УДК 517.913

В. Г. КОСТЕНКО

ПРО ОДНЕ КВАЗІЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Розглянемо квазілінійне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varphi(u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad (1)$$

де $\varphi(u)$ — довільна неперервно диференційовна функція.

Так само, як і в [2], знайдено, що серед рівнянь виду (1) нескінчену неперервну групу перетворень допускає лише рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \exp(-\alpha u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad (1')$$

де α — довільна стала. В інфінітезімальному операторі

$$Uf = (t+1)\frac{\partial f}{\partial t} + \xi(x, y)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\,\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{2}{\alpha}\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial u}$$

відповідної групи перетворень $\xi(x, y)$ і $\eta(x, y)$ є довільні спряжено-гармонійні функції. Скінчені перетворення цієї неперервної нескінченої групи мають вигляд [1], [3]

$$t_1 = at + b,\ x_1 = P_1(x, y),\ y_1 = Q_1(x, y),\ u_1 = u(t, x, y) + R(x, y), \qquad (2)$$

де $R(x, y)$ — гармонійна функція; $P_1(x, y)$ і $Q_1(x, y)$ — довільні спряжено-гармонійні функції; a, b — довільні сталі. Зображення функції

$$R(x, y) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left[\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)^2\right] \qquad (3)$$

знайдено з умови інваріантності рівняння (1′) відносно групи перетворень (2). Після цього в (2) виключаємо t, x і y з врахуванням (3) і наступним перепозначенням t_1, x_1, y_1 знову через t, x, y. Це дає

$$u_1 = u\left(\frac{t-b}{a},\ P(x, y),\ Q(x, y)\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right], \qquad (4)$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ — також довільні спряжено-гармонійні функції.

Таким чином, формулою (4) зображається деяка сукупність розв'язків u_1 рівняння (1′), якщо частинний розв'язок $u(t, x, y)$ цього рівняння відомий.

Хоча б один розв'язок рівняння (1′) шукаємо у вигляді

$$u(t, x, y) = T(t) + v(x, y).$$

Тоді $\quad T'' + \lambda \exp(-\alpha T) = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\lambda \exp(\alpha v).$

Інтегруючи останні рівняння [2], знаходимо деяку сукупність розв'язків рівняння (1') у вигляді

$$\alpha u_1 = 2 \ln \left[\frac{c_1}{2} \exp\left(\frac{\alpha c_0 (t-b)}{2a} \right) - \frac{\lambda}{\alpha c_0^2 c_1} \exp\left(- \frac{\alpha c_0 (t-b)}{2a} \right) \right] +$$

$$+ (\beta \sqrt{2} - 2) \ln \sqrt{P^2 + Q^2} - 2 \ln \frac{1 + (P^2 + Q^2)^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}}}{2} -$$

$$- 2 \ln \frac{\sqrt{\lambda \alpha}}{\beta} + \ln \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Тут $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — довільні спряжено-гармонійні функції, c_0, c_1, β, λ, α, a, b — довільні сталі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Костенко В. Г. Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом. Вид-во Львівського ун-ту, 1959.

2. Костенко В. Г., Євстаф'єва Н. В. Деякі диференціальні рівняння, інваріантні відносно груп перетворень. — В кн.: Збірник робіт аспірантів механіко-математичного та фізичного факультетів. Вид-во Львівського ун-ту, 1961.

3. Sophus Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.913

К. С. КОСТЕНКО

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші

$$y''' + A(x) y' + \frac{1}{2} A'(x) y = (A(x) - p(x)) y' +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} A'(x) - q(x) \right) y + f(x, y, y', y''), \tag{1}$$