

І. М. КОЛОДІЙ

ТЕОРЕМА ТИПУ ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У статті розглядаються квазілінійні еліптичні рівняння з виродженням виду

$$\begin{aligned}\operatorname{div} A(x, u, u_x) &= B(x, u, u_x), \\ x &= (x_1, \dots, x_n), \quad u_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \\ A(x, u, u_x) &= (A_1(x, u, u_x), \dots, A_n(x, u, u_x)).\end{aligned}\quad (1)$$

Для узагальнених розв'язків рівняння (1) доведено теорему, аналогічну класичній теоремі Ліувілля для гармонійних функцій. Узагальнений розв'язок розуміється у сенсі інтегральної тотожності.

У цій роботі використовується методика, яка була запропонована Ю. Мозером у роботі [7]. Ця техніка розвивалася в дослідженнях С. М. Кружкова [4–6], Д. Серріна [8], Н. Трудінгера [9] та інших.

Результати цієї статті анонсовано в [1].

Нехай K_r куб $(x: |x_i| < r, i=1, \dots, n)$ в n -мірному евклідовому просторі E^n , $x = (x_1, \dots, x_n)$. $\dot{W}_\beta^1(\bar{\mu}, K_r)$, $W_\beta^1(\bar{\mu}, K_r)$ — повні нормовані простори (означення цих просторів див. в [2]).

Розглянемо рівняння (1) в кубі K_{2r} . Припустимо, що функції $A(x, u, \bar{p})$, $B(x, u, \bar{p})$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, означені для всіх значень u , $\bar{p}$ і $x \in K_{2r}$, а також, що $A(x, u, u_x)$, $B(x, u, u_x)$ вимірні при довільній функції $u(x) \in W_1^1(K_{2r})$. Нехай для довільних u , $\bar{p}$ і $x \in K_{2r}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}A(x, u, \bar{p}) \bar{p} &\geq a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |p_i|^\beta; \quad |B(x, u, \bar{p})| \leq \sum_{i=1}^n c_i(x) |p_i|^{\beta-1}, \\ |A(x, u, \bar{p})| &\leq a_2 \sum_{i=1}^n \mu_i(x) |p_i|^{\beta-1}, \\ \sum_{i=1}^n \mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x) |A_i(x, u, \bar{p})|^{\frac{\beta}{\beta-1}} &\leq a_3 \sum_{i=1}^n \mu_i(x) |p_i|^\beta,\end{aligned}\quad (2)$$

де a_1, a_2, a_3 — додатні константи; $\lambda_i(x) \leq \mu_i(x)$; $\lambda_i(x)$, $\mu_i(x)$, $c_i(x)$ — невід'ємні функції; $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(K_{2r})$, $t_i \geq 1$; $\mu_i(x)$,

$\lambda_i^{1-\beta}(x)$ належать просторові $L_s(K_{2r})$, $s \geq 1$, причому чис-
 s, t_i, β задовольняють нерівності

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} < \frac{\beta}{n}, \quad n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} > \beta > 1, \quad t_i^{-1} \leq \beta - 1; \quad (3)$$

функція $c_i^\beta(x) \lambda_i^{1-\beta}(x)$ належить $L_p(K_{2r})$, $p \geq 1$ і

$$r^\theta \prod_{i=1}^n \left(\int_{K_{2r}} \lambda_i^{-t_i}(x) dx \right)^{\frac{1}{t_i} \frac{1}{n}} \left(\int_{K_{2r}} \left(\sum_{i=1}^n c_i^\beta(x) \lambda_i^{1-\beta}(x) \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

де
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \leq \frac{\beta}{n}, \quad \theta = \left(\frac{\beta}{n} - \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \right) n \geq 0,$$

$\varepsilon > 0$ достатньо мале.

Зауваження. З доведення роботи [2] ясно, що узагальнений розв'язок у кубі K_{2r} при умовах (2), (3) буде обмеженим у K_r . Для цього інтеграл, що містить функцію $c_i(x)$, слід оцінити, скористувавшись п. 2 леми 1 роботи [3]. Тоді можна вважати, що в (2) $A(x, u, \bar{p}) = A(x, \bar{p})$, $B(x, u, \bar{p}) = B(x, \bar{p})$. Введемо також число $m > 1$ і функцію $H(\rho)$ так як це зроблено у роботах [2, 3].

Лема. Для узагальненого розв'язку $u(x)$ у кубі K_{2r} справедлива оцінка

$$\text{osc}(u, K_r) \leq \xi \text{osc}(u, K_r), \quad (4)$$

де
$$\xi = 1 - \frac{1}{2} \exp(-CH^{\frac{1}{p} \frac{m}{m-1}}(r)) < 1.$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\max_{K_r}(\pm u) = M$. Позначимо через $v(x)$ ту із функцій $1 \pm \pm M^{-1}u(x)$, яка не менша одиниці на множині $N \subset K_r$, міра якої не менша $\frac{1}{2} \text{mes } K_r$. Легко бачити, що в кубі K_r функція $v(x)$ є узагальненим розв'язком рівняння (1) за умов (2), (3), причому в (1) — (3) функції A і B слід замінити на

$$\tilde{A}(x, v_x) = M^{1-\beta}(\pm A(x, \pm Mv_x)); \quad \tilde{B}(x, v_x) = M^{1-\beta}(\pm B(x, \pm Mv_x)).$$

Відомо [7, 4], що існує послідовність функцій $z_v(v)$ така, що $z_v(v) \rightarrow z(v+\varepsilon) = \max(-\ln(v+\varepsilon), 0)$, $\varepsilon > 0$, при $v \rightarrow \infty$ і $z''_v(v) \geq (z'_v(v))^2$. Покажемо, що мають місце такі нерівності:

$$\int_{K_r} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |z_{v,x_i}|^\beta dx \leq Cr^{n-\beta} M(r), \quad (5)$$

i

$$\text{vrai max}_{K_r \frac{1}{4}} z_v^\beta \leq CH^{\frac{1}{m-1}}(r) \left(r^{-n} \int_{K_r \frac{1}{2}} z_v^{k\beta} dx \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (6)$$

де $1 < k \leq n \left(n - \beta + \sum_{i=1}^n t_i^{-1} \right)^{-1}$, $m = k(1 - s^{-1}) > 1$.

Припустимо, що оцінки (5), (6) доведено. Тому що $z=0$ на множині N , то із п. I леми I з роботи [3] випливає

$$\left(r^{-n} \int_{K_r \frac{1}{2}} z^{k\beta} dx \right)^{\frac{1}{k}} \leq CP(r) r^{-n+\beta} \int_{K_r \frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |z_{x_i}|^\beta dx. \quad (7)$$

Перейдемо до границі в (5), (6) при $v \rightarrow \infty$ і об'єднаємо одержані нерівності з (7); тоді одержимо

$$\text{vrai max}_{K_r \frac{1}{4}} z^\beta \leq CH^{\frac{m}{m-1}}(r).$$

Звідси випливає [4, 6] оцінка (4).

Доведемо тепер оцінки (5), (6). Для цього в інтегральну тотожність $\int_{K_{2r}} (\tilde{A}\varphi_x + \tilde{B}\varphi) dx = 0$ слід підставити функцію

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \psi(x) \cdot |z'_v(v) - \delta|^{\beta-1} \text{sign } z'_v(v), \text{ де } 0 \leq \psi(x) \in \dot{W}_p^1(\bar{\mu}, K_{2r}), \\ \delta &\geq 0, \text{ а потім } \delta \text{ спрямувати до нуля; в результаті одержимо} \\ \int_{K_{2r}} &(|z'_v(v)|^{\beta-1} \text{sign } z'_v(v) \tilde{A}(x, v_x) \psi_x + |z'_v(v)|^{\beta-1} \text{sign } z'_v(v) \tilde{B}(x, v_x) \psi + \\ &+ (\beta-1) \psi |z'_v(v)|^\beta \tilde{A}(x, v_x) v_x) dx \leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставимо в (8) $\psi(x) = \eta^\beta$, де $\eta = \prod_{i=1}^n \eta_{r, \frac{r}{2}, \frac{r}{2}}(|x_i|)$ (означення функції $\eta_{\rho, \sigma}$ див. у [2]). Враховуючи у (8) нерівності (2) для функцій $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ та нерівність Юнга, одержуємо

$$\begin{aligned} \int_{K_r} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\eta z_{v_{x_i}}|^\beta dx &\leq C \left[\int |\eta_{x_i}|^\beta \sum_{i=1}^n \mu_i^\beta(x) \lambda_i^{1-\beta}(x) dx + \right. \\ &\left. + \int_{K_r} \eta^\beta \sum_{i=1}^n c_i^\beta(x) \lambda_i^{1-\beta}(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Якщо в правій частині цієї нерівності застосувати п. 2 леми I з роботи [3] і врахувати умову (3) та вибір функції η , то одержимо оцінку (5).

Зауважимо, що нерівність (8) лише підсилиться, якщо опустити член, який містить $\tilde{A}(x, v_x) v_x$. В одержану нерівність підставимо функцію $\psi(x) = \alpha^{\beta-1} \eta^\beta z^\alpha$, де $\alpha = \beta(q-1) + 1$, $q \geq 1$,

$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \rho, \delta(|x_i|), \frac{r}{4} < \rho < \rho + \delta \leq \frac{r}{2}$. Метод, за допомогою якого одержано оцінку (6), подібний до відповідної техніки роботи [2] з тою лише різницею, що додаток, який містить функції $c_i(x)$ слід оцінити, скориставшись п. 2 леми I з роботи [3] та умовою (3).

Теорема. $u(x)$ — узагальнений розв'язок у всьому просторі, тобто інтегральна тотожність справедлива у будь-якому кубі K_r . Припустимо також, що

$$1) \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = \frac{\beta}{n}, \prod_{i=1}^n \left(\int_{E^n} \lambda_i^{-t_i}(x) dx \right)^{\frac{1}{t_i}} \left(\int_{E^n} \left(\sum_{i=1}^n c_i^\beta(x) \lambda_i^{1-\beta}(x) \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

де $\varepsilon > 0$ достатньо мале;

$$2) \lim_{\rho \rightarrow +\infty} H(\rho) = \kappa = \text{const} < \infty.$$

Тоді існує таке $\alpha_0 = \alpha_0(n, s, t_i, p, \beta, a_1, a_2, \kappa) \in (0, 1)$, що з умови $\forall a_1 \max_{K_r} |u| \leq C r^\alpha$ при $r \geq R_0$ і $\alpha < \alpha_0$ випливає, що

$u = \text{const}$.

Доведення теореми аналогічне відповідному доведенню у $u = \text{const}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Колодій І. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. — ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2, 268—270.
2. Колодій І. М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
3. Колодій І. М. Локальна неперервність по Гельдеру узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
4. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. — «Математический сборник», 1964, т. 65, № 4.
5. Кружков С. Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. — «Математический сборник», 1968, т. 77, № 3.
6. Кружков С. Н. Нелинейные уравнения с частными производными. ч. I. М., 1969.
7. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. — «Comm. Pure Appl. Math.», 1960, v. 13, N 3.

8. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear equations. — «Acta Math». 1964, v. 111, N 3, 4.

9. Trudinger N. Generalized solutions of quasilinear differential inequalities. — «Bull. of Amer. Math. Soc.» 1971, v. 77, N 4.

УДК 517.944:947

Марія Д. МАРТИНЕНКО

РОЗВ'ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ У МНОГОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ З ЩІЛИНАМИ

I. У тривимірному евклідовому просторі розглянемо область D , обмежену скінченим числом замкнених і незамкнених поверхонь типу Ляпунова, які не перетинаються між собою. Через $\Sigma = \bigcup_{k=1}^n \Sigma_k$ позначимо скінчену сукупність замкнених поверхонь Σ_k , а через $\delta = \bigcup_{i=1}^N \delta_i$ — скінчену сукупність незамкнених поверхонь, кожна з яких обмежена гладкою кривою Γ_i , сукупність яких позначимо через $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$. Припустимо для простоти, що поверхня Σ_0 містить у собі всі поверхні δ_i і Σ_k ($i = \overline{1, N}$; $k = \overline{1, n}$), а останні не містяться одна в одній. Позначимо через D_0 внутрішність поверхні Σ_0 , а через D_k — зовнішність поверхні Σ_k ($k = \overline{1, n}$), T_i — простір з розрізом δ_i ($i = \overline{1, N}$). Нехай в області D задана еліптична система диференціальних рівнянь другого порядку варіаційного типу від додатно визначеного функціоналу

$$\begin{aligned} A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) &\equiv \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+ \sum_{i=1}^3 A_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + A(x) u(x) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $A_{ij}(x) = A'_{ji}(x)$, $A(x) = A'(x)$ (штрих означає транспонування). Припустимо, що коефіцієнти $A_{ij}(x)$ задовольняють умову [1]

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^3 \bar{A}_{ij} v_i \tau_j &= \operatorname{Re} \left\{ \left[\int_+ A_0^{-1} (\beta v + \tau) d\beta \right]^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \int_+ \beta A_0^{-1} (\beta v + \tau) d\beta \right\} \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} v_i v_j, \end{aligned} \quad (2)$$