

$$P(x) = 0, \quad /1/$$

де $P(x)$ - достатньо гладка вектор-функція векторного аргументу x в N компонентами $p_i(x) / i = 1, 2, \dots, N /$

Для розв'язування задачі /1/ можна використати один із методів типу Ньютона [1, 3, 6], наприклад, метод дотичних гіпербол [8]. При дослідженні цих методів доведені теореми про умови збіжності й одержані оцінки швидкості збіжності. Останні, по суті, є оцінками похибки методів при умові, що всі необхідні обчислення виконуються точно.

Проте при вивченні вказаних алгоритмів недостатня увага приділялась обчислювальним аспектам. Зокрема, не враховувались похибки, які супроводжують на кожному кроці процес розв'язування однієї чи декількох лінійних систем [7], не розглядалось питання стійкості /в певному розумінні/ цих методів, а також не досліджувалась ефективність застосування алгоритмів типу Ньютона при грубих початкових наближеннях.

Метод дотичних гіпербол визначається послідовністю рекурентних співвідношень

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n) - \frac{1}{2}P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)]^{-1} P(x_n), \quad /2/$$

де $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Розв'язуючи на ЕОМ лінійних систем, що випливають з /2/, одержуємо розв'язок з деякою похибкою. Тому що наближений розв'язок лінійної системи є еквівалентним точному розв'язку цієї ж системи з дещо зміненою матрицею [7], процес /2/ можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = x_n - \{P'(x_n) - \frac{1}{2}P''(x_n)[P'(x_n) - \tilde{V}_n]^{-1} P(x_n) - V_n\}^{-1} P(x_n), \quad /3/$$

де $\{\tilde{V}_n\}$ і $\{V_n\}$ - послідовності квадратних матриць порядку N з достатньо малих норм.

Алгоритм /3/ називатимемо збуреним аналогом методу дотичних гіпербол. Перейдемо до обґрунтування його збіжності. Теорему сформулюємо для випадку, коли P - двічі диференційовний за Фреше оператор, що діє із банахового простору X у банахів простір Y , а $\{\tilde{V}_n\}$ і $\{V_n\}$ - послідовності операторів, що належать простору $\mathcal{L}(X, Y)$, тобто розглянемо більш широкий клас задач.

Т е о р е м а . Нехай виконуються умови:

1/ для початкового наближення x_0 існує оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, причому $\|\Gamma_0\| \leq B_0$;

2/ $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$;

3/ в області $\Omega_0 = \{x : \|x - x_0\| \leq \eta_0 / [(1 - q_0)(1 - s_0^{1/4})]\}$

$\|P''(x)\| \leq M$ і $P''(x)$ задовольняє умову Гельдера

$$\|P''(x) - P''(x')\| \leq L \|x - x'\|^d;$$

$$4/ \tilde{h}_0 = z_0 \eta_0 < 1, \text{ до } z_0^{t+t} = \max \left\{ 1, \left(\frac{B_0 M^2}{1 - q_0} \right)^2 \right\};$$

$$5/ q_0 = \frac{B_0 M}{2(1 - B_0 \tilde{C}_0)} \eta_0 + B_0 C_0 < 1,$$

$$\text{до } B_0 \tilde{C}_0 < 1, \tilde{C}_{n+1} \leq (1 - \tilde{h}_n) \tilde{C}_n, C_{n+1} \leq (1 - h_n) C_n,$$

$$\| \tilde{V}_n \| \leq \tilde{C}_n, \| V_n \| \leq C_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$6/ S_0^{t+t} \cdot L_0^{t+t} h_0^{t+t} / (1 - h_0)^2 < 1,$$

$$\text{до } L_0^{t+t} = \max \{ 1, m_0 \},$$

$$r_0 = \frac{1}{(1 - h_0)(1 - q_0)} \left[\frac{L}{6 B_0 M^2 (1 - q_0)^{t+t}} + \frac{\tilde{K}}{2 M (1 - B_0 \tilde{C}_0)} + \right. \\ \left. + \frac{K}{B_0 M^2} + \frac{1}{4(1 - q_0)} \left(1 + \frac{B_0 K}{1 - B_0 \tilde{C}_0} \eta_0^t + \frac{2K}{M} \eta_0 \right) \right],$$

$$\tilde{K} \geq \| \tilde{V}_n \| \eta_n^{-\gamma(n)}, \quad K \geq \| V_n \| \eta_n^{-1 - \beta(n)},$$

$$0 < t \leq L, \beta(n), \gamma(n) \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді рівняння /1/ має в області Ω_0 розв'язок x^* , до якого збігається послідовність наближень процесу /3/, причому

$$\| x^* - x_n \| \leq (1 - h_0)^{2n} S_0^{K(n)-1} \frac{\eta_0}{(1 - q_0)(1 - S_0^{t+t})},$$

$$\text{до } f(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0 \\ \prod_{i=0}^{n-1} (2 + \min \{ L, \beta(i), \gamma(i) \}) & \text{при } n \geq 1. \end{cases}$$

Д о в е д е н н я . здійснюється за схемою Л.В.Канторовича [3] .

Відзначимо, що аналогічну теорему можна сформулювати і для інших методів типу Ньютона [1, 3, 8] .

Метод дотичних гіпербол є стійким в тому розумінні, що похибки, якщо вони не дуже великі, не можуть порушити його збіжності. Більше того, вони навіть не змінять порядку збіжності, якщо виконуються умови $|\tilde{V}_n| \leq \tilde{K}\eta_n$, $|V_n| \leq K\eta_n^2$.

При грубих початкових наближеннях декілька перших ітерацій доцільно зробити за методом Ньютона, а потім перейти до алгоритму більш високого порядку збіжності, наприклад, до методу дотичних гіпербол.

Приймемо у [3] $\tilde{V}_n = 0$, $V_n = \frac{1}{2}P'(x_n, x_{n-1})G_n P(x_n) - \frac{1}{2}P'(x_n)G_n P(x_n)$, де $P'(x, y)$ – перша поділена різниця оператора $P'(x)$ [5] . Тоді $\|K_n\| = O(\eta_n \eta_{n-1})$ і порядок збіжності одержаного алгоритму дорівнює $1 + \sqrt{2}$. При розв'язуванні одного нелінійного алгебраїчного або трансцендентного рівняння індекс ефективності [4] в цьому випадку дорівнює $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, що вище, ніж у методів Ньютона ($\sqrt{2}$), дотичних гіпербол і Чебишова [8] ($\sqrt[3]{3}$) .

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Б а р т и ш М.Я. О некоторых итерационных методах решения функциональных уравнений. – "Сибирский математический журнал", 1969, т. 10, № 3.
2. В а х в а л о в Н.С. Численные методы. М., "Наука", 1973.
3. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. – "Труды Математического ин-та АН СССР", 1949, т. 28.
4. О с т р о в с к и й А. Решение уравнений и систем уравнений. М., ИЛ, 1968.
5. С е р г е е в А.С. О методе хорд. – "Сибирский математический журнал", 1961, т. 2, № 2.

6. У л ь м С.Д. О решении краевых задач, вытекающих из принципа максимума. - "Известия АН Эст.ССР, серия физика, математика", 1967, т. 16, № 1.

7. Ф о р с а й т Дж., М о л е р К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М., "Мир", 1969.

8. Б а ф и е в Р.А. О некоторых итерационных процессах. - "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1964, т. 4, № 1.

УДК 519.34 : 681.3.057

Г.А.ШИНКАРЕНКО

ІНТЕРПОЛЮВАННЯ НА ТРИКУТНИКАХ У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У роботах [1-3] розглядалися питання інтерполяції функцій у триангульованих областях. Ми пропонуємо спосіб побудови інтерполяційних поліномів на трикутниках, що дає змогу одержувати їх у замкненому вигляді, та має певні переваги при чисельній реалізації методу скінченних елементів.

Нехай у триангульованій області Ω необхідно зінтерполювати функцію $u(x, y)$, яка володіє всіма частинними похідними до певного порядку. Довільний елемент триангуляції визначається своїми вершинами $P_i(x_i, y_i), i=1, 2, 3$; позначимо його центр ваги через $P_0(x_0, y_0)$. На кожному такому трикутнику інтерполяційний поліном Ерміта H_n степеня n однозначно визначається умовами

$$D^j H_n(P_i) = D^j u(P_i), \quad |j| \leq S, \quad i \neq 0; \quad (1)$$

$$D^K H_n(P_0) = D^K u(P_0), \quad |K| \leq S + (n-1)/2.$$

де S - ціла частина числа $(n-1)/2$;

$$D^z f = \frac{\partial^z f}{\partial x^l \partial y^m}, \quad |z| = l + m.$$

Не зупиняючись на оцінці похибки таких поліномів /з цього приводу див. [4]/, зауважимо, що визначена таким чином на кожному трикутнику кускова інтерполянта належить множині функцій $C(\Omega)$, і отже, її можна використати для розв'язування варіаційних задач першого порядку. Далі, розглядаючи поліноми H_{2n} і H_{2n+1} , бачимо, що при складанні системи рівнянь методу скінченних елементів, попередньо виключивши параметри з центрального вузла кожного трикутника [3], приходимо до одного і того ж порядку системи. Оскільки решта параметрів визначаються лише на вершинах елементів, то ширинка ненульових елементів матриці буде мінімальною, якщо нумерація вершин вибрана належним чином. Тому що ці обчислювальні аспекти накладають особливо жорсткі вимоги до сучасних ЕОМ, то в цьому відношенні запропоновані поліноми переважають своїх попередників.

Під час побудови вищезгаданих поліномів зручно користуватись природними координатами на трикутнику

$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y) / \Delta, \quad i = 1, 2, 3,$$

де Δ — подвоєна площа трикутника з вершинами $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$.

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_k - y_j, \quad c_i = x_j - x_k \quad /2/$$

і решта коефіцієнтів одержується циклічною перестановкою індексів 1, 2, 3.

Поліном, що задовольняє умови /1/, шукаємо у вигляді

$$H_n = S_0 Q_0 \delta_0 + \sum_{i=1}^3 [S_i, S_0] [Q_i, Q]^T \delta_i. \quad /3/$$

Тут S_j , $j = 0, 1, 2, 3$ — матриці-стрічки, кожен елемент яких має вигляд

$$L_1^{n_1} L_2^{n_2} L_3^{n_3}, \quad /4/$$

де показники степенів n_1, n_2, n_3 зв'язані співвідношеннями

$$n_1 + n_2 + n_3 = n;$$

$$0 \leq n_i \leq s \quad \text{для} \quad S_0; \quad /5/$$

$$0 \leq n_j + n_k \leq n_i \quad \text{для} \quad S_i, i \neq 0;$$

$d_i, i=0,1,2,3$ вектори виду

$$d_i = [u^i_x, u^i_y, u^i_z, u^i_{x^2}, u^i_{xy}, \dots]^T, \quad u^i_x e_{y^m} = \frac{\partial^{l+m} u(R)}{\partial x^l \partial y^m} \quad /5/$$

Матриці Q, Q_i в формулі /3/ підлягають визначенню таким чином, щоб забезпечити виконання умов /1/. Тому що із співвідношень /5/ випливає

$$D^k S_0(P_i) = 0, \quad |k| \leq s, \quad i \neq 0;$$

$$D^i S_i(P_j) = 0, \quad |i| \leq s, \quad i \neq j, \quad i, j \neq 0,$$

і крім цього матриці $S_i, i \neq 0$ одержуються одна з іншої циклічною перестановкою індексів 1,2,3 у виразах виду /4/, то для визначення матриць Q, Q_i достатньо задовольнити умови

$$D^k S_0(P_0) Q_0 = E_0, \quad |k| \leq s + (-1)^n;$$

$$D^i S_i(P_i) Q_i^T = E_i, \quad |i| \leq s;$$

$$D^k S_i(P_0) Q^T = -D^k S_i(P_0) Q_i^T, \quad |k| \leq s + (-1)^n,$$

де E_j — одиничні матриці відповідних розмірностей. Таким чином, задача зводиться до визначення матриць Q, Q_i і, беручи до уваги відмічену циклічність матриць $S_i, i \neq 0$ і матриці Q_i .

Подальше спрощення цієї задачі полягає в тому, що вигляд цих матриць знаходиться для трикутника з вершинами $R_1(0,0), R_2(1,0), R_3(0,1)$ в площині змінних α, β і тоді за допомогою заміни змінних

$$\begin{aligned}x &= x_1 + c_3 \alpha - c_2 \beta, \\y &= y_1 - b_3 \alpha + b_2 \beta.\end{aligned}$$

/7/

здійснюється перехід до елемента з вершинами $P_i(x_i, y_i)$ /у виразах /7/ коефіцієнти c_j, b_j визначаються формулами /2//. Це еквівалентно тому, що кожен вектор δ_i для трикутника з вершинами R_i замінюється у виразі /3/ добутком $T_i \delta_i$, де матриці T_i визначаються перетворенням /7/, а вектори δ_i мають вигляд /6/ [1].

Для застосувань практичний інтерес становлять поліноми $H_{2k+1, k=0,1,2}$. Наведемо їх вигляд для трикутника з вершинами $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$. Для $k=0$ вигляд поліному наведено в роботі [3]

$$\begin{aligned}k=1. \quad S_0 &= [L_1, L_2, L_3], \quad \delta_0 = [u^0], \\S_1 &= [L_1^3, L_1^2 L_2, L_2^2 L_1, L_3^2 L_1], \quad \delta_1^T = [u^1, u_x^1, u_y^1],\end{aligned}$$

$$Q_0 = [27], \quad Q^T = [-7, -1, -1], \quad Q_1^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 3 & 1 & \cdot \\ 3 & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}k=2. \quad S_0 &= [L_1^5, L_1^4 L_2, L_1^3 L_2^2, L_1^2 L_2^3, L_2^4 L_1, L_2^3 L_1^2, L_2^2 L_1^3, L_2 L_1^4, L_3^5, \\S_1 &= [L_1^5, L_1^4 L_2, L_1^3 L_2^2, L_1^2 L_2^3, L_2^4 L_1, L_2^3 L_1^2, L_2^2 L_1^3, L_2 L_1^4, L_3^5, \\S_1^T &= [u^1, u_x^1, u_y^1, u_{xx}^1, u_{xy}^1, u_{yy}^1],\end{aligned}$$

$$Q = 27 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad Q^T = \begin{bmatrix} -57 & -14 & -5 & -1 & -1 & \cdot \\ 63 & 10 & 10 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -57 & -5 & -14 & \cdot & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Q_1^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 10 & 4 & \cdot & 1/2 & \cdot & \cdot \\ 20 & 4 & 4 & \cdot & 1 & \cdot \\ 10 & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$$K=3 \quad S_0 = [L_1^3 L_2^3 L_3, L_1^3 L_2^3 L_3, L_1^3 L_2^3 L_3, L_1^3 L_2^3 L_3, L_1^3 L_2^3 L_3, L_1^3 L_2^3 L_3],$$

$$\sigma_0^T = [u_0^0, u_x^0, u_y^0, \dots, u_{y^2}^0],$$

$$S_1 = [L_1^2, L_1^6 L_2, L_1^6 L_3, L_1^6 L_2^2, L_1^6 L_2 L_3, L_1^6 L_3^2, L_1^4 L_2^3, L_1^4 L_2^2 L_3, L_1^4 L_2 L_3^2, L_1^4 L_3^3],$$

$$\sigma_1^T = [u_1^1, u_x^1, u_y^1, u_{x^2}^1, \dots, u_{y^2}^1].$$

$$Q_0 = 27 \begin{bmatrix} -22 & -9 & -9 & -2 & 5 & -2 \\ -27 & 18 & -9 & 1 & -1 & -2 \\ -27 & -9 & 18 & -2 & -1 & 1 \\ 54 & \cdot & \cdot & 1/2 & -2 & 2 \\ 54 & \cdot & \cdot & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 54 & \cdot & \cdot & 2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 127/3 & -138 & -138 & -13/2 & 24 & -13/2 & \cdot & -1 & -1 & \cdot \\ 2479/3 & 189 & 102 & 3/2 & 19 & 7/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & \cdot \\ 2479/3 & 102 & 189 & 7/2 & 19 & 3/2 & \cdot & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1318/3 & -102 & -22 & -23/2 & -6 & \cdot & -1/2 & -1/2 & \cdot & \cdot \\ -1438/3 & -102 & -102 & -13/2 & -13 & -13/2 & -1/6 & -1/2 & -1/2 & -1/6 \\ -1318/3 & -22 & -102 & \cdot & -6 & -23/2 & \cdot & \cdot & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

$$Q_1^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 7 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 7 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 21 & 6 & \cdot & 1/2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 42 & 6 & 6 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 21 & \cdot & 6 & \cdot & \cdot & 1/2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 35 & 15 & \cdot & 5/2 & \cdot & \cdot & 1/6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 105 & 30 & 15 & 5/2 & 5 & \cdot & \cdot & 1/2 & \cdot & \cdot \\ 105 & 15 & 30 & \cdot & 5 & 5/2 & \cdot & \cdot & 1/2 & \cdot \\ 35 & \cdot & 15 & \cdot & \cdot & 5/2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1/6 \end{bmatrix}$$

Зауважимо, що коли варіаційна задача вимагає високої гладкості розв'язку, то цього можна досягнути деяким переозначенням матриць

Q_0, Q . Зокрема, прийнявши ці матриці нульовими, одержимо за допомогою поліномів H_n кусково-визначену апроксимацію розв'язку з класу функцій $C^s(\Omega)$.

Автор висловлює ширю вдячність професору Флейшману Н.П. і кандидату фізико-математичних наук Савулі Я.Г. за увагу до роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Dupuis L., Loel J. F. Finite elements with high degree of regularity. - *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1970, 2, N 4.
2. Lenzek A. Interpolation polynomials on the triangle. - *Numer. Math.*, 1970, 15, N 4.
3. Lienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London, McGraw-Hill, 1971.
4. Strang G., Fix G. F. *An Analysis of the Finite Element Method*. New-York, Prentice-Hall, Inc., 1973.

З.О. ЖЕЛЬЧИК, В.Г. КОСТЕНКО
ПІДВИЩЕННЯ ПОРЯДКУ АПРОКСИМАЦІЇ РІВНИЦЕВИХ
СХЕМ

Відомо [1], що коли крайову задачу

$$Au = f \quad \text{в } D, \quad /1/$$

$$Bu = g \quad \text{на } \Gamma \quad /2/$$

апроксимувати різницевиими системами рівнянь

$$A_{h/p} u^{h/p} = f^{h/p} \quad \text{в } D_{h/p}, \quad /3/$$

$$B_{h/p} u^{h/p} = g^{h/p} \quad \text{на } \Gamma_{h/p} \quad /4/$$

з точністю $O(h)$ на послідовності n сіток з кроками h/p $p=1, \dots, n$, то деяка лінійна комбінація /коректор/ розв'язків n систем рівнянь /3/, /4/ у вузлах сітки з кроком h дає наближений розв'язок задачі /1/, /2/ з точністю $O(h^2)$, де A, B - деякі лінійні диференціальні оператори; $A_{h/p}, B_{h/p}$ - їх різницеві аналоги; D - область з границею Γ ; $D_{h/p}$ - відповідна сітчаста область з границею $\Gamma_{h/p}$. При цьому існування єдиного неперервно диференційованого розв'язку задачі /1/, /2/ припускається.

Коли розглянути крайову задачу виду /1/, /2/, яка може бути апроксимована системами рівнянь /3/, /4/ на ті ж послідовності сіток з кроками h/p $p=1, \dots, n$ з точністю $O(h^2)$, то так само, як і в [1], виявлено, що у вузлах з кроком h коректор розв'язків систем рівнянь /3/, /4/

$$u = \sum_{p=1}^n \gamma_p u^{h/p}, \quad /5/$$

де

$$\gamma_p = (-1)^{n-p} \frac{2p^{2n}}{(n-p)!(n+p)!} \quad (p=1, \dots, n), \quad /6/$$

дає наближений розв'язок задачі /1/, /2/ з точністю $O(h^{2n})$.

При розв'язуванні задачі /1/, /2/ на ЕОМ з заданою точністю формули /5/, /6/ порівняно з викладеним в [1] дають економію машинного часу більше, ніж в два рази.

ЛІТЕРАТУРА

1. Марчук Г.М. Методи чисельної математики. Новосибірськ, "Наука", 1973.

УДК 629.8

В.В.КАРПОВ

РОЗРАХУНОК ПЛОСКОГО ЕКРАНА КІНЕСКОПА *

Плоский экран кинескопа має форму пластинки зі скругленими кутами. Нижче розглядається задача згину такої пластинки та досліджується вплив скруглення кутів на величину прогинів і моментів. Наведений нижче розв'язок може бути також використаний як складовий елемент при розв'язанні задачі про напруженодеформований стан пластинки, з'єднаної з циліндричною оболонкою.

1. Розглянемо пластинку, обмежену гладким контуром Γ

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad /1.1/$$

Потрібно визначити функцію $W(x, y)$, яка в області Ω , що зайнята пластинкою, задовольняє рівняння

$$\Delta \Delta W = 1, \quad /1.2/$$

а на контурі Γ - граничні умови

$$W|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n}|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad /1.3/$$

* Робота виконана під керівництвом доц.Д.Г.Хлебнікова.

де $W_1 = \frac{P}{2} \cdot W$ - прогин серединної площини пластинки;
 P - інтенсивність зовнішнього навантаження; D - циліндрична жорсткість; φ - задана на контурі Γ функція; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, n - внутрішня нормаль до Γ , S - довжина дуги контура Γ .

2. За В.Л.Рвачовим [2] розв'язок граничної задачі /1.2/ - /1.3/ шукаємо у вигляді

$$W = \omega^2 \Phi_0 + \omega \varphi_0. \quad /2.1/$$

де φ_0 - продовження функції φ всередину області Ω ;
 Φ_0 - довільна функція; ω - функція, яка задовольняє умови

$$\omega(x, y) > 0 \text{ в } \Omega, \quad \omega|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = 1. \quad /2.2/$$

Методика побудови такої функції описана в [2]. Для данної задачі функцію ω можна взяти у вигляді

$$\omega = \frac{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^2 + \frac{a^2 x^{2\alpha-2}}{\alpha^2} + \frac{b^2 y^{2\beta-2}}{\beta^2}}}. \quad /2.3/$$

Функція W у вигляді /2.1/ точно задовольняє граничні умови /1.3/. Довільність у виборі Φ_0 використовуємо для того, щоб наближено задовольнити рівняння /1.2/.

Як відомо [1], задачі розв'язку бігармонічного рівняння /1.2/ відповідає варіаційна задача про мінімум функціоналу, який, враховуючи незалежність граничної задачі /1.2/-/1.3/ від коефіцієнта Пуассона ν , має вигляд

$$J = \iint_{\Omega} [(\Delta W)^2 - 2W] dx dy. \quad /2.4/$$

Для наближеного знаходження мінімуму функціоналу використовуємо метод Рітца. Враховуючи симетрію задачі відносно осей координат, невідому функцію Φ_0 шукаємо у вигляді

$$\Phi_0(x, y) = \sum_{i,j=0}^M a_{ij} x^{2i} y^{2j}, \quad /2.5/$$

а невідомі коефіцієнти a_{ij} знаходимо в системі Рітца

$$\sum_{k,l=0}^M a_{ij} A_{ijkl} = B_{kl} \quad (k+l=0,1,\dots,M), \quad /2.6/$$

де

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= \iint_{\Omega} \Delta W_{ij} \Delta W_{kl} dx dy, \\ B_{kl} &= \iint_{\Omega} [W_{kl} - \Delta W_{kl} \Delta (\omega \varphi)] dx dy, \\ W_{ij} &= \omega^2 x^{2i} y^{2j}. \end{aligned} \quad /2.7/$$

3. Розглянемо пластинку, жорстко затиснену вздовж контура Γ . У цьому випадку $\varphi = 0$, і третю з умов /2.2/ можна замінити більш слабкою

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_{\Gamma} < +\infty. \quad /3.1/$$

Внаслідок цього функцію ω можна взяти в більш простому вигляді

$$\omega = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} - \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}. \quad /3.2/$$

У цьому випадку коефіцієнти системи /2.6/ явно виражаються через бета-функцію Ейлера $B(x,y)$.

4. Складено АЛГОЛ-програму формування та розв'язування системи /2.6/ для жорстко затисненої пластинки. Досліджено залежність моментів і максимального прогину від значень α і β , що характеризують скруглення кутів прямокутника. Значення максимального прогину /в частках $\frac{Pa^4}{E}$ / та згинальних моментів /в частках Pa^2 / для $\frac{b}{a} = 1,2$, $\frac{b}{a} = 1,8$ і для $\nu = 0,3$ наведено в таблиці. Для прямокутної пластинки результати взято з [3].

З наведених результатів видно, що вже при $\alpha = \beta = 4$ для практичних розрахунків можна не враховувати скруглення кутів. Оскільки в екранах кінескопів, як правило, $\alpha \gg 4$, $\beta \gg 4$, то екран кінескопа можна розглядати як прямокутну пластинку.

Прогини та моменти для жорстко затисненої
рівномірно навантаженої пластинки

$\alpha = \beta$	W_{max}	$M_x(x=a, y=0)$	$M_y(x=0, y=b)$	$M_x(x=0, y=0)$	$M_y(x=a, y=0)$
$\frac{b}{a} = 1,2$					
2	0,0214	-0,171	-0,119	0,104	0,085
4	0,0269	-0,250	-0,215	0,119	0,091
6	0,0275	-0,254	-0,220	0,120	0,091
8	0,0276	-0,254	-0,220	0,120	0,091
10	0,0276	-0,255	-0,221	0,120	0,091
∞	0,02752	-0,2556	-0,2216	0,1196	0,0912
$\frac{b}{a} = 1,8$					
2	0,0320	-0,256	-0,079	0,140	0,078
4	0,0385	-0,320	-0,210	0,158	0,071
6	0,0390	-0,323	-0,224	0,160	0,070
8	0,0391	-0,323	-0,225	0,160	0,070
10	0,0392	-0,322	-0,226	0,160	0,071
∞	0,03920	-0,3248	-0,2284	0,1604	0,0696

ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., Физматгиз, 1962.
2. Рвачев В.Л. [и др.] Метод R - функция в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы. Киев, "Наукова думка", 1973.
3. Тимошенко С.П., Вайновский - Кривгер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.

ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ПО ВАЗІ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ

Задачі оптимального проектування тонкостінних конструкцій, що складаються з пластин і оболонок, зводяться до задач математичного програмування, загальні методи якого розроблені ще недостатньо [3]. Методи математичного програмування дають змогу знайти вектор регульованих параметрів $\bar{t}^0(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$, який дає екстремум цільової функції

$$g_0(\bar{t}^0) = \max_{\bar{t} \in T} g_0(\bar{t}), \quad /1/$$

$$\bar{t} \in T = \{\bar{t} \mid g_k(\bar{t}) \geq 0\},$$

де T - множина допустимих розв'язків, яка утворюється функціями обмежень $g_k(\bar{t})$ ($k=1, 2, \dots, p$).

У цій роботі пропонується застосувати апарат геометричного програмування до розв'язування певного класу екстремальних задач. Для цього довільні, неперервні та диференційовані функції $g_k(\bar{t})$ зображаються позіномами виду [1]

$$g_k(\bar{t}) \approx C_k t_1^{\alpha_{k1}} t_2^{\alpha_{k2}} \dots t_m^{\alpha_{km}}, \quad /2/$$

де

$$\alpha_{kj} = \left(\frac{t_j}{g_k} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial t_j} \right)_{\bar{t}^*}, \quad C_k = g_k(\bar{t}^*) / \prod_{j=1}^m (t_j^*)^{\alpha_{kj}},$$

$\bar{t}^*$ - вихідна точка.

Тоді задача /1/ стає задачею геометричного програмування.

1. Розглянемо задачу пружної рівноваги конструкції, що складається з циліндричної оболонки /довжини ℓ , радіуса R і товщини $h_1 = \text{const}$ /, з'єднаної з плоским дном /товщини $h_2 = \text{const}$ /. Конструкція шарнірно оперта і перебуває під рівномірним зовнішнім тиском $q = \text{const}$.

Розв'язок рівняння Софі Жермен при дії по контуру пластинки згинних моментів $m_2 = q h_2^2 M_2$ і рівномірного тиску q має вигляд [4]

$$W_1 = \frac{q R^4}{64 D_1 (1+\nu_1)} \left[5 + \nu_1 + \frac{32 h_2^2}{R^2} M_2 - (1 + \nu_1) \frac{z^2}{R^2} \right] \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right), \quad /3/$$

де M_2 - безрозмірна величина моменту; D_1 - циліндрична жорсткість.

Розв'язок рівняння осесиметричного згину циліндричних оболонок записується у вигляді [4]

$$W_2 = e^{-\kappa x} (C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x) + e^{\kappa x} (C_3 \cos \kappa x + C_4 \sin \kappa x) + \frac{q R^2 (2 - \nu_2)}{2 E_2 h_2}, \quad /4/$$

де $\gamma = \sqrt{3(1-\nu_2^2)}$, $\kappa = \frac{\gamma}{\sqrt{R h_2}}$.

Постійні інтегрування визначаємо з умов спраження пластинки з оболонкою та умов парного опирання конструкції, які в нашому випадку зводяться до системи шести лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши ці рівняння, одержуємо:

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{\Delta_1}{\Delta}; & Q_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta}; \\ C_1 &= -b_{14} - \frac{A_1}{2} + b_{11} M_2 + (b_{12} - b_{13}) Q_2; \\ C_2 &= -b_{14} + (b_{21} - b_{21}) M_2 - b_{13} Q_2; \\ C_3 &= -(b_{14} + \frac{A_1}{2}) - b_{11} M_2 + (b_{12} + b_{13}) Q_2; \\ C_4 &= -b_{14} - (b_{21} + b_{21}) M_2 - b_{13} Q_2. \end{aligned} \quad /5/$$

Тут введено такі позначення:

$$b_{11} = \frac{q(1-\nu_1) R h_2^2}{E_1 h_2^2}; \quad b_{12} = \frac{q(1-\nu_1) R}{2 E_1} \cdot \frac{p_1^2}{p_2^2}; \quad b_{13} = \frac{q 3 R (1-\nu_2^2) p_2}{2 E_2 h^3};$$

$$b_{14} = \frac{3}{8} \frac{q R (1-\nu_1)}{h E_1} \cdot \frac{p_1^2}{p_2^2}; \quad b_{21} = \frac{q R h^2}{E_2}; \quad A_1 = \frac{q R (2-\nu_2)}{2 E_2} p_2^2;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -b_{11}(A+1) + b_{21} & b_{12}B + b_{13}(A-1) \\ -b_{11}(A-1) - b_{21}B & -b_{13}(A+1) + b_{12} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{14}(A+1) - \frac{A_1}{2} \left(\frac{e^{\kappa l}}{\sin \kappa l} - B \right) & b_{12}B + b_{13}(A-1) \\ b_{14}(A-1) - \frac{A_1}{2} \left(\frac{e^{\kappa l}}{\cos \kappa l} - 1 \right) & -b_{13}(A+1) + b_{12} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -b_{11}(A+1) + b_{21} & b_{14}(A+1) - \frac{A_1}{2} \left(\frac{e^{\kappa l}}{\sin \kappa l} - B \right) \\ -b_{11}(A-1) - b_{21}B & b_{14}(A-1) - \frac{A_1}{2} \left(\frac{e^{\kappa l}}{\cos \kappa l} - 1 \right) \end{vmatrix};$$

$$A = \frac{e^{2\kappa l}}{\sin 2\kappa l} - \operatorname{ctg} 2\kappa l; \quad B = \frac{e^{2\kappa l}}{\sin 2\kappa l} + \operatorname{ctg} 2\kappa l;$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{R}{k_1}}; \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{R}{k_2}}.$$

Аналіз напруженого стану даної конструкції показує, що максимальні розтягуючі напруження виникають у точці спряження пластинки з оболонкою.

2. Ставиться задача знаходження мінімуму об'єму /ваги/ конструкції

$$V = \pi R^3 \left[\rho_1^{-2} + \frac{2l}{R} \rho_2^{-2} \right], \quad /7/$$

при таких обмеженнях

$$\begin{aligned} \sigma_z^{\max} &= -q \left[\frac{A^4}{\rho_1^4} M_2 + \frac{A^2}{\rho_2^2} Q_2 \right] \leq [6], \\ \sigma_x^{\max} &= -q \left[6M_2 - \frac{\rho_2^4}{2} \right] \leq [6]. \end{aligned} \quad /8/$$

Апроксимуючи функції, що входять в обмеження /8/, одночленними поліномами, одержуємо таку пряму програму геометричного програмування:

$$\begin{aligned} \text{знайти мінімум} \quad & g_0(\rho_1, \rho_2) = C_1 \rho_1^{-2} + C_2 \rho_2^{-2}, \\ \text{при обмеженнях} \quad & C_3 \rho_1^{a_{11}} \rho_2^{a_{12}} \leq 1; \quad C_4 \rho_1^{a_{21}} \rho_2^{a_{22}} \leq 1. \end{aligned}$$

Ступінь трудності задачі дорівнює одиниці. Відповідна двоїста програ-

ма полягає в знаходженні максимуму функції

$$V(\sigma) = \left[\prod_{i=1}^4 c_i \sigma_i \right] \sigma_1^{\sigma_1} \sigma_2^{\sigma_2}$$

при умовах нормалізації, ортогоналізації та нерівності двоїстих змінних σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Розв'язок двоїстих обмежень для нашого випадку такий

$$\sigma = \bar{\sigma}^{(0)} + \tau \bar{\sigma}^{(1)}, \quad /9/$$

де $\bar{\sigma}^{(0)}$ - вектор нормалізації; $\bar{\sigma}^{(1)}$ - вектор нев'язки; τ - базисна змінна.

Вектори $\bar{\sigma}^{(0)}$, $\bar{\sigma}^{(1)}$ визначаються з матриці експонент прямої задачі. Величину τ визначаємо з рівняння

$$\prod_{i=1}^4 c_i \sigma_i^{(1)} = \left[\prod_{i=1}^4 (\bar{\sigma}_i^{(0)} + \tau \bar{\sigma}_i^{(1)}) \bar{\sigma}_i^{(1)} \right] (\bar{\sigma}_3^{(0)} + \tau \bar{\sigma}_3^{(1)})^{-\bar{\sigma}_3^{(1)}} (\bar{\sigma}_4^{(0)} + \tau \bar{\sigma}_4^{(1)})^{-\bar{\sigma}_4^{(1)}}. \quad /10/$$

Задача доведена до числа на ЕОМ М-222 при таких значеннях нерегульованих параметрів:

$$R = 19,45 \text{ мм}; \ell = 25 \text{ мм}; \mu_1 = \mu_2 = 0,2; \varphi = 0,01 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}; [\sigma] = 0,9 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

Розв'язок трансцендентного рівняння /10/ дає $\tau = 0,1127$. На основі першої теореми двоїстості знаходимо $h_1 = 1,6201$, $h_2 = 1,6316$.

Оскільки функції σ_2, σ_3 апроксимуються поліномами /2/ наближено, то для уточнення розв'язку використовувався ітераційний метод [2].

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., "Мир", 1972.
2. Зенер К. Геометрическое программирование и техническое проектирование. М., "Мир", 1973.
3. Сергеев Н.Д., Богатырев А.И. Проблемы оптимального проектирования конструкций. Л., Госстройиздат, 1971.
4. Тимошенко С.П., Войновский - Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.

І.О.НІЩЕНКО, Т.Л.МАРТИНОВИЧ, В.Є.ДРИНЕЦЬ

ПРУЖНА РІВНОВАГА НЕСИМЕТРИЧНО З'ЄДНАНИХ ПЛАСТИНОК

1. Питання несиметричного підкріплення пластинок тонкими пружними стернями присвячена вже значна кількість робіт. Але в практиці досить часто виникає необхідність спаявати /склеювати/ пластинки різної висоти так, що їх серединні площини паралельно зміщені одна відносно одної. У цьому випадку, як і при несиметричному підкріпленні пластинки, в ній буде одночасно виникати, як узагальнений плоский напружений стан, так і явище згину. Ми пропонуємо один наближений підхід до дослідження напруженого та деформованого станів таких пластинок.

Розглянемо пластинку, що складається з n кусково-однорідних, ізотропних пластинок несиметрично спаяних /склеєних/ між собою до деформації вздовж замкнутих, гладеньких контурів $L_1, L_2, \dots,$

L_{n-1} , що не перетинаються між собою. Причому, контур L_k є лінією розділу k -ї пластинки, яка залишається зліва при обході контура проти годинникової стрілки, та j -ї пластинки. Сукупність інших контурів, що не являються лініями розділу середовищ, позначимо через L_0 . На них можуть бути задані крайові умови першої, другої або змішаної основних задач.

Будемо вважати, що на лінії спаяв L_k виконуються такі умови спряження: а/ статичні умови, що виражають рівність компонент головного вектора та головного моменту зусиль, які виникають на поверхні спаяв

$$2h_k(N_k + iT_k) = 2h_j(N_j + iT_j); \quad R_k^{(n)} = P_j^{(n)}; \quad /1.1/$$

$$M_n^{(k)} = M_n^{(j)} - 2h_j \zeta_k^* N_j; \quad H_{n\tau}^{(k)} = H_{n\tau}^{(j)} - 2h_j \zeta_k^* T_j;$$

б/ кінематичні умови, які зв'язують між собою переміщення точок серединних площин, прогини та кути повороту сусідніх пластин на лінії спар

$$u_k + i v_k = (u_j + i v_j) - 2 \zeta_k^* \frac{\partial w_j}{\partial t}; \quad /1.2/$$

де $w_k = w_j$; $\frac{\partial w_k}{\partial n} = \frac{\partial w_j}{\partial n}$,

$2h$ - товщина пластинки; u , v , w - компоненти вектора переміщення; N , T - нормальні та дотичні напруження узагальненого плоского напруженого стану; $p^{(n)}$ - поперечна сила; M_n , H_n - згинальні та крутні моменти; ζ_k^* - зміщення k -ї пластинки по відношенню до j -ї; воно додатне, коли остання розміщена вище від першої. Індеси біля величин у формулах /1.1/, /1.2/ та далі показують до якої пластинки дана величина чи функція відноситься.

Якщо ввести комплексні потенціали $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ [1,2], з яких два перших характеризують узагальнений плоский напружений стан, а два останніх згин, то умови /1.1/ запишуться у такому вигляді:

$$\begin{aligned} h_k [\varphi_k(t) + t \overline{\varphi_k'(t)} + \overline{\varphi_k(t)}] &= h_j [\varphi_j(t) + t \overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\varphi_j(t)}], \\ 2h_j \zeta_k^* [\varphi_j(t) + t \overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\varphi_j(t)}] &= D_j (1 - \nu_j) [h_j \varphi_j^*(t) + t \overline{\varphi_j^{*'}(t)} + \\ &+ \overline{\varphi_j^*(t)}] - D_k (1 - \nu_k) [h_k \varphi_k^*(t) + t \overline{\varphi_k^{*'}(t)} + \overline{\varphi_k^*(t)}], \\ 2 \zeta_k^* [\varphi_j^*(t) + t \overline{\varphi_j^{*'}(t)} + \overline{\varphi_j^*(t)}] &= \frac{1}{\mu_j} [\mathcal{H}_j \varphi_j(t) - t \overline{\varphi_j'(t)} - \\ &- \overline{\varphi_j(t)}] - \frac{1}{\mu_k} [\mathcal{H}_k \varphi_k(t) - t \overline{\varphi_k'(t)} - \overline{\varphi_k(t)}]. \end{aligned}$$

$$\Psi_j^*(t) + t \overline{\Psi_j^{*'}(t) + \Psi_j^*(t)} = \Psi_k^*(t) + t \overline{\Psi_k^{*'}(t) + \Psi_k^*(t)},$$

ν - коефіцієнт Пуассона; $\mathcal{H} = \frac{3-\nu}{1+\nu}$, $n = -\frac{3+\nu}{1-\nu}$, $\mathcal{D}(1-\nu) = \frac{4\mu h^3}{3}$;
 μ - модуль зсуву; $t \in L_k$.

Диференцюючи попередні рівності, виразимо їх через великі функції

$$\begin{aligned} & \alpha_j \delta_j^2 [\Phi_j(t) + \overline{\Phi_j(t)} - e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_j'(t) + \Psi_j(t))] = \\ & = \Phi_j(t) + \overline{\Phi_k(t)} - e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_k'(t) + \Psi_k(t)), \\ & 3\delta_j^2 \delta_k \alpha_j [\Phi_j(t) + \overline{\Phi_j(t)} - e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_j'(t) + \Psi_j(t))] = \\ & = \alpha_j \delta_j^3 [n_j \overline{\Phi_j^{*'}(t)} + \Phi_j^*(t) - e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_j^{*'}(t) + \Psi_j^*(t))] - \\ & - [n_k \overline{\Phi_k^{*'}(t)} + \Phi_k^*(t) - e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_k^{*'}(t) + \Psi_k^*(t))], \\ & \delta_k [\Phi_j^*(t) + \overline{\Phi_j^*(t)} - e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_j^{*'}(t) + \Psi_j^*(t))] = \\ & = \delta_j [\mathcal{H}_j \overline{\Phi_j(t)} - \Phi_j(t) + e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_j'(t) + \Psi_j(t))] - \\ & - [\mathcal{H}_k \overline{\Phi_k(t)} - \Phi_k(t) + e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_k'(t) + \Psi_k(t))], \\ & \overline{\Phi_j^*(t) + \Phi_j^*(t)} - e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_j^{*'}(t) + \Psi_j^*(t)) = \end{aligned}$$

$$= \Phi_k^*(t) + \overline{\Phi_k^*(t)} - e^{2i\alpha} (\bar{t} \Phi_k^{*'}(t) + \Psi_k^*(t)),$$

де $\sigma_k = \frac{\Sigma_k^*}{h_k}$, $\delta_j = \frac{h_j}{h_k}$, $L_j = \frac{M_j}{M_k}$, $\varphi_j' = 2M_j h_j \Phi_j$,

$$\Psi_j' = 2M_j h_j \Psi_j^*, \quad \varphi_j^{*'} = \Phi_j^*, \quad \Psi_j^{*'} = \Psi_j^*.$$

α - кут між нормаллю до контура L_k і віссю Ox .

2. Як приклад, розглянемо рівновагу пластинки, що складається з концентричних кілець, спаяних між собою несиметрично. Якщо перше кільце є нескінченною пластинкою, то контур L_0 віддалений у нескінченність, а коли n - кільце - шайба, то контур L_n стягується в точку.

Дослідження напруженодеформованого стану складеного кільця при симетричному в'єднанні кілець однакової висоти наведені в роботі [2].

Комплексні потенціали в j -му кільці можна розкласти в ряди Лорана

$$\begin{aligned} \Phi_j(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(j)} \frac{z^n}{R_j^n}; \quad \Psi_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(j)} \frac{z^n}{R_j^n}; \\ \Phi_j^*(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(j)} \frac{z^n}{R_j^n}; \quad \Psi_j^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(j)} \frac{z^n}{R_j^n}. \end{aligned} \quad /2.1/$$

Підставивши ці розклади функцій у рівності /1.4/ та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $\sigma (z = R_j \sigma = R_j e^{i\theta})$, одержимо такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(1-n)C_n^{(j)} R_j^n + \bar{C}_{-n}^{(j)} R_j^{-n} - D_{n-2}^{(j)} R_j^{n-2} = (1-n)C_n^{(j+1)} R_j^n + \bar{C}_{-n}^{(j+1)} R_j^{-n} - D_{n-2}^{(j+1)} R_j^{n-2},$$

$$\sigma_j^* [(1-n)C_n^{(j)} R_j^n + \bar{C}_{-n}^{(j)} R_j^{-n} - D_{n-2}^{(j)} R_j^{n-2}] = \delta_j [\mathcal{H}_j \bar{A}_{-n}^{(j)} R_j^{-n} - (1-n)A_n^{(j)} R_j^n +$$

$$+ B_{n-2}^{(j)} R_j^{n-2}] - [\mathcal{H}_{j+1} \bar{A}_{-n}^{(j+1)} R_j^{-n} - (1-n)A_n^{(j+1)} R_j^n + B_{n-2}^{(j+1)} R_j^{n-2}],$$

/2.2/

$$\begin{aligned}
& \alpha_j \delta_j^2 \left[(1-n) A_n^{(j)} \rho_j^n + \bar{A}_{-n}^{(j)} \rho_j^{-n} - B_{n-2}^{(j)} \rho_j^{n-2} \right] = \\
& = (1-n) A_n^{(j+1)} \rho_j^n + \bar{A}_{-n}^{(j+1)} \rho_j^{-n} - B_{n-2}^{(j+1)} \rho_j^{n-2}, \\
& 3\sigma_j \alpha_j \delta_j \left[(1-n) A_n^{(j)} \rho_j^n + \bar{A}_{-n}^{(j)} \rho_j^{-n} - B_{n-2}^{(j)} \rho_j^{n-2} \right] = \\
& = \alpha_j \delta_j^3 \left[n_j \bar{C}_{-n}^{(j)} \rho_j^{-n} + (1-n) C_n^{(j)} \rho_j^n - D_{n-2}^{(j)} \rho_j^{n-2} \right] - \\
& - \left[n_{j+1} \bar{C}_{-n}^{(j+1)} \rho_j^{-n} + (1-n) C_n^{(j+1)} \rho_j^n - D_{n-2}^{(j+1)} \rho_j^{n-2} \right], \\
& (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad \rho_j = \frac{R_j}{R_1}.
\end{aligned}$$

Система /2.2/ розв'язувалась для трикомпонентного кільця, коли перше є нескінченною пластинкою, а останнє - шайба, при таких значеннях параметрів:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 3077, & \alpha_2 &= 0,624, & \delta_1 &= 0,5, & \delta_2 &= 0,667, \\
\nu_1 &= 0,25, & \nu_2 &= 0,2, & \nu_3 &= 0,33, & \rho_2 &= 0,667.
\end{aligned}$$

і різних значеннях величин σ_1, σ_2 .

Якщо пластинка на нескінченності згинається або розтягується в напрямку осі Ox , то

$$\begin{aligned}
A_0^{(1)} &= \frac{P}{8h_1\mu_1}; & B_0^{(1)} &= \frac{P}{4h_1\mu_1}, & /2.4/ \\
C_0^{(1)} &= -\frac{M}{4D_1(1+\nu_1)}; & D_0^{(1)} &= -\frac{M}{2D_1(1-\nu_1)}.
\end{aligned}$$

Інші коефіцієнти визначаються в системі /2.3/. Розподіл величин

$\frac{\sigma_\rho}{\rho}$; $\frac{\sigma_n}{\rho}$; $\frac{\sigma_n h_1^2}{M}$ поблизу зовнішнього контура L_1 зображено

відповідно на рис. 1, 2, 3. Причому в квадрантах 1, 1У рис. 2, 3 та — 1-II рис. 1 показано зміну цих величин на нижньому краї пластинки, а в протилежних квадрантах на II верхньому краї. Лінія 1 відповідає значенням $\sigma_1 = 0,5$, $\sigma_2 = 0,33$; лінія 2 — $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ /тобто симетричному спад/; лінія 3 — $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_2 = 0$; лінія 4 — $\sigma_1 = 0,4$, $\sigma_2 = 0$.

На рис. 4 показана залежність від σ_1 величин $\frac{\sigma_2}{\rho}$ /лінії 1.1'/ та $\frac{\sigma_2}{\rho} \frac{h_1^s}{h_1}$ /лінії 2.2'/ відповідно на нижньому та верхньому краях пластинки при $\sigma_2 = 0$, $\theta = 0$.

Напруження поблизу контура L_2 значно менші за величину, а тому їх значення тут не наведені.

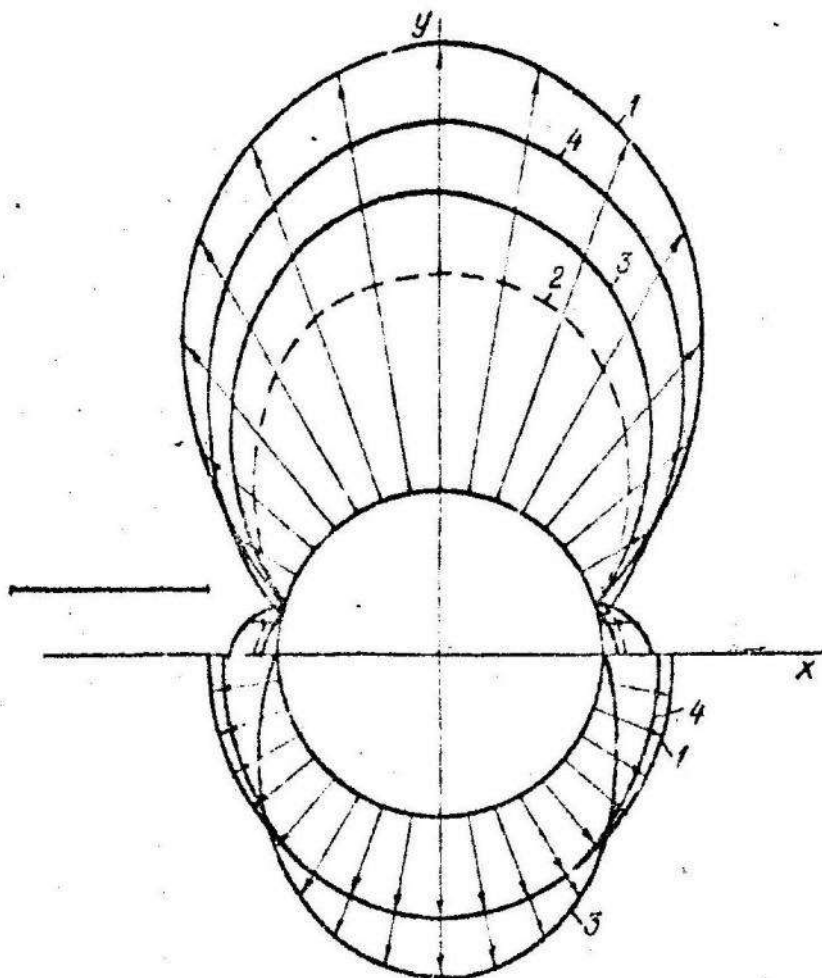


Рис. 1.

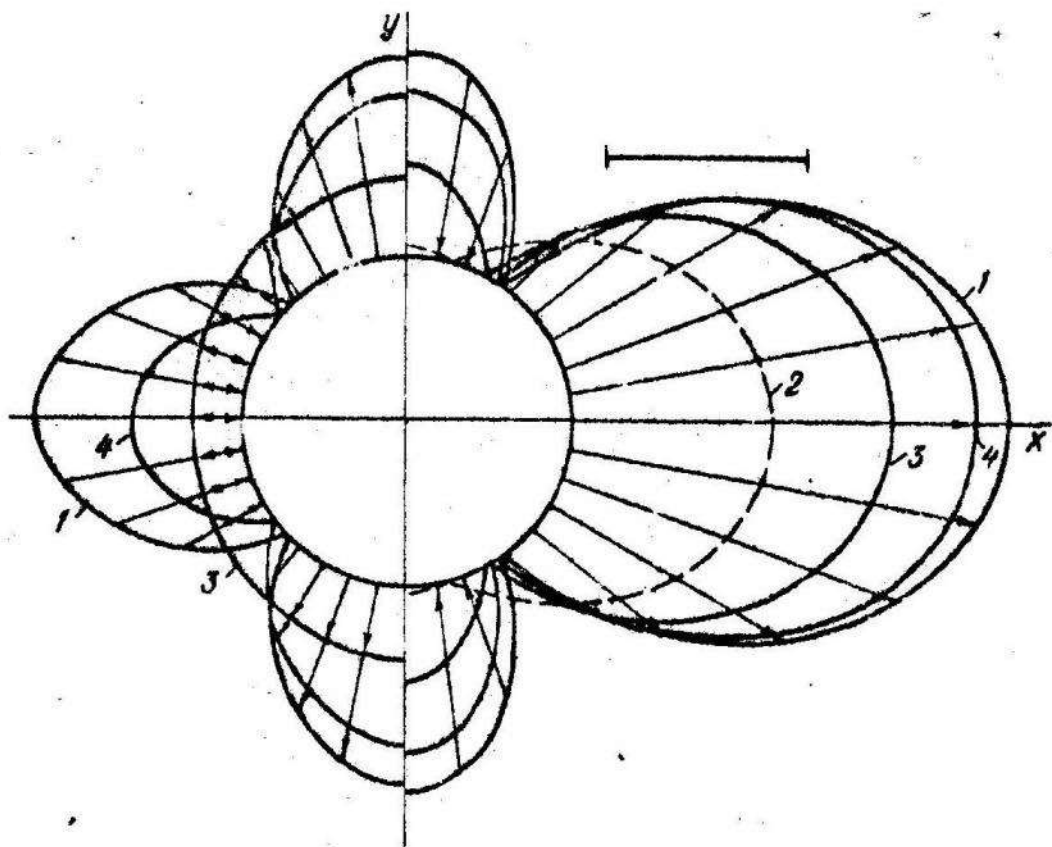


Рис. 2.

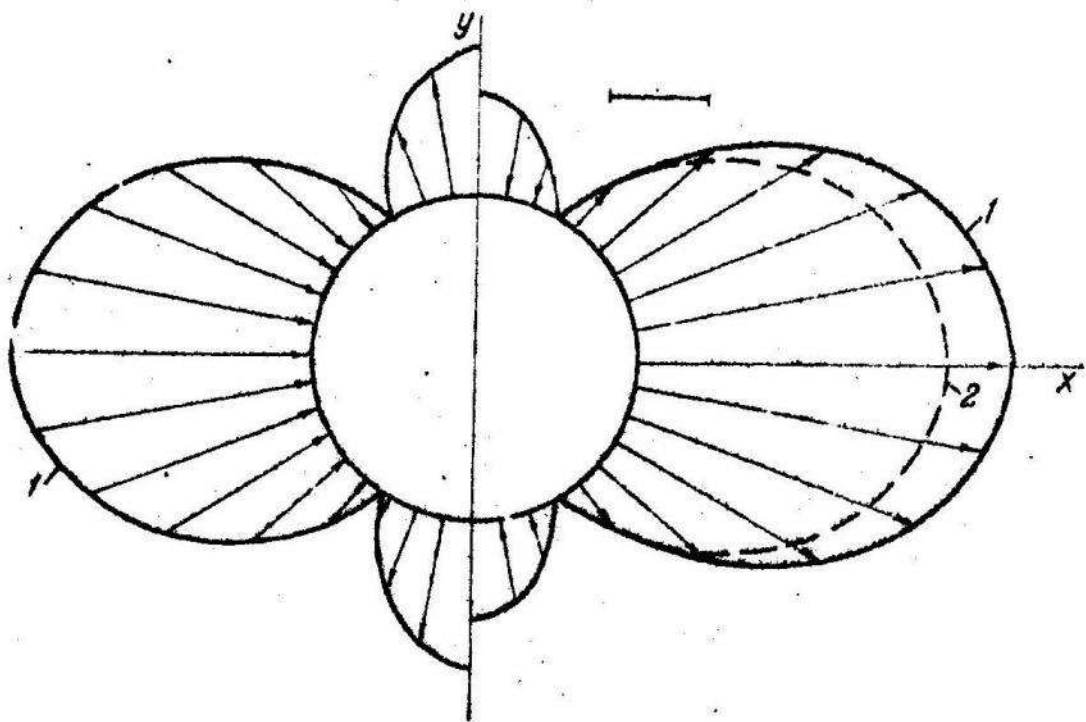


Рис. 3.

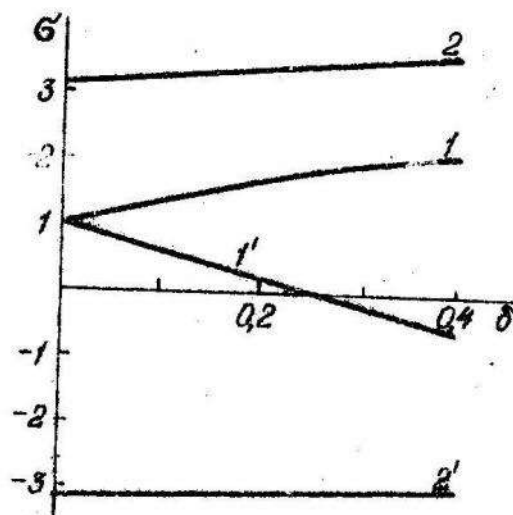


Рис. 4.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.

2. С а в и н Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. М., Гостехиздат, 1961.

УДК 539.385

В.В. ПОРОХОВСЬКИЙ, О.П. ПІДДУБНЯК

КРУЧЕННЯ ДВОШАРОВОГО ПРУЖНОГО ПАКЕТА ЖОРСТКИМ
ВКЛЮЧЕННЯМ *

Задача про кручення круглим штампом пружного шару скінченної товщини розв'язана в роботі [4], а двошарового пружного середовища у [2].

1. У цій статті розглядається осесиметрична задача теорії пружності про кручення двошарового пакету, що займає область $-h_2 < x < h_1$, дископодібним жорстким включенням /шайбою/, впаєним у площині спря-

*Робота виконана під науковим керівництвом проф. Д.В. Гриліцького

ження шарів $z=0$, $0 \leq z \leq a$. Вважається, що включення перебуває під дією моменту кручення величини M .

Досліджуються випадки, коли поверхні пакета вільні від зусиль, нерухомо закріплені, або одна з його поверхонь закріплена, а інша вільна від навантаження /рис. 1, а, б, в/.

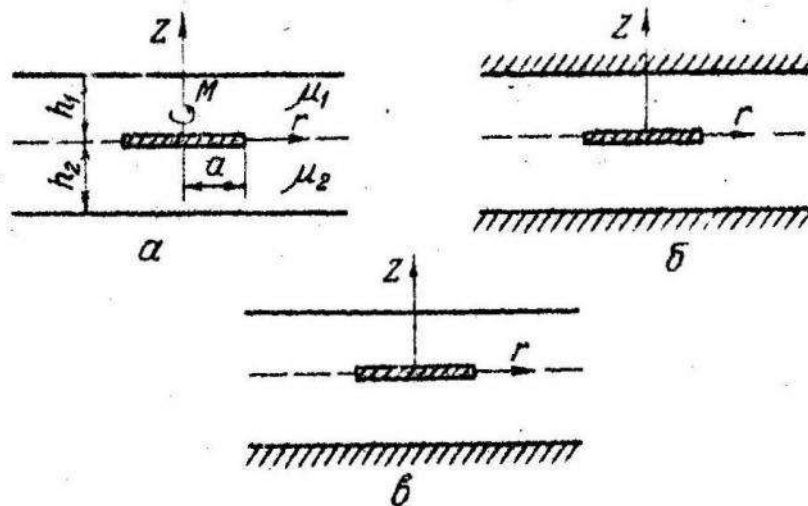


Рис. 1.

Розв'язання задачі зводиться до знаходження тангенціального зміщення u_θ з диференціального рівняння рівноваги [1]

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{u_\theta}{z^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} = 0, \quad /1.1/$$

$$u_\theta = u = \begin{cases} u_1, & 0 \leq z \leq h_1, \\ u_2, & -h_2 \leq z \leq 0 \end{cases}$$

при таких граничних умовах

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_j(z, x) = 0 \quad (j=1,2), \quad /1.2/$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 = u_2 = \Delta z, & \quad 0 \leq z \leq a, \\ u_1 = u_2, \quad \tau_{\theta x}^{(1)} = \tau_{\theta x}^{(2)}, & \quad z = a \end{aligned} \right\} \quad z=0, \quad /1.3/$$

$$\tau_{\theta x}^{(1)}(z, h_1) = 0, \quad \tau_{\theta x}^{(2)}(z, -h_2) = 0, \quad z \geq a, \quad /задача 1, рис.1, а/, /1.4/$$

$$u_1(z, h_1) = 0, \quad u_2(z, -h_2) = 0, \quad z \geq 0, \quad /задача 2, рис. 1, б/, /1.5/$$

$$\tau_{\theta x}^{(0)}(z, h_1) = 0, u_2(z, -h_2) = 0, z \geq 0 \quad / \text{задача 3, рис. 1, в} / \quad /1.6/$$

α - кут повороту жорсткого включення.

Компоненти тензора напружень визначаються за формулами

$$\tau_{\theta x} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{z\theta} = \mu z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{z} \right) \quad / \mu - \text{модуль зсуву} / \quad /1.7/$$

2. Використовуючи метод інтегрального перетворення Ханкеля, зведемо задачу до парних інтегральних рівнянь, які в свою чергу зведемо до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду [4]

$$Y(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a K(x, t) Y(t) dt = \frac{4\alpha}{\pi} (\mu_1 + \mu_2) x, \quad 0 \leq x \leq a \quad /2.1/$$

з ядром

$$K(x, t) = 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{\Phi(\xi)} - 1 \right] \sin x \xi \sin t \xi d\xi, \quad /2.2/$$

де

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \mu_1 \operatorname{th} \xi h_1 + \mu_2 \operatorname{th} \xi h_2 & / \text{задача 1} / \\ \mu_1 \operatorname{cth} \xi h_1 + \mu_2 \operatorname{cth} \xi h_2 & / \text{задача 2} / \\ \mu_1 \operatorname{th} \xi h_1 + \mu_2 \operatorname{cth} \xi h_2 & / \text{задача 3} / \end{cases} \quad /2.3/$$

Інтегральне рівняння /2.1/ розв'язуємо методом послідовних наближень, рівномірна збіжність якого буде забезпечена /для всіх трьох випадків/ [3] при $\lambda^* > 0,74$, де $\lambda^* = \min \{ \lambda_1, \lambda_2 \}$, $\lambda_j = \frac{h_j}{a}$ ($j = 1, 2$).

Таким чином,

$$Y(x) = \frac{4}{\pi} \alpha (\mu_1 + \mu_2) \sum_{n=1,3,5} a_n \left(\frac{x}{a} \right)^n, \quad 0 \leq x \leq a \quad /2.4/$$

$$a_1 = 1 - \frac{L_2}{3} \delta^3 + \frac{L_4}{30} \delta^5 + \frac{L_2^2}{9} \delta^6 - \frac{L_6}{360} \delta^7,$$

$$a_3 = \frac{L_4}{18} \delta^5 - \frac{L_6}{180} \delta^7,$$

$$a_5 = -\frac{L_6}{360} \delta^7,$$

/2.5/

тут

$$\sigma = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{\Phi(2/a)} - 1 \right] \eta^n d\eta, \quad (n=2, 4, 6). \quad /2.6/$$

Переміщення в пакеті визначається за формулою

$$u_j(z, x) = u_{ij}(\tau, x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(\xi) \Psi_{ij}(\eta, x) \sin \xi \tau J_2(\eta \psi) d\eta d\tau. \quad /2.7/$$

де

$$\Psi_{ij}(\eta, x) = \frac{\sinh \eta x + (-1)^i [\delta_{1j} \operatorname{th} \eta h_1 + \delta_{2j} \operatorname{ch} \eta h_1] + \delta_{3j} [\delta_{2i} \operatorname{ch} \eta h_1 - \delta_{1i} \operatorname{th} \eta h_1] \operatorname{ch} \eta x}{\mu_1 [(1 - \delta_{2j}) \operatorname{th} \eta h_1 + \delta_{2j} \operatorname{ch} \eta h_1] + \mu_2 [\delta_{1j} \operatorname{th} \eta h_2 + (1 - \delta_{1j}) \operatorname{ch} \eta h_2]} \quad /2.8/$$

$i = 1, 2$; індекс $j = 1, 2, 3$ відповідає задачам 1, 2, 3,

δ_{ij} - символ Кронекера. Напруження легко одержати за формулами /1.7/. Момент кручення M зв'язаний з величиною кута повороту шайби співвідношенням

$$M = -16a^3 \mathcal{L}(\mu_1 + \mu_2) \sum_{n=0,1,2}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{2n+5}. \quad /2.9/$$

Характер напруженого стану пакета поблизу жорсткого включення описується за допомогою коефіцієнта інтенсивності контактних напружень $\mathcal{C}_{\theta x}$ [5].

$$K_{\theta} = \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \sqrt{2\pi(a-z)} [\mathcal{C}_{\theta x}^{(1)}(z, a) - \mathcal{C}_{\theta x}^{(2)}(z, a)] \right\} = -\sqrt{\frac{\pi}{a}} \Psi(a). \quad /2.10/$$

3. Для ілюстрації одержаних результатів наведемо деякі числові підрахунки. У табл. 1, 2 наведені значення моменту кручення $m = M/M^\infty$ та коефіцієнта інтенсивності контактних напружень $k = K_{\theta}/K_{\theta}^\infty$ залежно від параметрів λ_1, λ_2 та $\gamma = \mu_1/\mu_2$. Тут $M^\infty = \frac{16}{3} \mathcal{L}(\mu_1 + \mu_2)$, $K_{\theta}^\infty = -4a \sqrt{\frac{\pi}{a}} (\mu_1 + \mu_2)$ - момент кручення та коефіцієнт інтенсивності контактних напружень, що відповідають задачі про кручення внутрішньої абсолютно жорсткою шайбою безмежного двохшарового простору / $h_1 = h_2 = \infty$ /. На рис. 2, 3, 4 відповідно для задач 1, 2, 3 показано графіки залежностей m і k від товщини однорідного пакету / $\gamma = 1, \mu_1 = \mu_2$ /.

Таблиця 1

Значення моменту кручення m при різних
геометричних і пружних параметрах

Задача 1				Задача 2				Задача 3			
γ	λ_2	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	
	0,75	0,61	0,65	0,66	1,24	1,22	1,22	1,21	1,22	1,22	
0,1	2	0,96	0,99	0,99	1,04	1,01	1,01	0,98	1,01	1,01	
	100	0,97	1,00	1,00	1,03	1,00	1,00	0,97	1,00	1,00	
	0,75	0,61	0,76	0,77	1,24	1,18	1,18	1,11	1,17	1,18	
0,5	2	0,88	0,99	0,99	1,10	1,01	1,01	0,91	1,00	1,01	
	100	0,90	1,00	1,00	1,10	1,00	1,00	0,90	0,99	1,00	
	0,75	0,61	0,82	0,84	1,24	1,14	1,14	1,02	1,14	1,14	
1	2	0,82	0,99	0,99	1,14	1,01	1,01	0,85	1,00	1,01	
	100	0,84	0,99	1,00	1,10	1,01	1,00	0,84	0,99	1,00	

Таблиця 2

Значення коефіцієнту інтенсивності контактних
напружень k при різних геометричних і пружних
параметрах

Задача 1				Задача 2				Задача 3			
γ	λ_2	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	$\lambda_1=0,75$	$\lambda_1=2$	$\lambda_1=100$	
	0,75	0,47	0,53	0,54	1,35	1,32	1,32	1,30	1,32	1,32	
0,1	2	0,95	0,99	0,99	1,05	1,01	1,01	0,97	1,01	1,01	
	100	0,96	1,00	1,00	1,04	1,00	1,00	0,96	1,00	1,00	
	0,75	0,47	0,57	0,69	1,35	1,25	1,25	1,14	1,24	1,25	
0,5	2	0,81	0,99	0,99	1,14	1,01	1,01	0,87	1,00	1,01	
	100	0,86	1,00	1,00	1,14	1,00	1,00	0,86	1,00	1,00	
	0,75	0,47	0,76	0,78	1,35	1,20	1,19	1,02	1,19	1,19	
1	2	0,78	0,99	0,99	1,20	1,01	1,01	0,79	1,00	1,01	
	100	0,78	0,99	1,00	1,19	1,01	1,00	0,78	1,00	1,00	

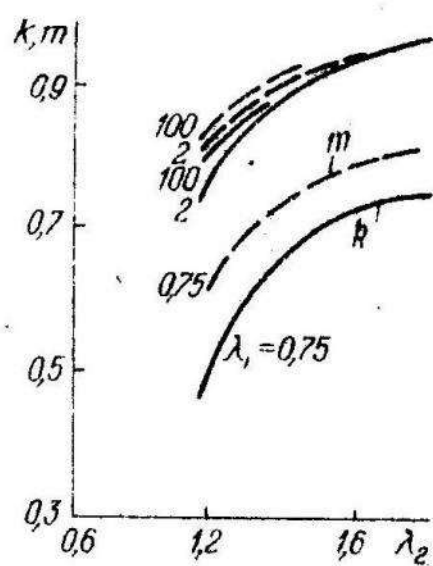


Рис. 2.

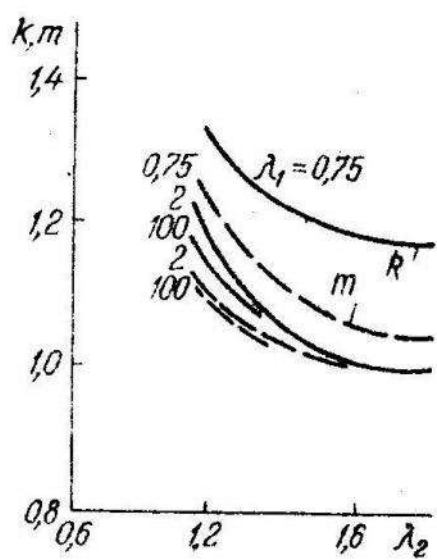


Рис. 3.

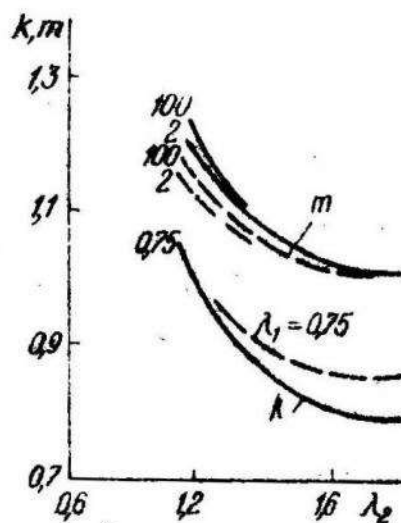


Рис. 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н.Х., А б р а м я н Б.Л. Кручение упругих тел. М. Физматгиз, 1963.
2. Г р и л і ц ь к и й Л.В. Кручения двохшарового пружного середовища. - "Прикладна механіка", 1961, т. 7, вип.1.
3. З а б р о й к о П.П.[и др.] Интегральные уравнения. М., "Наука", 1968.
4. У ф л я н д Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., "Наука", 1967.
5. Ч е р е п а н о в Г.П. Механика хрупкого разрушения. М., "Наука", 1974.

УДК 539.3

В.С. КРИНЦЬ

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНКИ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Розглянемо пружну напівбесмежну пластинку $y \leq 0$ товщини $2h$, прямолінійний край якої по всій довжині несиметрично підкріплений пружним стержнем сталого перерізу. Підкріплюючий стержень спаяний з

пластинкою до деформації таким чином, що вісь стержня паралельно змі-
 щена від серединної площини пластинки на деяку величину ξ_0^* /ексцент-
 риситет підкріплення/. Спряження пластинки зі стержнем ґрунтується
 на гіпотезі нормального плоского перерізу. До стержня прикладені
 зовнішні згинальні моменти $m(x)$, перерізувальні сили $P(x)$, нор-
 мальні і тангенціальні зусилля $N(x)$, $T(x)$. Із боку стержня на
 пластинку передаються контактні згинальні моменти $m^{(i)}(x)$, перері-
 зувальні сили $P^{(i)}(x)$ і зусилля $N^{(i)}(x)$, $T^{(i)}(x)$. Отже, на контурі
 спав пластинки зі стержнем маємо умови спряження /рис. 1/.

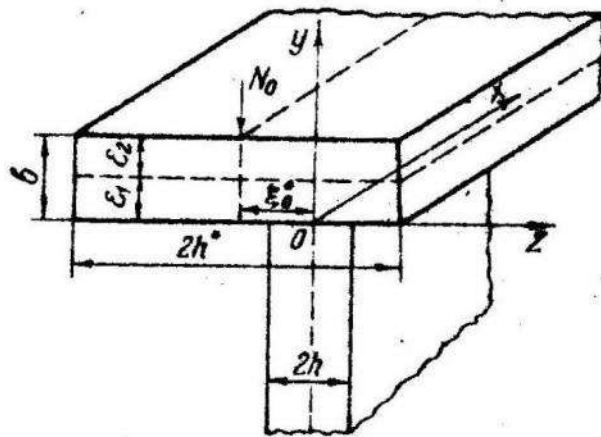


Рис. 1.

$$\begin{aligned}
 (u)_{y=0} &= u_1, \quad (\sigma)_{y=0} = \sigma_1, \quad (w)_{y=0} = w_1, \quad \left(\frac{dw}{dy}\right)_{y=0} = \frac{dw_1}{dy}, \\
 (\sigma_y)_{y=0} &= N^{(i)}(x), \quad (\tau_{xy})_{y=0} = T^{(i)}(x), \\
 (M_y)_{y=0} &= m^{(i)}(x), \quad \left(N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)_{y=0} = P^{(i)}(x).
 \end{aligned}
 \quad /1/$$

Незалежно від виду навантаження при ексцентриситеті підкріплення
 нерівному нулю в пластинці виникають узагальнено плоский і згиналь-
 ний напружені стани. При $\xi_0^* = 0$ задача розділяється на плоску і
 згин.

Надалі будемо користуватися інтегральним перетворенням Фур'є за змінюю x

$$\bar{F}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{i\lambda x} dx, \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad /2/$$

Виходячи з теорії криволінійного стержня і прийнявши, що радіус кривизни дорівнює безмежності, одержимо диференціальні рівняння для компонент вектора зміщення елементів волокна стержня, що перебуває в контакті з пластинкою, які в області інтегрального перетворення Фур'є мають вигляд

$$\begin{aligned} i\lambda^3 \bar{u}_1 &= i\lambda \frac{2h^*}{g_2} \bar{T} - 2i\lambda h \left(\frac{1}{g_1} + \frac{\xi_0^{*2}}{\lambda^2} \right) \bar{T}^{(1)} - \frac{2h\xi_1}{g_2} \bar{N}^{(1)} + \frac{2h\xi_1}{g_2} \bar{N} + \frac{\xi_1^*}{\lambda^2} \bar{\rho}^{(1)} - \frac{\xi_0^*}{\lambda^2} \bar{\rho}, \\ \lambda^4 \bar{v}_1 &= \frac{2h^*}{g_2} \bar{N} - \frac{2h}{g_2} \bar{N}^{(1)} - i\lambda \frac{2h\xi_1^*}{g_2} \bar{T} - i\lambda \frac{2h\xi_1}{g_2} \bar{T}^{(1)}, \\ \bar{w}_1 &= \frac{1}{\lambda^2 A} \bar{p} - \frac{1}{\lambda^2 A} \bar{p}^{(1)} + i \frac{2h\xi_0^*}{\lambda^2 A} \bar{T}^{(1)} - \frac{\xi_1}{\lambda^2 C} \bar{m}^{(1)} + \frac{\xi_1}{\lambda^2 C} \bar{m} - \frac{2h\xi_0^* \xi_1}{\lambda^2 C} \bar{N}^{(1)} - \frac{\xi_1 \xi_2}{\lambda^2 C} \bar{p} - \frac{\xi_1^2}{\lambda^2 C} \bar{p}^{(1)}, \\ \frac{d\bar{w}_1}{dy} &= \frac{1}{\lambda^2 C} \bar{m}^{(1)} - \frac{1}{\lambda^2 C} \bar{m} + \frac{2h\xi_0^*}{\lambda^2 C} \bar{N}^{(1)} + \frac{\xi_1 \xi_2}{\lambda^2 C} \bar{p} + \frac{\xi_1^2}{\lambda^2 C} \bar{p}^{(1)}, \end{aligned} \quad /3/$$

де $\frac{1}{g_1} = \frac{1}{g_1} + \frac{\xi_1^2}{g_2}$; $\frac{1}{g_2} = \frac{1}{g_1} - \frac{\xi_1 \xi_2}{g_2}$; ξ_1 і ξ_2 - відстані волокон стержня від нейтрального шару /осі/ відповідно внутрішнього та зовнішнього краю; $b = \xi_1 + \xi_2$ - висота стержня; $2h$ - товщина пластинки; $2h^*$ - товщина того краю стержня, який не дотикається до пластинки; $g_1 = E^* F_0$ - жорсткість стержня на розтяг; $g_2 = E^* J_x$, $A = E^* J_y$ - жорсткості стержня на згин; C - жорсткість стержня на кручення; F_0 - площа поперечного перерізу стержня; E^* - модуль пружності матеріалу стержня; J_x і J_y - моменти інерції перерізу.

У трансформантах Фур'є /2/ формули, що зв'язують компоненти переміщень елементів границі пружної півплощини з прикладеними до границі півплощини зусиллями /1/ мають вигляд [1]

$$\begin{aligned} (i\lambda^3 \bar{u})|_{y=0} &= \lambda^2 (\alpha_1 \bar{N}^{(i)} + \beta_1 \bar{T}^{(i)}), \quad (\lambda^3 \bar{v})|_{y=0} = i\lambda^2 (\alpha_2 \bar{N}^{(i)} + \beta_2 \bar{T}^{(i)}), \\ (\bar{w})|_{y=0} &= \frac{\delta_1}{\lambda^2} \bar{m}^{(i)} - \frac{i\delta_2}{\lambda^2} \bar{p}^{(i)}, \quad \left(\frac{d\bar{w}}{dy}\right)|_{y=0} = -\frac{\delta_1}{\lambda} \bar{m}^{(i)} - \frac{\delta_2}{\lambda^2} \bar{p}^{(i)}, \quad /4/ \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu_1 \mu_2 a_{11} - a_{12}, \quad \alpha_2 = \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2) a_{11} - 2\mu_1 \mu_2 a_{16} + a_{20}, \quad \beta_1 = (\mu_1 + \mu_2) a_{11} - a_{16}, \\ \beta_2 &= (\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2) a_{11} - 2(\mu_1 + \mu_2) a_{16} + a_{12} + a_{10}, \quad \delta_1 = \frac{1}{D_0} [(\mu_1^* + \mu_2^*) D_{22} + 2D_{66}], \\ \delta_2 &= \frac{1}{D_0} [(\mu_1^{*2} + \mu_1^* \mu_2^* + \mu_2^{*2}) D_{22} + 4(\mu_1^* \mu_2^*) D_{26} + D_{12} + 4D_{66}], \quad \delta_3 = \frac{1}{D_0} [\mu_1^* \mu_2^* D_{22} - D_{12}], \\ \delta_4 &= \frac{1}{D_0} [\mu_1^* \mu_2^* (\mu_1^* + \mu_2^*) D_{22} + 4\mu_1^* \mu_2^* D_{26} - 2D_{12}], \quad D_0 = \mu_1^* \mu_2^* D_{22}^2 + 2\mu_1^* \mu_2^* (\mu_1^* + \mu_2^*) D_{26} D_{22} + /5/ \\ &+ 8\mu_1^* \mu_2^* D_{26}^2 + (\mu_1^{*2} + \mu_1^* \mu_2^* + \mu_2^{*2}) D_{12} D_{22} + 4(\mu_1^* + \mu_2^*) D_{12} D_{26} + D_{12} (D_{12} + 4D_{66}) - \\ &- \mu_1^* \mu_2^* D_{22} (D_{12} + 4D_{66}) - 2(\mu_1^* + \mu_2^*) D_{12} D_{66} - 4D_{26} D_{12}, \end{aligned}$$

де a_{ij} і D_{ij} - пружні і жорсткісні сталі анізотропної пластинки;
 μ_1 і μ_2 , μ_1^* і μ_2^* - корені наступних характеристичних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{16}\mu + a_{22} &= 0, \\ D_{22}\mu^{*4} + 4D_{26}\mu^{*3} + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^{*2} + 4D_{12}\mu^* + D_{11} &= 0. \end{aligned} \quad /6/$$

У випадку, коли матеріал пластинки ізотропний, то вирази /5/ спростяться і запишуться таким чином:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1-\nu}{E}, \quad \beta_1 = -\alpha_2 = \frac{2i}{E}, \quad \delta_1 = \delta_2 = -\frac{1+\nu}{2(1-\nu)(3+\nu)}, \\ \delta_3 = \delta_4 = -\frac{2i}{2(1-\nu)(3+\nu)}, \end{aligned} \quad /7/$$

де E - модуль пружності матеріалу пластинки; ν - коефіцієнт Пуассона; $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ - циліндрична жорсткість пластинки.

Спряжуючи відповідно рівняння /3/ і /4/ згідно з граничними умовами /1/, одержуємо систему чотирьох алгебраїчних рівнянь відносно трансформант $\bar{N}^{(i)}$, $\bar{T}^{(i)}$, $\bar{p}^{(i)}$ і $\bar{m}^{(i)}$. Розв'язуючи цю систему рівнянь і використовуючи інтегральне перетворення Фур'є /2/, знайдемо розподіл контактних зусиль на контурі снай пластинки зі стартером,

Наприклад, у випадку навантаження підкріплюючого стержня моментом $m(x)$ одержимо

$$N^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_1(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt,$$

$$T^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_2(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt,$$

/8/

$$P^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_3(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt,$$

$$m^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_4(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt,$$

до

$$R(\lambda) = -\lambda \frac{\varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_1^2 f_2} (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1) \left[\lambda^3 - i \frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} (\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1 - \frac{\varepsilon_1 \delta_2}{c} - \frac{\varepsilon_1 \delta_1}{c}) \lambda^2 + \frac{c}{\varepsilon_1^2 f_2} \left(\frac{f_2}{\lambda} - \frac{f_1}{c} \right) \lambda - i \frac{1}{\varepsilon_1^2 f_2} \right] \left\{ \lambda^4 - i \frac{2h d_2}{d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{\xi_0^{n2}}{\lambda} \right) \lambda^3 + \frac{2h \varepsilon_1 (d_1 + \beta_2)}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \lambda^2 + i \frac{2h \beta_1}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \lambda - \right.$$

/9/

$$- \frac{4h^2}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{\xi_0^{n2}}{\lambda} \right) + \frac{2h \xi_0^{n2} \beta_2}{\varepsilon_1 \beta (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \times$$

$$\times \left[\frac{\lambda^5 + i \left(\frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} + \frac{d_2 c}{\varepsilon_1 \beta_2 f_2} \right) \lambda^4 + \left(\frac{2h \varepsilon_1}{g_2 \beta_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1 \beta_2 f_2} \right) \lambda^3 + i \frac{2h f_1}{g_2 \beta_2 f_2} \lambda^2 + \frac{2h c}{\varepsilon_1 \beta_2 f_2} \lambda - i \frac{2h}{\varepsilon_1 g_2 \beta_2 f_2} \right] \left. \right\} \frac{1}{\lambda^3 - i \frac{c}{\varepsilon_1 f_2} (\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1 - \frac{\varepsilon_1 \delta_2}{c} - \frac{\varepsilon_1 \delta_1}{c}) \lambda^2 + \frac{c}{\varepsilon_1^2 f_2} \left(\frac{f_2}{\lambda} - \frac{f_1}{c} \right) \lambda - i \frac{1}{\varepsilon_1^2 f_2}} \quad /10/$$

$$R_1(\lambda) = \lambda^3 \frac{\varepsilon_1 \xi_0^{n2} \beta_2 f_2}{\lambda c} \left(\lambda^3 + i \frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} \lambda^2 + \frac{2h \varepsilon_1}{g_2 \beta_2} \lambda + i \frac{2h f_1}{g_2 \beta_2 f_2} \right),$$

$$R_2(\lambda) = \lambda^2 \frac{\varepsilon_1 \xi_0^{n2} d_2 f_2}{\lambda c} \left(\lambda^4 + i \frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} \lambda^3 - i \frac{2h}{g_2 d_2} \lambda + \frac{2h}{\varepsilon_1 g_2 d_2 f_2} \right), \quad /11/$$

$$R_3(\lambda) = -\lambda^3 \frac{\varepsilon_1 d_2}{c} (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1) \left(\lambda + i \frac{f_1}{\varepsilon_1 f_2} \right) \left[\lambda^4 - i \frac{2h d_2}{d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{\xi_0^{n2}}{\lambda} \right) + \right.$$

/12/

$$+ \frac{2h \varepsilon_1 (d_1 + \beta_2)}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \lambda^2 + i \frac{2h \beta_1}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \lambda - \frac{4h}{g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 \beta_1)} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{\xi_0^{n2}}{\lambda} \right) \left. \right],$$

$$\begin{aligned}
 R_4(N) = & -i\lambda \frac{\epsilon_1 \delta_1}{\epsilon} (\alpha_1 A - \alpha_2 A) (\lambda^2 + i \frac{\delta_1}{\epsilon_1 \delta_2} \lambda - \frac{1}{\epsilon_1 A \delta_2}) \left[\lambda^4 - i \frac{2h\alpha_2}{\alpha_1 A - \alpha_2 A} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{\epsilon_1^*}{A} \right) \lambda^2 + \right. \\
 & + \frac{2h\epsilon_1 (\alpha_1 + \alpha_2)}{g_2 (\alpha_1 A - \alpha_2 A)} \lambda^2 + i \frac{2h\alpha_1}{g_2 (\alpha_1 A - \alpha_2 A)} \lambda - \frac{4h^2}{g_2 (\alpha_1 A - \alpha_2 A)} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{\epsilon_1^*}{A} \right) = \\
 & \left. - i \frac{2h\epsilon_1^* \alpha_2}{\epsilon_1 A^2 \delta_2 (\alpha_1 A - \alpha_2 A)} \left(\frac{\lambda^2 - i \frac{2h}{g_2 \alpha_2}}{\lambda^2 + i \frac{\delta_1}{\epsilon_1 \delta_2} \lambda - \frac{1}{\epsilon_1 A \delta_2}} \right) \right]. \quad /13/
 \end{aligned}$$

У випадку симетричного підкріплення / $\epsilon_0^* = 0$ / формули /8/, що дають закон розподілу контактних зусиль на контурі спад півплощини з стержнем, збігається з відповідними формулами роботи [2] .

Якщо на стержень діє зосереджений момент m_0 , прикладений на початку координат, то в формулах /8/ необхідно прийняти

$$m(t) = -m_0 \delta(t), \quad /14/$$

і врахувати, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt = e^{i\lambda x}, \quad /15/$$

де $\delta(t)$ - функція Дірака.

На рис. 2, 3 показана залежність нормальної складової контактних зусиль $N^{(i)}$ і моменту $m^{(i)}$ від ексцентриситету підкріплення ϵ_0^* при наступних пружних, жорсткостних і геометричних даних:

для ізотропної пластинки і стержня

$$\begin{aligned}
 \frac{2h^*}{h} = 2,5; \quad b = 2h; \quad \frac{E^*}{E} = 2; \quad \nu^* = \nu = 0,3; \quad C = \frac{E^* A^* b^3 h^*}{(1+\nu^*)}; \quad A = 9249; \\
 \epsilon_1 = \epsilon_2 = h; \quad g_1 = 2E^* b h^*; \quad g_2 = \frac{1}{6} h^* b^3 E^*; \quad A = \frac{1}{3} E^* h^{*3} b; \quad /16/
 \end{aligned}$$

для ортотропної пластинки

$$\frac{E_1}{E_2} = 5,97; \quad \frac{E^*}{E_1} = 3,655; \quad \frac{E^*}{E_2} = 4294; \quad \mu_2 = 0,2. \quad /17/$$

На рис. 2, 3 криві 1-для ізотропної пластинки, а криві 2-для ортотропної пластинки. Обчислення проводили на ЕОМ "Мінськ-22".

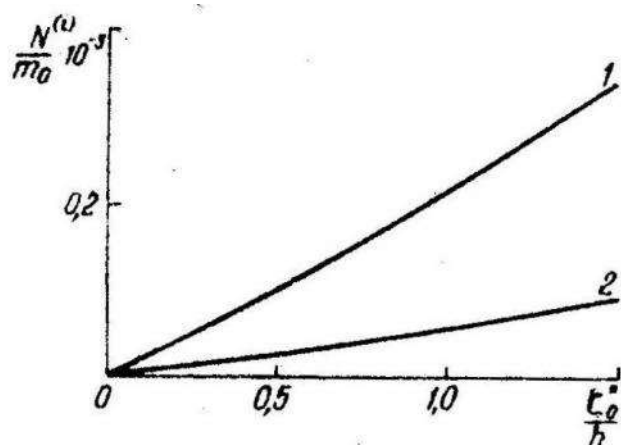


Рис. 2.

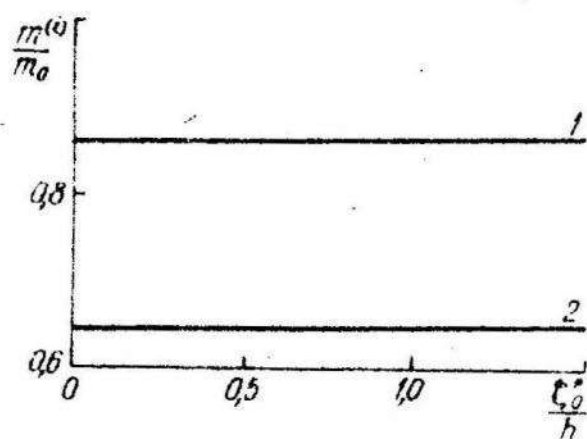


Рис. 3.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехтеоретиздат, 1957.
2. М а р т ы н о в и ч Т.Л. Анизотропная полуплоскость с подкрепленным краем. - "Инженерный журнал", 1955, т. V, вып. 2.

Р.І.МОКРИК, Д.О.ПИР"ЄВ

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СМУГИ МАЛОЇ
ТОВЩИНИ

Нехай у пружну смугу товщиною h , що лежить на жорсткій півплощині, під дією сили і моменту втискується гладкий штамп, нагрітий до температури $T(x)$. Зовні штамп смуга вільна від навантаження і температура її границі дорівнює нулеві. Якщо смуга лежить без тертя на півплощині, то відповідну задачу назвемо задачею 1, якщо смуга зчеплена нерухомо з основою – задачею 2. Тепловий контакт між смугою і основою вважається ідеальним. Необхідно визначити контактні напруження під штампом $q(x)$.

Методами операційного числення описані задачі зводяться до знаходження функції $q^*(x)$ з наступного інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-1}^1 q^*(\xi) K_m\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = Tf(x) - \int_{-1}^1 t(\xi) \theta_m\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi; \quad /1/$$

$-1 \leq x \leq 1$

де $\lambda = ha^{-1}$, $f(x) = E[2\alpha(1-\nu^2)]^{-1} \delta(xa)$, $q^*(x) = q(xa)$, $t(\xi) =$

$= E \alpha [2(1-\nu)]^{-1} T(\xi a)$, $2a$ – величина площадки контакту;
 $\delta(xa)$ – осадка поверхні смуги в області контакту.

Ядра інтегральних рівнянь $K_m(t)$ і функції $\theta_m(t)$ мають вигляд:

$$K_m(t) = \int_0^\infty \frac{L_m(u)}{u} \cos tu du; \quad \theta_m(t) = \int_0^\infty \frac{N_m(u)}{u} \cos tu du;$$

$$L_1(u) = \frac{ch 2u - 1}{sh 2u + 2u}; \quad L_2(u) = \frac{(3-4\nu)shu ch u - u}{u^2 + 4(1-\nu)^2 + (3-4\nu)sh^2 u};$$

$$N_1(u) = \frac{\lambda^* + L_1(u)}{1 + \lambda^* ch u}; \quad \lambda^* = \frac{\lambda c}{\lambda n};$$

$m = 1, 2$ відповідають номерам задач; λ_c , λ_n - відповідно коефіцієнт теплопровідності матеріалу смуги і півплощини

$$N_2(u) = 2(1-\nu) \cdot \frac{u(\lambda^* - thu) - \lambda^*(1-2\nu)thu - 2(1-\nu)\lambda^*thu + 1}{[u^2 + 4(1-\nu)^2 + (3-4\nu)gh^2u](\lambda^* + thu) + \lambda^* + thu}.$$

Якщо прийняти температуру штампів $T(x) = 0$, з інтегральних рівнянь /1/ випливають рівняння чисто силових контактних задач, досліджених в роботах [1-4].

Зауважимо, що випадок $\lambda^* = 0$ відповідає підтримуванню нижньої границі смуги при нульовій температурі, а $(\lambda^*)^{-1} = 0$ теплоізоляції нижньої границі смуги. Для цих випадків введемо позначення

$$N_m(u) = N_{mj}(u)$$

$j = 1$, коли $\lambda^* = 0$ і $j = 2$, якщо $(\lambda^*)^{-1} = 0$.

Неважко показати, що функції $N_{mj}(u)u^{-1}$ поряд з функціями $L_m(u)u^{-1}$, які описані в роботі [4], зберігають ті ж самі властивості.

Асимптотичні при малих λ розв'язки інтегральних рівнянь /1/ можна одержати шляхом послідовних наближень.

Якщо $t(\xi)$ зобразити у вигляді

$$t(\xi) = \psi\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) + \psi\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) - \psi_1(\xi),$$

то розв'язок інтегрального рівняння /1/ у загальному випадку можна записати у формі

$$q^*(\xi) = q_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\omega}_+^n\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) + \bar{\omega}_-^n\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right)]; \quad |\xi| \leq 1 \quad /2/$$

$$q_0(\xi) = \omega_+^0\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) + \omega_-^0\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) - \omega_1(\xi).$$

Функції $\bar{\omega}_\pm^n(t)$ визначаються послідовно зі співвідношень

$$\int_0^{\frac{2}{\lambda}} \bar{\omega}_\pm^n(\tau) K_m(\tau-t) d\tau = \int_{\frac{2}{\lambda}}^{\infty} \bar{\omega}_\pm^{n-1}(\tau) K_m\left(\frac{2}{\lambda} - \tau - t\right) d\tau - \quad /3/$$

$$- \delta_1^n \int_{\frac{2}{\lambda}}^{\infty} \left\{ \psi_+^n(\tau) - \psi_1[\tau(\lambda\tau-1)] \right\} \Theta_{mj}\left(\frac{2}{\lambda} - \tau - t\right) d\tau;$$

$$\bar{\omega}_{\pm}^{\circ}(\tau) = \omega_{\pm}^{\circ}(\tau) - \omega_{\pm}[\mp(\lambda\tau - 1)]; \quad \delta_1^n = \begin{cases} 1; & n=1, \\ 0; & n>1. \end{cases}$$

Застосовуючи перетворення Фур'є, функцію $\omega_{\pm}(\tau)$ можна записати у вигляді

$$\omega_{\pm}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}(\eta)}{\bar{K}_m(\eta)} e^{-i\eta\tau\lambda^{-1}} d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\Psi}(\eta) \bar{\Theta}_{mj}(\eta)}{\bar{K}_m(\eta)} e^{-i\eta\tau\lambda^{-1}} d\eta,$$

де $\bar{K}_m(\xi) 2^{-1}$, $\bar{\Theta}_{mj}(\xi) 2^{-1}$, $\bar{\Psi}(\xi)$ - трансформанти Фур'є відповідно функцій $K_m(t)$, $\Theta_{mj}(t)$, $\Psi_1(\lambda t)$, а

$$\bar{\Phi}(\xi) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) + f_+(t) + f_-(t)] e^{i\xi t\lambda^{-1}} dt.$$

Функції $f_-(t)$, $f_+(t)$ є продовженням функції $f(t)$ довільним чином відповідно в області $-\infty < t < -1$ і $1 < t < \infty$

Використовуючи метод Вінера - Хопфа функції $\omega_{\pm}^{\circ}(\xi)$ визначаємо за формулами

$$\omega_{\pm}^{\circ}(\xi) = S(\xi) \chi_{\pm} + S(\xi) \chi_{\mp}. \quad /4/$$

Тут введені позначення:

$$\chi_{\pm}(t) = \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \bar{\Phi}_{\pm}(\eta) \chi(t, \eta) d\eta, \quad \chi(t, \eta) = \frac{e^{i\eta\lambda^{-1}t}}{\bar{K}_m^-(\eta)(\eta - t)},$$

$$\chi_{\pm}(t) = \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \bar{\Psi}_{\mp}(\eta) \chi(t, \eta) d\eta, \quad \chi(t, \eta) = \frac{\bar{\Theta}_{mj}(\eta)}{\bar{K}_m^-(\eta)(\eta - t)},$$

$$\bar{\Psi}_{\mp}(\eta) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_0^{\infty} \Psi_{\mp}(\xi) e^{i\eta\xi\lambda^{-1}} d\xi, \quad S(x)f = \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \frac{f(t) e^{-itx}}{2\pi i \bar{K}_m^+(t)} dt.$$

$\varepsilon > 0$; ε - як завгодно мале фіксоване число

$$\bar{\Phi}_{\pm}(\eta) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\pm\xi) + f_{\pm}(\pm\xi)] e^{i\eta\xi\lambda^{-1}} d\xi$$

$\bar{K}_m(z) = \bar{K}_m^+(z) \bar{K}_m^-(z)$, причому $\bar{K}_m^+(z)$ - регулярна функція в області $\Omega \cup (Im z > 0)$; $\bar{K}_m^-(z)$ - регулярна функція в області $\Omega \cup (Im z < 0)$; Ω - область регулярності функції $\bar{K}_m(z)$ і в якій відсутні її нулі.

$$\text{Розглянемо важливий частинний випадок } f(x) = E \delta [2\alpha(1-\nu^2)]^{-1} = f_0 = \text{const}, \\ t(x) = E \alpha_T T_0 [2(1-\nu)]^{-1} = t_0 = \text{const}$$

/плоский штамп нагрівтий до постійної температури/. Тоді $\omega_i(x)$ матиме вигляд

$$\omega_i(x) = f_0 (D_m \lambda)^{-1} + t_0 A_{mj} D_m^{-1}.$$

Використовуючи ідею наближеної факторизації [6], апроксимуємо функції $L_m(u)u^{-1}$ і $N_{mj}(u)u^{-1}$ виразами

$$\frac{L_m(u)}{u} \sim \frac{\sqrt{u^2 + \beta_m^2}}{u^2 + c_m}; \quad \frac{N_{mj}(u)}{u} \sim \frac{\sqrt{u^2 + \beta_m^2} (u^2 + d_{mj})}{(u^2 + c_m)(u^2 + \beta_{mj})}, \quad /5/$$

задача 1: $\beta_1 = 1$, $c_1 = 2$; задача 2: $\beta_2 = 1,037$, $c_2 = 2,54$ при $\nu = 0,3$;

задача 1-1: $d_{11} = 0$, $\beta_{11} = 0$; задача 1-2: $d_{12} = 3$, $\beta_{12} = 1,5$;

задача 2-1: $d_{21} = 1,852$, $\beta_{21} = 1,059$ при $\nu = 0,3$; задача 2-2: $d_{22} = 3,749$, $\beta_{22} = 1,071$ при $\nu = 0,3$.

З /4/, враховуючи /5/, одержуємо формулу для контактного напруження в нульовому наближенні:

$$q_w(\tau) = \left[\frac{E \delta_0 \omega(\tau)}{2(1-\nu^2) D_m \beta_m \alpha} + \psi(\tau) \frac{E T_0 \alpha_T \lambda s_1}{2(1-\nu) \beta_m} \right] \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}; \quad |\tau| \leq 1$$

$$\omega(\tau) = \sqrt{\frac{D_m \beta_m}{\pi}} (d_- e^{-\frac{\tau^2}{2}} + d_+ e^{-\frac{\tau^2}{2}}) + [\text{erf}(d_+) + \text{erf}(d_-) - 1] d_+ d_-;$$

$$\psi(\tau) = s_2 \sqrt{\frac{\beta_m}{\pi}} (d_- e^{-\frac{\tau^2}{2}} + d_+ e^{-\frac{\tau^2}{2}}) - [2 \text{ch}(\beta_+^2) + 2 \text{ch}(\beta_-^2) +$$

$$+ \frac{d_{mj}}{\beta_{mj} s_1} - e^{\beta_+^2} \text{erf}(f_+) - e^{\beta_-^2} \text{erf}(f_-)] d_+ d_-.$$

Аналогічно дістаємо вираз для прогину поза штампом

$$\delta(a - a\lambda t) = \delta_0 [1 - \operatorname{erf} \sqrt{B_m t} + \sqrt{1 - k_m} \operatorname{erf} \sqrt{B_m(1 - k_m)t} e^{\sqrt{C_m} t}] + \\ + h(1 + \nu) d_T T_0 S_1 S_3 [\sqrt{B_m(1 - k_m)} e^{\sqrt{C_m} t} \operatorname{erf} \sqrt{B_m(1 - k_m)t} - \\ - \sqrt{B_m(1 - k_{mj})} e^{\sqrt{\beta_{mj}} t} \operatorname{erf} \sqrt{B_m(1 - k_{mj})t}]; \quad -\infty < t < 0,$$

де $D_m = B_m C_m^{-1}$; $k_m = \sqrt{C_m} B_m^{-1}$, $k_{mj} = \sqrt{\beta_{mj}} B_m^{-1}$, $A_{mj} = B_m d_{mj} (C_m \beta_{mj})^{-1}$;

$$\alpha_{\pm} = [(1 \pm \tau) B_m \lambda^{-1}]^{0.5}; \quad \beta_{\pm} = [(1 \pm \tau) \sqrt{\beta_{mj}} \lambda^{-1}]^{0.5}; \quad \gamma_{\pm} = (\alpha_{\pm}^2 + \beta_{\pm}^2)^{0.5};$$

$$S_1 = \frac{\alpha_{mj} - \beta_{mj}}{2\beta_{mj}}; \quad S_2 = \frac{(\sqrt{\beta_{mj}} + B_m)^{0.5}}{\sqrt{C_m} + \sqrt{\beta_{mj}}}; \quad S_3 = \frac{(\sqrt{\beta_{mj}} + B_m)^{0.5}}{C_m - \beta_{mj}}.$$

При $T_0 = 0$ одержуємо результати чисто силової контактної задачі. Використовуючи знайдене нульове наближення $q_0(\tau)$, з [3] знаходимо $\bar{\omega}'(\tau)$ і так далі. Вираз для $\bar{\omega}'(\tau)$ з точністю до членів порядку λ^μ ($\mu > 1$) має вигляд

$$\bar{\omega}'(\tau) = \frac{f_0}{D_m \lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{-B_m \frac{\tau^2}{\lambda}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{C_m}} \frac{1 - k_m}{1 + k_m} \frac{e^{-B_m \tau}}{\sqrt{\pi \tau}} + (1 - k_m) \times \right. \\ \times \sqrt{D_m} e^{B_m \tau} [\operatorname{erf} \sqrt{2B_m \tau} - 1] \left. \right\} + t_0 S_1 \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{-B_m \frac{\tau^2}{\lambda}} \times \right. \\ \times \left[\sqrt{\frac{2}{B_m}} \frac{1}{1 + k_m} \frac{e^{-B_m \tau}}{\sqrt{\pi \tau}} + e^{B_m \tau} (\operatorname{erf} \sqrt{2B_m \tau} - 1) \right] \left(S_2 - \frac{1}{(B_m + \sqrt{C_m})^{0.5}} \right) - \\ - e^{\sqrt{\beta_{mj}} \frac{\tau^2}{\lambda}} \left[S_2 \frac{e^{-\beta_{mj} \tau}}{\sqrt{\pi \tau}} + e^{\sqrt{\beta_{mj}} \tau} (\operatorname{erf} \sqrt{\beta_{mj}(1 + k_{mj}) \tau} - 1) \right] \left. \right\}; \quad 0 \leq \tau < \infty.$$

Обчислення показали, що на відміну від чисто силових контактних задач [1, 3, 5], у контактних задачах термопружності нульове наближення є недостатнім, необхідним є знаходження принаймні першого наближення. У розглянутому частинному випадку врахування другого наближення при $\lambda < 1$ змінює розв'язок менше ніж на 0,2%.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А л е к с а н д р о в В.М.. Оприближенном решении одного типа интегральных уравнений. - ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
2. А л е к с а н д р о в В.М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. - ПММ, 1963, т.27, вып.5.
3. Б а б е ш к о В.А. Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике. - ДАН СССР, 1969, т.186, № 6.
4. А л е к с а н д р о в В.М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. - ПММ, 1968, т.32, вып. 5.
5. А л е к с а н д р о в В.М. Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя. - ПММ, 1969, т.33, вып. 1.
6. Koiter W. J. *Approximate solution of Wigner. Hopf type integral equations with applications, part 1-3.* - Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet., 1954, Bd. 57, No. 5.

УДК 539.3

В.П.ВУШКО

ІЗОТРОПНА ПЛАСТИНКА З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕННЯМ ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної пластинки товщиною $2h$ з еліптичним отвором L , край якого несиметрично підсилений пружним кільцем сталого перерізу. Площина осі кільця зміщена від середньої площини пластинки на величину ξ_0 /ексцентриситет підсилення/. Напруженодеформований стан підсилюючого кільця описується рівняннями теорії тонких криволінійних стержнів. Незалежно від навантаження пластинка знає згинальний і узагальнено плоского напружених станів.

Будемо вважати, що підсилюючий стержень вільний від навантаження, а напруження та згинальні моменти у віддалених /від отвору/ частинах пластинки дорівнюють: $\sigma_x^\infty = p$; $\sigma_y^\infty = q$; $\tau_{xy}^\infty = z$; $M_x^\infty = M_1$;
 $M_y^\infty = M_2$; $H_{xy}^\infty = M_{12}$

Область D , яка міститься між двома конформальними еліпсами $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$, причому контур $\mathcal{L}_2$ віддалений в нескінченність, відобразимо на концентричне кільце, обмежене колами γ_1 і γ_2 радіусів $\rho_1 = 1$ і $\rho_2 = \infty$, площини ζ за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + \frac{m}{\zeta}); \quad m = \frac{a_1 - b_1}{2}, \quad R = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad /1/$$

де a_1 і b_1 - півосі еліпса $\mathcal{L}_1$.

У перетвореній області /1/ крайові умови нашої задачі при відсутності навантаження на кільце, згідно з формулами /5/-/12/ роботи [1] набувають вигляду ($z_1 > z_0$)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \int_{\gamma_1 \gamma_2} \overline{\Phi_1(\sigma)} F_1'(\sigma) \omega(\sigma) d\sigma &= -\frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \overline{F_1'(\sigma)} \frac{\delta \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} d\sigma + \\ &+ \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} [(z_1 - z_0) e_0 - i \frac{z_0 z_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma}] d \left[\frac{\overline{F_1(\sigma)}}{\omega(\sigma)} \right] + \int_{\gamma_2} (N_2 + iT_2) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma; \\ \int_{\gamma_2} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \kappa \int_{\gamma_1} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \int_{\gamma_1 \gamma_2} \overline{\Phi_1(\sigma)} F_1'(\sigma) \omega(\sigma) d\sigma &= \\ = -2\mu \int_{\gamma_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + i \theta_\sigma - \gamma_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - \frac{1}{z_1} \theta_\sigma \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \\ &+ \int_{\gamma_2} (N_2 + iT_2) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma; \\ (1 + \kappa) \int_{\gamma_1} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma &= 2\mu \int_{\gamma_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + i \theta_\sigma - \right. \\ &- \gamma_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - \frac{1}{z_1} \theta_\sigma \right) \left. \right] \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \overline{F_1'(\sigma)} \frac{\delta \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} d\sigma + \\ &+ \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} [(z_1 - z_0) e_0 + i \frac{z_0 z_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma}] d \left[\frac{\overline{F_1(\sigma)}}{\omega(\sigma)} \right]; \\ \int_{\gamma_1 \gamma_2} \overline{\Psi_1(\sigma)} F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma &= (1 + \kappa) \int_{\gamma_1} \Phi_1(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\gamma_1 \gamma_2} \overline{\Phi_1(\sigma)} F_1'(\sigma) \omega(\sigma) d\sigma - \end{aligned}$$

$$-2\mu \int_{\delta_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + i\theta_\sigma - z_0 \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - \frac{1}{z_1} \theta_\sigma \right) \right] F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int_{\delta_2} (N_2 + iT_2) F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma;$$

$$\mathcal{K}^* \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega(\sigma) d\sigma = \mathcal{D}^* \int_{\delta_2} J_2(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \mathcal{D}^* \int_{\delta_1} \frac{z_1}{z_0} \left[\frac{C}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - i \frac{A}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + \frac{i\sigma \omega'(\sigma)}{z_1 |\omega'(\sigma)|} (C\theta_\sigma + iA\theta_\sigma) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma +$$

$$+ z_0^* \mathcal{D}^* \left\{ \int_{\delta_1} \left[(z_0 - z_1) e_0 + i \frac{h_2 z_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\overline{F_1(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \right] + \int_{\delta_1} e_0 \overline{F_1(\sigma)} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} d\sigma \right\};$$

$$\mathcal{K}^* \int_{\delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\delta_1} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega(\sigma) d\sigma - \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega(\sigma) d\sigma =$$

$$= \mathcal{D}^* \int_{\delta_2} J_2(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\delta_1} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\sigma - i \left(\frac{z_0}{z_1} \theta_\sigma - i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma;$$

$$(\mathcal{K}^* - 1) \int_{\delta_1} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma = - \int_{\delta_1} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\sigma - i \left(\frac{z_0}{z_1} \theta_\sigma - i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma +$$

$$+ \mathcal{D}^* \int_{\delta_1} \frac{z_1}{z_0} \left[\frac{C}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} - i \frac{A}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} + \frac{i\sigma \omega'(\sigma)}{z_1 |\omega'(\sigma)|} (C\theta_\sigma + iA\theta_\sigma) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma -$$

$$- z_0^* \mathcal{D}^* \left\{ \int_{\delta_1} \left[(z_0 - z_1) e_0 + i \frac{h_2 z_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\sigma^2 \overline{F_1(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \right] - \int_{\delta_1} e_0 \overline{F_1(\sigma)} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} d\sigma \right\}$$

$$\int_{\delta_1 + \delta_2} \overline{\Psi_1^*(\sigma)} F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma = (1 - \mathcal{K}^*) \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\delta_1 + \delta_2} \Phi_1^*(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \mathcal{D}^* \int_{\delta_2} J_2(\sigma) \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\delta_1} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\sigma - i \left(\frac{z_0}{z_1} \theta_\sigma - i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\sigma,$$

де σ - афікс точки контура $\delta = \delta_1 + \delta_2$; $F_1(z)$ - довільна функція, голоморфна в перетвореній області

$$N_2 + iT_2 = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{2} - \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty - 2i\tau_\infty}{2} \frac{\rho_2^2 \overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma^2 \omega'(\sigma)};$$

$$J_2(\sigma) = \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} - \frac{M_y^\infty - M_x^\infty - 2iH_{xy}}{2} \cdot \frac{\rho_2^2 \overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma^2 \omega'(\sigma)}$$

Комплексні потенціали $\Phi_1(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$, $\Phi^*(\zeta) = \Phi^*[\omega(\zeta)]$,
 $\Psi_1(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$, $\Psi^*(\zeta) = \Psi^*[\omega(\zeta)]$ і довільна функція
 $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ зовні кола γ_1 допускають розклади:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta^{-k}; \quad \Phi^*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^* \zeta^{-k}; \quad \Psi_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^{-k}; \\ \Psi^*(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^{-k}; \quad F_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}, \quad \text{причому } B_0 = \frac{G_x^\infty + G_y^\infty}{4}; \\ A_0 &= \frac{G_y^\infty - G_x^\infty + 2iG_{xy}}{2}; \quad B_0^* = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}; \quad A_0^* = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}}{2D(1-\nu)}; \\ B_1 &= B_1^* = A_1 = A_1^* = 0. \end{aligned}$$

Величини e_0, θ_0, θ_n і θ_τ , що описують деформацію стержня, подамо на γ_1 у формі комплексних рядів Фур'є

$$\begin{aligned} e_0 &= d_0 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sigma^k; \quad \theta_0 = \beta_0 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k; \quad \theta_n = f_0 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sigma^k; \\ \theta_\tau &= \delta_0 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sigma^k. \end{aligned}$$

При наявності повної симетрії задачі відносно координатних осей x, y , напрямлених вздовж півоєї еліптичного отвору, розклади набувають вигляду

$$e_0 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (\sigma^k + \bar{\sigma}^k); \quad \theta_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\sigma^k - \bar{\sigma}^k); \quad \theta_n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (\sigma^k - \bar{\sigma}^k);$$

$$\theta_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k (\sigma^k + \bar{\sigma}^k),$$

де $d_k, i\beta_k, if_k, \delta_k$ - дійсні величини.

Внесемо розклади /11/-/12/ у граничні умови /3/-/10/ і виконаємо інтегрування. Приймаючи при цьому всі E_j , крім E_n , рівними нулю, одержимо /при $\rho_2 \rightarrow \infty$ / нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу шуканих функцій

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_{kn}^i d_k + \alpha_{kn}^i \delta_k) + \sum_{k=2}^{\infty} (b_{kn}^i \beta_k^* + c_{kn}^i f_k^*) + \sum_{k=2}^{\infty} (p_{kn}^i A_k + f_{kn}^i A_k^* + g_{kn}^i B_k^* + \\ + h_{kn}^i B_k^*) = D_n^i; \quad (i = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \quad (n = (3, 5, 7, \dots)) \\ \beta_k^* = i\beta_k, \quad f_k^* = if_k; \quad A_k, B_k, A_k^*, B_k^* - \text{дійсні числа.} \end{aligned}$$

Коефіцієнти системи /13/ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 a_{kn}^1 &= c_0 n \left[4k_1 + \pi \delta_{kn} m^{\frac{k-n-1}{2}} \right]; \\
 b_{kn}^1 &= -\frac{1}{3} c_0 \delta^2_{kn} L_1; \\
 e_{kn}^1 &= S_1; \quad c_{kn}^1 = a_{kn}^1 = f_{kn}^1 = g_{kn}^1 = h_{kn}^1 = 0; \\
 D_n^1 &= (1_0 + 2m B_0) \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^2 &= 2\mu \left\{ S_1 - m \delta_{k,0} \cdot \delta_{n,1} - \frac{\delta(1-m^2)}{\pi} M_1 \right\}; \\
 b_{kn}^2 &= 2\mu \left[\frac{\delta^2_{kn}}{\pi} K_1 - S_1 \right]; \quad c_{kn}^2 = -\frac{4\mu \delta_{kn}}{\pi} K_1; \\
 d_{kn}^2 &= \frac{4\mu \delta_{kn}}{\pi} (1-m^2) M_1; \quad e_{kn}^2 = \mathcal{H} S_1; \\
 f_{kn}^2 &= g_{kn}^2 = h_{kn}^2 = 0; \quad D_n^2 = [(1-\mathcal{H})m B_0 + A_0] \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^3 &= -2\mu \left[S_3 + \delta_{k,0} \cdot \delta_{n,1} - \frac{\delta}{\pi} (1-m^2) M_3 \right] - 2\pi c_0 n \left[\frac{2}{\pi} K_3 + \frac{\delta_{kn}}{2} L_1 \right]; \\
 b_{kn}^3 &= 2\mu \left[\frac{\delta_{kn}^2}{\pi} K_3 + S_3 \right] + \frac{c_0}{3} \delta^2_{kn} L_3; \\
 c_{kn}^3 &= \frac{4\mu \delta_{kn}}{\pi} K_3; \quad d_{kn}^3 = -\frac{4\mu \delta_{kn}}{\pi} (1-m^2) M_3; \\
 e_{kn}^3 &= f_{kn}^3 = g_{kn}^3 = h_{kn}^3 = 0; \quad D_n^3 = -(1+\mathcal{H}) B_0 \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^4 &= -a_{kn}^3 \text{ при } E^* = 0; \quad b_{kn}^4 = -b_{kn}^3 \text{ при } E^* = 0; \quad c_{kn}^4 = -c_{kn}^3; \\
 d_{kn}^4 &= -d_{kn}^3; \quad e_{kn}^4 = n S_2; \quad f_{kn}^4 = -S_1; \quad g_{kn}^4 = h_{kn}^4 = 0; \\
 D_n^4 &= -[(1-\mathcal{H}) B_0 + m A_0] \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^5 &= -3c_1 \delta_1 \delta_2 n \left[\frac{\delta_{kn}}{2} m^{\frac{k-n-1}{2}} + \frac{2}{\pi} K_1 \right]; \quad b_{kn}^5 = c_1 \delta_1 \delta_2 \frac{\delta^2_{kn}}{2\pi} L_1; \\
 d_{kn}^5 &= -c_2 \mu \delta \left[m^{\frac{k-n-1}{2}} - \frac{\delta}{\pi(1-m^2)} N_2 \right] + c_1 \delta^2 \frac{n}{1-m^2} P_1; \\
 c_{kn}^5 &= -c_1 \delta^2 n \delta \left[m^{\frac{k-n-1}{2}} + \frac{\delta}{\pi(1-m^2)} N_1 \right] - c_2 \frac{n B}{1-m^2} P_2; \\
 e_{kn}^5 &= f_{kn}^5 = h_{kn}^5 = 0; \quad g_{kn}^5 = \mathcal{H}^* S_1; \quad D_n^5 = [A_0^* + (1+\mathcal{H}^*)m B_0^*] \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^6 &= b_{kn}^6 = e_{kn}^6 = f_{kn}^6 = h_{kn}^6 = 0; \quad c_{kn}^6 = \frac{2n}{\pi} K_2 - \frac{n\delta}{2(1-m^4)} P_2; \\
 d_{kn}^6 &= -\frac{2n}{\pi} K_1 - \frac{n\delta_{kn}}{2} m^{\frac{k-n-1}{2}}; \quad g_{kn}^6 = S_1; \quad D_n^6 = (2m B_0^* + A_0^*) \delta_{n,1}; \\
 a_{kn}^7 &= 3c_1 \delta_1 \delta_2 n \left[\frac{\delta_{kn}}{2} P_1 + \frac{2}{\pi} K_2 \right]; \quad b_{kn}^7 = -c_1 \delta_1 \delta_2 n \delta \frac{\delta^2_{kn}}{2\pi} L_1;
 \end{aligned}$$

$$c_{kn}^{\pm} = \frac{2n}{\mathcal{F}} K_4 - \frac{n\delta}{2(1-m^2)} P_4 + C_1 \delta \mathcal{F}^2 n \kappa [R_2 + \frac{\delta}{\mathcal{F}(1-m^2)} N_2] + C_2 \beta \frac{n}{1-m^2} P_4;$$

$$d_{kn}^{\pm} = -\frac{2n}{\mathcal{F}} K_3 - \frac{n\delta\kappa}{2} R_1 + C_2 \beta n \kappa [R_1 - \frac{\delta}{\mathcal{F}(1-m^2)} N_4] - C_1 \mathcal{F}^2 \delta \frac{n}{2(1-m^2)} P_3;$$

$$e_{kn}^{\pm} = f_{kn}^{\pm} = g_{kn}^{\pm} = h_{kn}^{\pm} = 0; \quad D_n^{\pm} = (1 - \mathcal{K}^*) B_0^* \delta_{n,1};$$

$$\alpha_{kn}^{\pm} = \beta_{kn}^{\pm} = e_{kn}^{\pm} = f_{kn}^{\pm} = 0; \quad c_{kn}^{\pm} = -c_{kn}^{\mp} \text{ при } \nu = -1; \quad d_{kn}^{\pm} = -d_{kn}^{\mp} \text{ при } \nu = 1;$$

$$g_{kn}^{\pm} = n S_2; \quad h_{kn}^{\pm} = -S_1; \quad D_n^{\pm} = \left\{ \left[\frac{2(1+\nu)}{1-\nu} + \mathcal{K}^* - 1 \right] B_0^* - m A_0^* \right\} \delta_{n,1}.$$

Тут введені такі позначення:

$$K_1 = J_{k+n+1} + J_{-k-n+1} - m(J_{k+n-1} + J_{-k+n-1});$$

$$K_2 = J_{k+n+1} - J_{-k+n+1} - m(J_{k+n-1} - J_{-k+n-1});$$

$$K_3 = J_{k-n+1} + J_{-k-n+1} - m(J_{k-n-1} + J_{-k-n-1});$$

$$K_4 = J_{k-n+1} - J_{-k-n+1} - m(J_{k-n-1} - J_{-k-n-1});$$

$$L_1 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j (2j+n+1) (J_{k+n+2j+1} + J_{-k+n+2j+1});$$

$$L_2 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j (2j-m+1) (J_{k-n+2j+1} + J_{-k-n+2j+1});$$

$$M_1 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j (J_{k+n+2j+1} + J_{-k+n+2j+1});$$

$$M_2 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j (J_{k-n+2j+1} + J_{-k-n+2j+1});$$

$$N_1 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j [j(1-m^2)+1] (J_{k+n+2j+1} + J_{-k+n+2j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^j (J_{k+n-2j+1} + J_{-k-n-2j+1});$$

$$N_2 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j [j(1-m^2)+1] (J_{k+n+2j+1} - J_{-k+n+2j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^j (J_{k+n-2j+1} - J_{-k-n-2j+1});$$

$$N_3 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j [j(1-m^2)+1] (J_{k-n+2j+1} + J_{-k-n+2j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^j (J_{k-n-2j+1} + J_{-k-n-2j+1});$$

$$N_4 = \sum_{j=0}^{\infty} m^j [j(1-m^2)+1] (J_{k-n+2j+1} - J_{-k-n+2j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^j (J_{k-n-2j+1} - J_{-k-n-2j+1});$$

$$P_j = m^{\frac{n+k+1}{2}} + m^{\frac{n-k+1}{2(n-k+2)}} + \frac{(k-n-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n-k-1}{2(n-k+2)}};$$

$$P_2 = m^{\frac{n+k-1}{2}} - m^{\frac{n-k-1}{2}} \frac{(n-k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{k-n-1}{2}};$$

$$P_3 = m^{\frac{-n+k-1}{2}} + \frac{(n-k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n-k-1}{2}} + \frac{(n+k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n+k-1}{2}};$$

$$P_4 = m^{\frac{-n+k-1}{2}} + \frac{(n-k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n-k-1}{2}} - \frac{(n+k-1)(1-m^2)+2}{2} m^{\frac{n+k-1}{2}};$$

$$R_1 = m^{\frac{n+k-1}{2}} - m^{\frac{n-k-1}{2}}; J_{2\theta}(m) = m^{\theta} \int_0^1 \frac{x^{1/2\theta} dx}{V(1-x^2)(1-m^2 x^2)};$$

$$R_2 = m^{\frac{n+k-1}{2}} + m^{\frac{n-k-1}{2}};$$

$$S_1 = \delta_{k,n-1} - m \delta_{k,n-1}; S_2 = \delta_{k,n-1} + m \delta_{k,n-1}; S_3 = \delta_{k,n-1} - m \delta_{k,n-1}.$$

$$C_0 = \frac{E \pi b}{2l}; C_1 = \frac{E}{E} (111) \gamma; C_2 = \frac{3 \mu^*}{E} \gamma^2 \delta^2 (1+\nu)$$

Нормальні напруження в перетині стержня знаходимо за формулою

$$\sigma = E^* \left\{ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos k\theta - \frac{(1-m^2) \sum_{k=0}^{\infty} (\delta \alpha_k - 2 \delta_2 \delta_k) \cos k\theta}{(1+m^2-2m \cos 2\theta)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k (\delta \beta_k^* - 2 \delta_2 \delta_k^*) \cos k\theta}{(1+m^2-2m \cos 2\theta)^{3/2}} \right\}.$$

Зроблені розрахунки при таких даних /пластинка мідна, кільце-стальне/.

$$E^* = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \mu^* = 8,1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; E = 1,15 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \mu = 4,42 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \\ \nu = 0,3; \beta = 0,163; \delta = \frac{b}{R} = 0,1; \gamma = \frac{h}{R} = 3; j_1 = \frac{b}{h} = 2; j_2 = \frac{b}{h}; \delta_2 = \frac{b}{R}.$$

Розглядається два види нагрузки пластинки

$$1) \sigma_x^{\infty} = p; \sigma_y^{\infty} = \tau_{xy}^{\infty} = M_x^{\infty} = M_y^{\infty} = N_{xy}^{\infty} = 0; 2) \sigma_y^{\infty} = p; \sigma_x^{\infty} = \tau_{xy}^{\infty} = M_x^{\infty} = M_y^{\infty} = N_{xy}^{\infty} = 0.$$

Розрахунки велися на ЕОМ "Мінськ-22". Результати обчислень показані на рис. 1, 2.

На рис. 1 зображено залежність кільцевих напружень σ/R в пластинці від ексцентриситету підкріплення $\frac{b}{R}$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ /у першому випадку навантаження/ і при $\theta = 0$ /у другому випадку навантаження/. Криві 1, 2, 3 відносяться відповідно до точок верхньої, середньої і нижньої площин пластинки. Крива 4 зображає відповідні

напруження $\frac{\sigma}{p}$ в кільці на лінії спад з пластинкою.

З результатів наведеного числового аналізу видно, що зміщення площини осі підсилюючого кільця від серединної площини пластинки на величину ξ^* суттєво змінює величину напружень порівняно з симетричним підкріпленням ($\xi^*=0$).

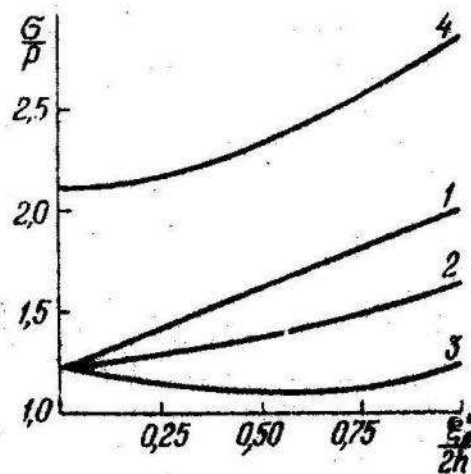


Рис. 1.

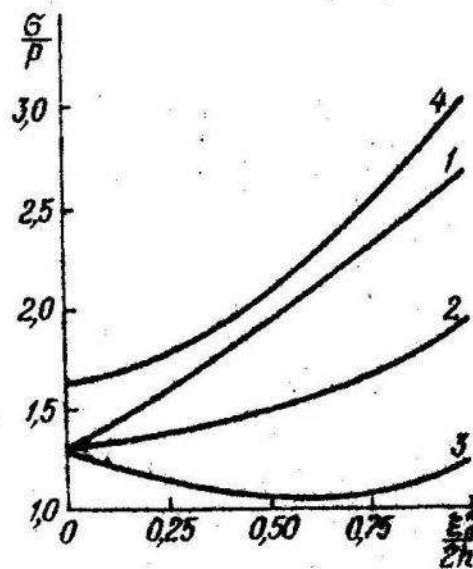


Рис. 2.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В у ш к о В.П., М а р т ы н о в и ч Т.Л. Об одном эффективном методе расчета пластинок с несимметрично подкрепленным краем. - Теория оболочек и пластин. Труды УШ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., "Наука", 1973.

2. М а р т ы н о в и ч Т.Л. К решению задач о напряженном состоянии пластинок с подкрепленным краем. - "Прикладная механика", 1970, т.4, вып. 9.

3. М а р т ы н о в и ч Т.Л., В у ш к о В.П. Об одном подходе к решению задач плоской теории упругости. - "Концентрация напряжений". 1971, вып. 3.

З М І С Т

М А Т Е М А Т И К А

В.О. Г у к е в и ч . Про одне узагальнення теореми Пелі.....	3
І.М. К о л о д і я . Теорема про усувну особливість для узагальнених розв'язків еліптичних рівнянь.....	5
І.М. К о л о д і я . Про ємність множин.....	11
Г.П. Б о й к о . Узагальнена основна крайова задача для рівняння $\Delta^3 u = 0$	16
Г.-В.С. Г у п а л о . Задача Діріхле для рівняння Пуассона..	21
І.С. К р у к . Точність обчислення за номограмами та способи її забезпечення.....	25
С.В. Д е н и с к о . Механізми для утворення парабол.....	33
Л.С.П а р а с ю к , Є.М. П а р а с ю к . Одна крайова задача для змішаного рівняння з параметром.....	37
Б.В.К о в а л ь ч у к , Л.М. Л і с е в и ч . Теореми єдності й апроксимації для S^p - майже періодичних матриць.....	40
К.С.К о с т е н к о . Асимптотична поведінка розв'язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку.....	45
Г.П.Г у б а н о в , Б.В. К о в а л ь ч у к . Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій двох змінних зрізаними середніми від поліномів, що найліпші у заданій системі точок.....	47

П Р И К Л А Д Н А М А Т Е М А Т И К А

Г.Г. Ц е г е л и к . Виділення бісмуг, які не містять нулів подвійних рядів Діріхле.....	49
І.Д. К в і т . Прискорена зміна відбиття.....	52

М.Я. Б а р т і ш . Деякі методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь.....	58
Г.Т. Д у д и н е в и ч . Розрахунок осесиметричного поля системи електродів блочним методом верхньої релаксації.....	62
Ю.М. Щ е р б и н а . Збурений аналог методу дотичних гіпербол.....	66
Г.А. Ш и н к а р е н к о . Інтерпольовання на трикутниках у методі скінченних елементів.....	70
З.О. Ж е л ь ч и к , В.Г. К о с т е н к о . Підвищення порядку апроксимації різницевих схем.....	76
В.В. К а р п о в . Розрахунок плоского екрана кінескопа...	77
Л.Й. О щ и п н о , К.С. І в а н к і в . Застосування геометричного програмування до оптимізації по вазі тонкостінних конструкцій.....	81

М Е Х А Н І К А

І.О. Н і щ е н к о , Т.Л. М а р т и н о в и ч , В.Є. Ю р и н е ц ь . Пружна рівновага несиметрично з'єднаних пластинок....	85
В.В. П о р о х о в с ь к и й , О.П. П і д д у б н я к . Кручення двохшарового пружного пакета жорстким виключенням.....	92
В.Є. Ю р и н е ц ь . Напружений стан пружної пластинки з несиметрично підкріпленням краєм.....	98
Р.І. М о я р и к , Ю.О. П и р " є в . Контактна задача термопружності для смуги малої товщини	106
В.П. В у ш к о . Ізотропна пластинка з несиметрично підкріпленням еліптичним отвором.....	110

УДК 517.512

Об одном обобщении теоремы Пэли. Г у к е в и ч В.О. Про одне узагальнення теореми Пелі. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 3-5 /укр./.

Доказується теорема, которая является обобщением одного неравенства Пэли для ортогональных систем функций на системах почти ортогональных по Беллману. Библиогр.2.

УДК 517.946

Теорема об устранимой особенности обобщенных решений эллиптических уравнений. К о л о д і й І.М. Теорема про усувну особливість для узагальнених розв'язків еліптичних рівнянь. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична". Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с.5-11 /укр./.

Доказана теорема об устранимой особенности обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений вида $\operatorname{div} A(x, u, u_x) = B(x, u, u_x)$ Библиогр. 3.

УДК 517.946

О емкости множеств. К о л о д і й І.М. Про ємність множин. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 11-15 /укр./.

Введено понятие емкости множества, обобщающее определение Δ - емкости сформулированное в работе Серрина Д. Доказано, что множество нулевой емкости имеет меру нуль. Новое определение можно использовать для доказательства теоремы об устранимой особенности решений вырождающихся квазилинейных уравнений вида $\operatorname{div} A(x, u, u_x) = B(x, u, u_x)$ Библиогр. 4.

УДК 517. 946

Обобщенная основная краевая задача для уравнения $\Delta^3 u = 0$.
Б о й к о Г.П. Узагальнена основна крайова задача для рівняння $\Delta^3 u = 0$. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11, Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 16-21 /укр./.

Получена теорема о представлении решения основной краевой задачи для уравнения $\Delta^3 u = 0$ в ограниченной области из R^3 , когда на границе заданы обобщенные функции. Библиогр. 3.

УДК 517.946.

Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Г у п а л о Г.-В.С.
Задача Діріхле для рівняння Пуассона. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11, Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 21-25 /укр./.

Рассмотрена задача Дирихле для уравнения Пуассона, когда граничные значения и правая часть уравнения являются обобщенными функциями. Определяется, что понимать под решением такой задачи. Доказана единственность решения и лемма о его представлении. Библиогр. 3.

УДК 513.011.3

Точность вычислений по номограммам и методы ее обеспечения.
К р у к І.С. Точність обчислення за номограмами та способи її забезпечення. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11, Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 23-33 /укр./.

На номограмме квадратного уравнения рассматриваются источники возникновения ошибок и даются способы оценки точности вычислений по этой номограмме, рассматривая ее в графической плоскости. Ил. 5. Библиогр. 2.

Механізми для утворення парабол. Д е н и с к о С.В. Механізми для утворення парабол. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип.11. Теоретична та прикладна математика, Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с.33-37 /укр./.

Рассматривается механизм, состоящий из шести ползунов, двух кривошипов и сложного зубчатого механизма. Четыре ползуна перемещаются сложным зубчатым механизмом вдоль неподвижных направляющих. Два из них образуют вращательные пары с ползунами, которые перемещаются вдоль кривошипов, присоединенных к двум другим ползунам. Исследуются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка пересечения кривошипов описывала дугу параболы. Ил. 1. Библиогр. 1.

Одна граничная задача для смешанного уравнения с параметром, Парасюк Л.С., Парасюк Е.М. Одна крайова задача для змішаного рівняння з параметром. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 37-40 /укр./.

Рассматривается граничная задача для эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с параметром, вырождающегося на плоскости $Z=0$. Путем применения преобразования Ханкеля по цилиндрической координате Z и с помощью функции Магдональда задача сводится к парным интегральным уравнениям, решение которых приводится. Библиогр. 5.

УДК 517. 917

Теоремы единственности и аппроксимации для S_1^p - почти периодических матриц. К о в а л ь ч у к Б.В., Л і с е в и ч Л.М. Теоремы єдиності й апроксимації для S' - майже періодичних матриць. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 40-44 /укр./.

Дается понятие свертки и выводится равенство Парсеваля для S^4 - почти периодических матриц. Доказываются теоремы единственности и аппроксимации для S'' - почти периодических матриц. Рассматриваются также вопросы равномерной сходимости по S'' - норме и суммирования по обобщенному методу Бохнера-Фейера рядов Фурье S'' - почти периодических матриц. Библиогр. 3.

УДК 517.913

Асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. К о с т е н к о К.С. Асимптотична поведінка розв'язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 45-46 /укр./.

При определенных условиях найдены асимптотические представления фундаментальной системы решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка при $x \rightarrow \infty$. Библиогр. 2.

УДК 517.512

Оценка остатка при приближении периодических функций двух переменных срезами средними от полиномов, наилучших в заданной системе точек. Г у б а н о в Г.П., К о в а л ь ч у к Б.В.
Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій двох змінних зрізаними середніми від поліномів, що найліпші у заданій системі точок. – "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 47-49 /укр./.

Получена асимптотическая оценка верхней грани уклонений функций $f(x,y)$ класса $H_{\omega_1\omega_2}$, имеющих заданные выпуклые модули непрерывности ω_1, ω_2 от срезованных средних арифметических, построенных на базе полиномов, наилучших в заданной системе точек. Библиогр. 3.

УДК 517.55

Выделение биполос, не содержащих нулей двойных рядов Дирихле. Ц е г е л и к Г.Г. Виділення бісполуг, які не містять нулів подвійних рядів Діріхле. – "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 49-52 /укр./.

Рассматриваются двойные ряды Дирихле. С помощью параметров устанавливаются достаточные условия существования "максимальных" областей, не содержащих нулей этих рядов. Библиогр. 5.

УДК 519.21

Ускоренное изменение отображения. К в і т І.Д. Прискорена зміна відбиття. – "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа" Вид-во При Львів. ун-ті, 1976, с. 52-57 /укр./.

Доказується теорема об еквівалентності класу отображень позитивнозначних случайних величин класу ускоренно изменяющихся в окрестности единицы функций. Библиогр. 1.

УДК 518:517.948

Некоторые методы решения нелинейных операторных уравнений.
Б а р т і ш М.Я. Деякі методи розв'язування нелінійних операторних рівнянь. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 58-62 /укр./.

Для решения нелинейных операторных уравнений рассмотрено одношаговый метод решения достаточно общей формы. Исследовано сходимость, устойчивость, дано рекомендации для практического использования в случае "плохого" начального приближения. Библиогр. 4.

УДК 517.9

Расчет осесимметричного поля системы электродов блочным методом верхней релаксации. Д у д и к е в и ч Г.Г. Розрахунок осесимметричного поля системи електродів блочним методом верхньої релаксації. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львівському ун-ті, 1976, с. 62-66 /укр./.

Рассматривается задача расчета осесимметричного поля систем электродов. Проведено сравнение различных итерационных методов /метод верхней релаксации по точкам и линиям, метод переменных направлений/. Показано, что наиболее эффективным является метод верхней релаксации по линиям. Приведены численные примеры. Ил. 1. Табл. 1. Библиогр. 2.

УДК 518:517.943

Возмущенный аналог метода касательных гипербол. Ш е р б и н а Ю.М. Збурений аналог методу дотичних гіпербол. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 66-70 /укр./.

Для приближенного решения нелинейного операторного уравнения $R(x)=0$ рассматривается вариант метода касательных гипербол с возмущениями. Сформулирована теорема с условиями типа Л.В. Канторовича о сходимости предложенного алгоритма. Как следствия получены оценки погрешности обычного метода касательных гипербол с учетом погрешностей округлений и его устойчивость. Библиогр. 8.

УДК 519.34:631.3.057

Интерполирование на треугольниках в методе конечных элементов. Ш и н к а р е н к о Г.А. Інтерполовання на трикутниках у методі скінченних елементів. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип.11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів.ун-ті, 1976, с. 70-75 /укр./.

Для метода конечных элементов предложен удобный способ построения интерполяционных полиномов Эрмита на треугольниках. Для некоторых из них получены явные выражения. Библиогр.4.

УДК 517.94

Повышение порядка аппроксимации разностных схем. Д е л ь - ч и к З.О., К о с т е н к о В.Г. Підвищення порядку апроксимації різницьових схем. - "Вісник Львівського університету, серія механіко-математична", вип.11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 76-77 /укр./.

Для линейных краевых задач, которые могут быть аппроксимированы системами разностных уравнений с точностью $O(h^2)$, найден корректор /линейная комбинация решений n разностных систем уравнений/, который дает приближенное решение таких краевых задач с точностью $O(h^{2n})$. Библиогр. 1.

УДК 539.9

Расчет плоского экрана кинескопа. К а р п о в В.В. Розрахунок плоского екрана кінескопу. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с. 77-80 /укр./.

Решена задача изгиба прямоугольной пластинки со скругленными углами под действием равномерной нагрузки. Исследовано влияние скругления углов на напряженно-деформированное состояние пластинки. Табл.1. Библиогр.3.

УДК 624.04

Применение геометрического программирования к оптимизации по весу тонкостенных конструкций. Ощипко Л.И., Иван-кив К.С. Застосування геометричного програмування до оптимізації по вазі тонкостінних конструкцій. - "Вісник Львівського ун-ту", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів.ун-ті, 1976, с. 81-84 /укр/.

Решена задача упругого равновесия та задача весовой оптимизации на прочность конструкции, состоящей из цилиндрической оболочки, сопряженной с круговой пластинкой, испытывающей равномерное внешнее давление. Оптимальные параметры определяются методами геометрического программирования. Библиогр. 4.

УДК 539.3

Упругое равновесие несимметрично соединенных пластинок. Никенко І.О., Мартинович Т.Л., Юринець В.С. Пружна рівновага несиметрично з'єднаних пластинок. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів.ун-ті, 1976, с. 85-92 /укр./.

Предложен приближенный метод исследования напряженно-деформированного состояния пластинок, которые спаяны до деформации так, что срединные их плоскости параллельно смещены относительно друг друга. Записаны условия сопряжения на линии контакта пластинок. Рассмотрено влияние смещения на величину напряжений в пластинке, состоящей из концентрических колец. Ил. 4. Библиогр. 2.

УДК 539.365

Кручение двухслойного упругого пакета жестким включением.
Пороховський З.З., Піддубняк О.П. Кручення двох- шарового пружного пакета жорстким включенням. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип.11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів.ун-ті, 1976, с. 92-98 /укр./.

Рассматривается осесимметричная задача о кручении внутренним плоским жестким включением бесконечного двухслойного пакета, поверхности которого свободны от усилий, либо заземлены, либо одна поверхность заземлена, а вторая свободна от нагрузок. Получена формула для коэффициента интенсивности контактных напряжений и выражение, связывающее момент кручения с величиной угла поворота включения. Рассмотрены числовые примеры. Ил. 4. Табл. 2. Библиогр. 5.

УДК 539.3.

Напряженное состояние упругой пластинки с несимметрично подкрепленным краем. Ю р и н е ц ь В.С. Напружений стан пружної пластинки з несиметрично підкріпленням краєм. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип. 11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів.ун-ті, 1976, с.98-104 /укр./.

Решена задача о напряженном состоянии полубесконечной пластинки, прямолинейный край которой несимметрично подкреплен упругим стержнем постоянного сечения. Сопряжение пластинки со стержнем осуществляется на фактической поверхности их спая. Методом интегральных преобразований Фурье получены формулы для контактных усилий, возникающих вдоль контура спая. Приводятся графики, характеризующие влияние величины эксцентриситета подкрепления на величину контактных усилий при нагружении стержня сосредоточенным моментом. Ил. 3. Библиогр. 2.

УДК 539.38

Контактная задача термоупругости для полосы малой толщины.
М о к р и к Р.І., П и р " є в Ю.О. Контактна задача термопружності для смуги малої товщини. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип.11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с.105-110 /укр./.

Рассматривается задача о вдавливании нагретого штампа в упругую полосу, которая лежит без трения /задача 1/ или неподвижно сцеплена /задача 2/ с недеформируемой полуплоскостью. Для полосы относительно малой толщины построено асимптотическое решение. Рассмотрен пример плоского штампа нагретого до постоянной температуры. Библиогр.6.

УДК 539.3

Изотропная пластинка с несимметрично подкрепленным эллиптическим отверстием. В у ш к о В.П. Ізотропна пластинка з несиметрично підкріпленням еліптичним отвором - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.11. Теоретична та прикладна математика. Львів, "Вища школа", Вид-во при Львів. ун-ті, 1976, с.110-118 /укр/.

Решена задача об упругом равновесии изотропной пластинки с эллиптическим отверстием, край которого несимметрично подкреплён упругим кольцом постоянного сечения. Напряженно-деформированное состояние подкрепляющего кольца описывается управлениями тонких криволинейных стержней. Подкрепляющее кольцо свободно от воздействия внешних усилий, а напряжение и изгибающие моменты в удаленных /от отверстия/ частях пластинки ограничены. Ил. 2. Библиогр. 3.

Министерство высшего и среднего специального
образования СССР

В е с т н и к

Львовского государственного университета
им. Ив. Франко

Серия механико-математическая

Выпуск 11

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ
МАТЕМАТИКА

/на украинском языке/

Издательское объединение "Вища школа"
издательство при Львовском государственном
университете

Редактор В.В. Войтович

Технічний редактор Т.М. Веселовський

Коректор О.В. Карпенко

Підписано до друку 2.03.1976 р. Формат паперу 60x90¹/₁₆.
Папір друкарський № 3. Фіз. друк. арк. 8.25.
Обл.-вид. арк. 6,4. Тираж 600. БГ 12804. Ціна 59 коп.
Зам. 3186.

Видавництво видавничого об'єднання "Вища школа"
при Львівському державному університеті. Львів,
Університетська, 1.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного
управління в справах видавництва, поліграфії та
книжкової торгівлі. Львів, Стефаника, 11.

59 коп.

