УДК 517.946

Л. С. ПАРАСЮК, Є. М. ПАРАСЮК

ОСНОВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПІВПЛОЩИНІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ, ЩО ВИРОДЖУЮТЬСЯ НА ГРАНИЦІ

І. Л. Кароль [1—4] вперше дослідив рівняння змішаного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \lambda = \text{const}, \tag{1}$$

в області D, обмеженій зверху кривою (або декількома кривими) Γ, які лежать у півплощині $y>0$ і спираються своїми кінцями на вісь OX, а знизу — двома характеристичними дугами. Зокрема була вивчена задача Трікомі.

У цій статті розглядається рівняння вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

для якого у півплощині $y>0$ ставляться і розв'язуються в явному вигляді основні крайові задачі, доводяться теореми існування залежно від дійсних значень параметра λ.

Як відомо, першу крайову задачу для рівняння (2), як і для рівняння (1), можна ставити так: знайти такий розв'язок рівняння у півплощині $y>0$, який би задовольняв крайову умову

$$\lim_{y\to 0} u(x, y) = f(x). \tag{3}$$

Теорема 1. Якщо $f(x)$ неперервна і абсолютно інтегрована на всій осі, то при всіх $\lambda<0$ розв'язок задачі (2), (3) існує у вигляді

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x-\xi, y) f(\xi)\, d\xi, \tag{4}$$

де
$$G_\lambda(x-\xi, y) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{(4y)^\lambda \sqrt{\pi}\,\Gamma(-\lambda)\left[(x-\xi)^2+4y\right]^{1/2-\lambda}}, \tag{5}$$

Доведення. На основі обмежень, накладених на функцію $f(x)$, інтеграл (4) є збіжним у півплощині $y>0$ і допускає диференціювання під знаком інтеграла. Тоді безпосередньою перевіркою переконуємось, що (4) задовольняє (2).

Покажемо, що (4) задовольняє крайову умову (3). Нехай D — дійсна вісь, а D_ε — довільно малий ε — окіл точки x: $|x-\xi|<\varepsilon$. Легко переконатись у справедливості рівностей

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{D/D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\,d\xi = 0, \quad (6) \qquad \lim_{y\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\,d\xi = 1. \quad (7)$$

Рівність (6) безпосередньо випливає із (5) при $\lambda<0$. Для доведення рівності (7), зробимо заміну $\xi - x = t$. Тоді

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\,d\xi = \lim_{y\to 0}\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{(4y)^\lambda\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\lambda)}\int\limits_0^\varepsilon \frac{dt}{(4y+t^2)^{1/2-\lambda}}.$$

Зробивши знову заміну $t = 2\sqrt{y}\,z$, одержуємо

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\,d\xi = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\lambda)}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^{1/2-\lambda}}.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^{1/2-\lambda}} = \frac{1}{2}B\left(-\lambda, \frac{1}{2}\right),$$

де $B(-\lambda, 1/2)$ — функція Ейлера першого роду, то на основі відомого співвідношення

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

із останніх рівностей одержуємо (7).

Візьмемо тепер довільно мале число $\eta>0$ і виберемо $\varepsilon>0$ настільки малим, щоб при $|x-\xi|<\varepsilon$ коливання функції $f(\xi)$ не перевищували η. Тоді в околі D_ε маємо

$$f(\xi) = f(x) + \varphi(\xi), \text{ де } |\varphi(\xi)| < \eta.$$

Отже,

$$u(x, y) = \int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y) f(x)\,d\xi + \int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{D/D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y) f(\xi)\,d\xi. \qquad (8)$$

На основі (6) і (7), а також довільності η з останньої рівності випливає (3).

Друга крайова задача для рівняння (2) це задача з крайовою умовою

$$\lim_{y\to 0} y^{\lambda+1}\frac{\partial u}{\partial y} = f(x). \qquad (9)$$

Аналогічно доводиться інша теорема.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна і абсолютно інтегровна на всій осі, то при $\lambda > -1/2$ розв'язок задачі (2), (9) існує у вигляді

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\lambda (x - \xi, y) f(\xi) d\xi, \tag{10}$$

де
$$\omega_\lambda (x - \xi, y) = \frac{-4^\lambda \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1)[(x - \xi)^2 + 4y]^{\lambda + 1/2}}. \tag{11}$$

Третю крайову задачу для рівняння (2) можна ставити з крайовою умовою

$$\lim_{y \to 0} \left(\lambda u + y \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x). \tag{12}$$

Для цієї задачі справедлива наступна теорема.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ неперервна і абсолютно інтегровна на всій осі, то при $\lambda < 0$ розв'язок задачі (2), (12) існує у вигляді

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_\lambda (x - \xi, y) f(\xi) d\xi, \tag{13}$$

де
$$N_\lambda (x - \xi, y) = \frac{-\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{(4y)^\lambda \sqrt{\pi}\Gamma(1 - \lambda)[(x - \xi)^2 + 4y]^{1/2 - \lambda}}. \tag{14}$$

Як і в теоремі 1 доведення теореми 3 грунтується на властивостях

$$\lim_{y \to 0} \int_{D/D_\varepsilon} \left(\lambda N_\lambda + y \frac{\partial N_\lambda}{\partial y}\right) d\xi = 0, \ (15) \quad \lim_{y \to 0} \int_{D_\varepsilon} \left(\lambda N_\lambda + y \frac{\partial N_\lambda}{\partial y}\right) d\xi = 1. \ (16)$$

При цьому

$$\lambda N_\lambda + y \frac{\partial N_\lambda}{\partial y} = \frac{(4y)^{1-\lambda} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 - \lambda) [(x - \xi)^2 + 4y]^{3/2 - \lambda}}. \tag{17}$$

Ми бачимо, що (17) одержується із (5), коли в (5) замість λ прийняти $\lambda - 1$. Таким чином, розв'язок третьої крайової задачі у півплощині $y > 0$ для рівняння (2) переходить у розв'язок першої крайової задачі для рівняння (1). Цей розв'язок існує при $\lambda < 1$.

На закінчення зазначимо, що для рівняння (2) можна ставити першу крайову задачу в півплощині $y>0$ з крайовою умовою

$$\lim_{y\to 0} y^{\lambda} u(x, y) = f(x). \tag{18}$$

При цьому справедлива наступна теорема.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ неперервна і абсолютно інтегровна на всій осі, то при $\lambda>1/2$ розв'язок задачі (2), (18) існує у вигляді

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} W_{\lambda}(x-\xi, y) f(\xi)\, d\ , \tag{19}$$

де

$$W_{\lambda}(x-\xi, y) = \frac{-4^{\lambda-1}\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)\left[(x-\xi)^2+4y\right]^{\lambda-1/2}}. \tag{20}$$

Знову бачимо, що (20) одержується із (11), коли в (11) замість λ прийняти $\lambda-1$. Це також свідчить про те, що у півплощині $y>0$ існує тісний зв'язок між розв'язком задачі (2), (18) і розв'язком другої крайової задачі для рівняння (1) з крайовою умовою

$$\lim_{y\to 0} y^{\lambda}\frac{\partial u}{\partial y} = f(x). \tag{21}$$

Розв'язок задачі (1), (21) існує, таким чином, при $\lambda>1/2$ і одержується шляхом диференціювання по y із (10), коли замість λ прийняти $\lambda-1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кароль И. Л. К теории уравнений специального типа. — ДАН СССР, 1953, 88, № 2.
2. Кароль И. Л. Краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. — ДАН СССР, 1955, 101, № 5.
3. Кароль И. Л. К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. — «Математический сборник», 1956, 38 (80), № 3.
4. Кароль И. Л. О краевых задачах для уравнения смешанного типа. — «Вестник Львов. ун-та, серия математическая, механическая и астрономическая», 1956, 1, № 1.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., «Наука», 1966.
6. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., «Наука», 1970.