Тоді $\quad T'' + \lambda \exp(-\alpha T) = 0, \ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\lambda \exp(\alpha v).$

Інтегруючи останні рівняння [2], знаходимо деяку сукупність розв'язків рівняння (1') у вигляді

$$\alpha u_1 = 2\ln\left[\frac{c_1}{2}\exp\left(\frac{\alpha c_0(t-b)}{2a}\right) - \frac{\lambda}{\alpha c_0^2 c_1}\exp\left(-\frac{\alpha c_0(t-b)}{2a}\right)\right] +$$

$$+ (\beta\sqrt{2} - 2)\ln\sqrt{P^2 + Q^2} - 2\ln\frac{1 + (P^2 + Q^2)^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}}}{2} -$$

$$-2\ln\frac{\sqrt{\lambda\alpha}}{\beta} + \ln\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right].$$

Тут $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — довільні спряжено-гармонійні функції, c_0, c_1, β, λ, α, a, b — довільні сталі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Костенко В. Г. Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом. Вид-во Львівського ун-ту, 1959.

2. Костенко В. Г., Євстаф'єва Н. В. Деякі диференціальні рівняння, інваріантні відносно груп перетворень. — В кн.: Збірник робіт аспірантів механіко-математичного та фізичного факультетів. Вид-во Львівського ун-ту, 1961.

3. Sophus Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.913

К. С. КОСТЕНКО

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші

$$y''' + A(x)\,y' + \frac{1}{2}A'(x)\,y = (A(x) - p(x))\,y' +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}A'(x) - q(x)\right)y + f(x, y, y', y''), \tag{1}$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'', \tag{2}$$

де $A(x)=\xi^{-2}(x)(\mu-2\xi''(x)\xi(x)+\xi'^2(x))$. Нехай функції: $q(x)$ — неперервна, $p(x)$ — неперервно диференційовна, $\xi(x)$ — тричі неперервно диференційовна на інтервалі $x_0\leqslant\leqslant x<\infty$, $f(x, y, y', y'')$ — неперервна в області D $(x_0\leqslant x<\infty$, $|y|$, $|y'|$, $|y''|\leqslant m)$ і μ — довільний додатний параметр.

Задача (1), (2) зведена до інтегро-диференціального рівняння [1]

$$y(x,x_0)=\xi(x)(c_1+c_2\cos\sqrt{\mu}\varphi(x,x_0)+c_3\sin\sqrt{\mu}\varphi(x,x_0))+$$
$$+\xi(x)\int_{x_0}^{x}[P(t)\cos\sqrt{\mu}\varphi(x,t)+Q(t)\sin\sqrt{\mu}\varphi(x,t)-$$
$$-P(t)]\,y(t,x_0)\,dt+\mu^{-1}\xi(x)\int_{x_0}^{x}\xi(t)\,(1-\cos\sqrt{\mu}\varphi(x,t))\times$$
$$\times f(t,y(t),y'(t),y''(t))\,dt, \tag{3}$$

де $P(x)=\mu^{-1}\Big[\xi'(x)(A(x)-p(x))+\xi(x)\Big(\frac{1}{2}A'(x)+q(x)-p'(x)\Big]$;

$Q(x)=\mu^{-1/2}(A(x)-p(x))$, $\varphi(x,x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\,dt$; c_1, c_2, c_3 залежать лише від y_0, y_0', y_0'', $\xi(x_0)$, $\xi'(x_0)$, $\xi''(x_0)$ і $p(x_0)$.

Якщо в D

$$|f(x,y,y',y'')|\leqslant r(x)\,y^{\alpha},\ r(x)>0, \tag{4}$$

то, оцінюючи (3) за модулем, маємо

$$\left|\frac{y(x,x_0)}{\xi(x)}\right|\leqslant c+\int_{x_0}^{x}(k_1(t)\,|y(t,x_0)|+b_1(t)\,|y(t,x_0)|^{\alpha})\,dt, \tag{5}$$

де $k_1(x)=3\max\limits_{x}[|P(x)|,\ |Q(x)|]$, $b_1(x)=2\mu^{-1}|\xi(x)|\,r(x)$, $c=$ $=\max[|c_1|,\ |c_2|,\ |c_3|]$.

Заміною

$$y(x,x_0)=\xi(x)\,z(x,x_0) \tag{6}$$

зводимо (5) до

$$|z(x,x_0)|\leqslant c+\int_{x_0}^{x}(k(t)\,|z(t,x_0)|+b(t)\,|z(t,x_0)|^{\alpha})\,dt, \tag{7}$$

де $$k(x) = |\xi(x)|\, k_1(x),\;\; b(x) = |\xi(x)|^{\alpha} b_1(x).$$

Лема Перова в застосуванні до нерівності (7) дає:

1) якщо $0 \leqslant \alpha < 1$, то для $x \geqslant x_0$

$$|z(x, x_0)| \leqslant R_1(x), \tag{8}$$

де

$$R_1(x) = \Big\{ c^{1-\alpha} \exp\Big[(1-\alpha)\int_{\tau}^{x} k(s)\,ds\Big] +$$

$$+ (1-\alpha)\int_{x_0}^{x} b(\tau) \exp\Big[(1-\alpha)\int_{\tau}^{x} k(s)\,ds\Big] d\tau \Big\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{9}$$

2) якщо $\alpha > 1$ і початкові умови (2) такі, що

$$c < \Big[(\alpha-1)\int_{x_0}^{x_0+h} b(s)\,ds\Big]^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\Big(-\int_{x_0}^{x_0+h} k(s)\,ds\Big) = R_2(h), \tag{10}$$

то на відрізку $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$

$$|z(x, x_0)| \leqslant R_3(x), \tag{11}$$

де

$$R_3(x) = c\Big\{ \exp\Big[(1-\alpha)\int_{x_0}^{x} k(s)\,ds\Big] -$$

$$- c^{\alpha-1}(\alpha-1)\int_{x_0}^{x} b(\tau) \exp\Big[(1-\alpha)\int_{\tau}^{x} k(s)\,ds\Big] d\tau \Big\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{12}$$

Враховуючи (6), для розв'язків задачі (1), (2) одержуємо оцінки: якщо $0 \leqslant \alpha < 1$, то

$$|y(x, x_0)| \leqslant |\xi(x)|\, R_1(x), \quad x \geq x_0; \tag{13}$$

якщо $\alpha > 1$ і $c < R_2(h)$, то

$$|y(x, x_0)| \leqslant |\xi(x)|\, R_3(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h; \tag{14}$$

за лемою Гронуолла—Беллмана [2], якщо $\alpha = 1$, то

$$|y(x, x_0)| \leqslant c\,|\xi(x)| \exp\int_{x_0}^{x} (k(t) + b(t))\,dt, \quad x \geqslant x_0. \tag{15}$$

У випадку, коли праві частини (13), (15) необмежені при $x \to \infty$, вони дають оцінки зверху для тих швидкостей, з якими розв'язки задачі (1), (2) ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) прямують до ∞ при $x \to \infty$. Знайдемо умови, за яких розв'язки задачі (1), (2) будуть обмеженими при $x \to \infty$. Припустимо, що

$$\int_{x_0}^{\infty} k(t)\,dt = k_0 < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} b(t)\,dt = b_0 < \infty. \tag{16}$$

Тоді очевидно, що за $\alpha > 1$ величина

$$R_2(\infty) = \left[(\alpha - 1)\int_{x_0}^{\infty} b(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left(-\int_{x_0}^{\infty} k(s)ds\right) =$$

$$= \exp(-k_0)\left[(\alpha - 1)\, b_0\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = s_0 < \infty.$$

Якщо початкові умови (2) такі, що (10) має місце для $h \leqslant \infty$, то оцінка (11) також має місце для всіх $x \geqslant x_0$ і, крім того, (10) та (13) за умов (16) будуть обмеженими при $x \to \infty$.

Тепер з аналізу оцінок (13), (14), (15) випливає такий висновок.

Теорема. Нехай $f(x, y, y', y'')$ неперервна в області $D(x_0 \leqslant \leqslant x < \infty, |y|, |y'|, |y''| \leqslant m)$, $q(x)$ і $p'(x)$ неперервні на інтервалі $x_0 \leqslant x < \infty$. Крім того, нехай мають місце умови (4) і (16), якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, або (4), (16) і $c < R_2(\infty)$, коли $\alpha > 1$.

Тоді всі розв'язки задачі (1), (2) будуть обмеженими, якщо функція $\xi(x)$ залишається обмеженою при $x \to \infty$, або прямуватимуть до нуля, коли $\xi(x)$ прямує до нуля при $x \to \infty$.

Приклад. В інтервалі $x_0 \leqslant x < \infty$ розглянемо рівняння

$$y''' + x^2 y' + xy = x^{-\beta} y^{\alpha} \cos\psi(y', y''). \tag{17}$$

Виберемо $\xi(x) = x^{-1}$, $\mu = 1$. Тоді $P(x) = 6x^{-4}$, $Q(x) = -3x^{-2}$. Отже, для достатньо великих x $k(x) = 9x^{-3}$, $b(x) = 2x^{-(1+\alpha+\beta)}$ і якщо $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, то умови теореми задовольняються. Таким чином, за відповідних початкових умов розв'язки рівняння (17) прямуватимуть до нуля з швидкістю не меншою від швидкості прямування до нуля функції $\xi(x) = x^{-1}$ при $x \to \infty$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Костенко Е. С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. — «Дифференциальные уравнения», 1974, т. 10, № 10.

2. Павлюк І. А. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. К., Вид-во Київського ун-ту, 1970.