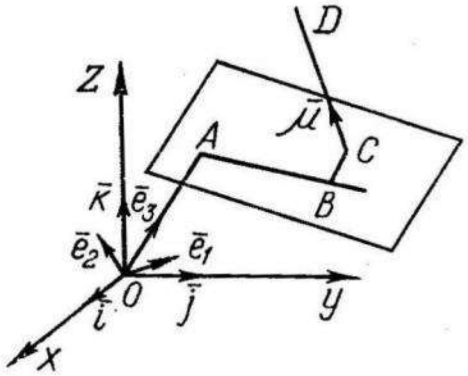
МАТЕМАТИКА

УДК 513

С. В. ДЕНИСКО

ВІДТВОРЕННЯ РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕХАНІЗМІВ

Нехай пряма CD, як показано на рисунку, поступально переміщається відносно ортонормованого репера $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, у якого вектор $\bar{e}_1$ знаходиться у площині Oxy так, що траєкторії різних її точок є прямі, перпендикулярні до вектора $\bar{e}_3$. Нехай



цей поступальний рух здійснюється за допомогою складної зубчастої передачі [1] внаслідок обертання репера $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ навколо осі Oz. Пряма CD описуватиме в просторі лінійчасту поверхню, яку називатимемо для зручності поверхнею Σ. Виснимо, за яких умов поверхня Σ є розгортною.

Нехай OA — перпендикуляр до площини векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ (вектор $\overline{AB}$ вказує напрямок і величину зміщення прямої CD відносно репера $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, вектор $\overline{BC}$ перпендикулярний до векторів $\overline{AB}$, $\bar{e}_3$). Нехай вісь Ox вибрана так, що $\overline{AB}=k\varphi(\alpha\bar{e}_1+$ $+\beta\bar{e}_2)$, де k — стала, $\alpha\bar{e}_1+\beta\bar{e}_2$ — напрямний орт прямої AB, а φ — кут повороту репера $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, який відлічується від напрямного орта $\bar{i}$ осі Ox. Тоді координати x, y, z радіуса-вектора $\bar{r}$ точки C і координати X, Y, Z напрямного орта $\bar{\mu}=\mu^s\bar{e}_s$ прямої CD матимуть вигляд

$$x = am\zeta + k\varphi(-a\eta - \beta n\zeta) + \Delta(\beta\eta - \alpha n\zeta),$$

$$y = am\eta + k\varphi(\alpha\zeta - \beta n\eta) - \Delta(\beta\zeta + \alpha n\eta),$$

$$z = an + k\varphi\beta m + \Delta\alpha m,$$

$$X = -\mu^1\eta - \mu^2 n\zeta + \mu^3 m\zeta,\ Y = -\mu^1\zeta - \mu^2 n\eta + \mu^3 m\eta,$$

$$Z = \mu^2 m + \mu^3 n, \tag{1}$$

де $a=|\overline{OA}|$, $\zeta=\cos\varphi$, $\eta=\sin\varphi$, $m=\sin\angle ZOA$, $n=\cos\angle ZOA$, Δ — координата вектора $\overline{BC}$ на координатній осі BC, масштабним вектором якої є вектор $-\beta\overline{e}_1+\alpha\overline{e}_2$.

Як відомо [2], поверхня Σ буде розгортною тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\frac{d\overline{r}}{d\varphi}\,\mu\,\frac{d\overline{\mu}}{d\varphi}\right) = 0.$$

Зважаючи на (1), ця умова перепишеться таким чином:

$$[(\mu^1)^2 + (-\mu^2 n + \mu^3 m)^2]\,k\beta m - (\mu^2 m + \mu^3 n)\{(am - k\varphi\beta n -$$

$$- \Delta\alpha n + k\alpha)\mu^1 + (-k\varphi\alpha + \Delta\beta)(-\mu^2 n + \mu^3 m) - k\beta n\,[-\zeta^2\eta\mu^1 +$$

$$+ \zeta^3(-\mu^2 n + \mu^3 m) + \zeta\eta^2\mu^1 - \eta^3(-\mu^2 n + \mu^3 m)]\} = 0. \tag{2}$$

Розглянемо тепер всі можливі випадки, які випливають з умови (2).

Нехай $(\mu^2 m+\mu^3 n)\beta n\neq 0$.
Тоді розгортна поверхня Σ є циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz.

Якщо $\mu^2 m+\mu^3 n=0$, то розгортна поверхня Σ є куском площини, перпендикулярним до осі Oz.

Нехай $\mu^2 m+\mu^3 n\neq 0$, але $\beta n=0$. Якщо $\beta=0$, то розгортна поверхня Σ є або циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz, або поверхнею, для якої виконуються умови

$$\beta = 0,\ -\mu^2 n + \mu^3 m = 0,\ ma - \Delta n + k = 0.$$

Якщо ж $n=0$, то розгортна поверхня Σ задовольняє умови

$$n = 0,\ \alpha = 0,\ \left[\left(\frac{\mu^1}{\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu^3}{\mu^2}\right)^2\right]k - \left(\frac{\mu^1}{\mu^2}a + \frac{\mu^3}{\mu^2}\Delta\right) = 0,$$

або

$$n = 0,\ \mu^3 = 0,\ \mu^1[\mu^1 k\beta - \mu^2(a - k\alpha)] = 0. \tag{3}$$

В останньому випадку за умови, що $\mu^1=0$, поверхня Σ є циліндричною поверхнею з твірними паралельними осі Oz.

Наявні такі твердження.

1. Нехай площина ABC паралельна осі Oz. Тоді необхідною умовою того, що неперпендикулярна до осі Oz твірна розгортної поверхні Σ не належить площині ABC, є паралельність вектора $\overline{AB}$ осі Oz.

2. Нехай площина ABC паралельна осі Oz, вектор $\overline{AB}$ паралельний площині Oxy, а твірна розгортної поверхні Σ не паралельна ні осі Oz, ні площині Oxy. Тоді $a=k$.

3. Якщо твірна розгортної поверхні Σ не перпендикулярна до осі Oz і належить площині ABC, то площина ABC паралельна осі Oz.

4. Нехай твірна розгортної поверхні Σ належить площині ABC і паралельна вектору $\overline{AB}$. Тоді поверхня Σ є або круговим конусом з віссю Oz, або круговим циліндром з тією ж віссю, або куском площини, перпендикулярним до осі Oz. Цим і вичерпуються всі можливі випадки.

5. Нехай вектор $\overline{AB}$ паралельний площині Oxy і для розгортної поверхні Σ виконується умова $ma-\Delta n+k=0$. Тоді площина, паралельна твірній поверхні Σ і вектору $\overline{AB}$, паралельна осі Oz. Крім цього, якщо пряма AB перетинає вісь Oz, то $\Delta\neq 0$.

Розглянемо деякі положення, пов'язані з перенастройкою механізму. Візьмемо той випадок, коли твірна розгортної поверхні належить площині ABC, паралельній осі Oz. Перенастройку механізму будемо здійснювати за рахунок довільної зміни тільки одного параметру. У такому разі матимемо прямолінійну конгруенцію [3], до якої належатимуть розгортні поверхні, відтворювані механізмом.

Нехай довільно змінюється відношення μ^1/μ^2, а параметр a змінюється згідно з формулою (3). Тоді дістанемо гіперболічну конгруенцію, у якої одну фокальну поверхню описує точка перетину прямих CD, AB, а друга фокальна поверхня складена з ребер звороту розгортних поверхонь, відтворюваних механізмом. Якщо ж не параметр a, а параметр k змінюватиметься за формулою (3), то матимемо нормальну конгруенцію.

Нехай тепер довільно змінюється кут між векторами $\overline{AB}$, $\overline{e}_1$, а кут між прямими AB, CD залишається незмінним. Тоді при умові, що параметр a змінюється згідно (3), дістанемо нормальну конгруенцію. Так само матимемо нормальну конгруенцію і при умові, що k змінюється згідно з формулою (3).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. М., «Наука», 1975.
2. Норден А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.
3. Фиников С. П. Теория конгруэнций. М.—Л., Гостехиздат, 1950.