8. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear equations. — «Acta Math». 1964, v. 111, N 3, 4.
9. Trudinger N. Generalized solutions of quasilinear differential inequalities. — «Bull. of Amer. Math. Soc.» 1971, v. 77. N 4.

УДК 517.944:947

Марія Д. МАРТИНЕНКО

РОЗВ'ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ У МНОГОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ З ЩІЛИНАМИ

I. У тривимірному евклідовому просторі розглянемо область D, обмежену скінченим числом замкнених і незамкнених поверхонь типу Ляпунова, які не перетинаються між собою. Через $\Sigma = \bigcup\limits_{k=0}^{n} \Sigma_k$ позначимо скінчену сукупність замкнених поверхонь Σ_k, а через $\delta = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \delta_i$ — скінчену сукупність незамкнених поверхонь, кожна з яких обмежена гладкою кривою Γ_i, сукупність яких позначимо через $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i$. Припустимо для простоти, що поверхня Σ_0 містить у собі всі поверхні δ_i і $\Sigma_k (i=\overline{1, N},; \kappa=\overline{1, n})$, а останні не містяться одна в одній. Позначимо через D_0 внутрішність поверхні Σ_0, а через D_k — зовнішність поверхні $\Sigma_k (k=\overline{1, n})$, T_i — простір з розрізом $\delta_i (i=\overline{1, N})$. Нехай в області D задана еліптична система диференціальних рівнянь другого порядку варіаційного типу від додатно визначеного функціоналу

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \equiv \sum_{i, j=1}^{3} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + A(x)\, u(x) = 0, \tag{1}$$

де $A_{ij}(x) = A'_{ji}(x)$, $A(x) = A'(x)$ (штрих означає транспонування). Припустимо, що коефіцієнти $A_{ij}(x)$ задовольняють умову [1]

$$-\sum_{i, j=1}^{3} \tilde{A}_{ij} \nu_i \tau_j = \operatorname{Re}\left\{\left[\int_{+} A_0^{-1}(\beta\nu + \tau)\, d\beta\right]^{-1} \times \int_{+} \beta A_0^{-1}(\beta\nu + \tau)\, d\beta\right\} \sum_{i, j=1}^{3} A_{ij} \nu_i \nu_j, \tag{2}$$

де $2A_{ij}=\tilde{A}_{ij}+\tilde{A}_{ji}$, $\tilde{A}_{ij}=\tilde{A}'_{ji}$, ν і τ — одиничні вектори, $(\tau, \nu)=0$, $\int\limits_{+}(\ldots)d\beta$ означає інтегрування по простому додатно орієнтованому замкненому контурі, що охоплює β — корені рівняння $\det A_0(\beta\nu+\tau)=0$ з додатними уявними частинами, $A_0(\alpha)=$ $=\sum\limits_{i,j=1}^{3}A_{ij}\alpha_i\alpha_j$, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Якщо систему (1) запишемо у вигляді

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\equiv A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)+A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0,$$

де $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — однорідний оператор другого порядку, $A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — оператор, який має всі інші похідні, $x=(x_1, x_2, x_3)$, $u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_p\end{pmatrix}$, то можна припустити, що коефіцієнти оператора $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовні три рази в E_3, коефіцієнти при похідних порядку j $(j=0; 1)$ в операторі $A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовні j разів в E_3, причому коефіцієнти оператора $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ будуть порядку $O(F(x))$, похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та їх похідні до другого порядку ростуть не швидше, ніж $F(x)$ при $|x|\to\infty$, де $F(x)$ — така додатна в E_3 функція, що

$$\iiint\limits_{\infty}\frac{dx}{F(x)}<\infty \quad \text{і} \quad \frac{|\det(A_0(x, 2\pi i\alpha)-\lambda^2 I)|}{[F(x)]^p|\alpha|^{2p}+\lambda^{2p}}\geqslant\mu>0$$

для кожної точки $x\in E_3$ і для кожної дійсної точки $(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\neq 0$, λ — достатньо велике додатне число.

У цьому випадку існує як класична фундаментальна матриця системи (1) у всьому просторі, яку позначимо через $\omega(x, y)$, так і фундаментальна матриця системи (1) у рімановому просторі з гладкою лінією розгалуження, і у кожній з областей $D_0, D_1, \ldots, D_n, T_1, \ldots, T_N$ існує матриця Гріна, яка має тільки точкову особливість. Існування матриці Гріна для областей D_k, T_i $(k=\overline{0, n};\ i=\overline{1, N})$ випливає із існування розв'язку задачі Діріхле для областей [1, 3].

2. Має місце наступна теорема.

Теорема. Будь-який розв'язок системи (1) неперервний і обмежений в області D і на її межі, перші похідні якого в околі лінії $\Gamma_i (i=\overline{1, N})$ ведуть себе як $O\left(\frac{1}{R_i^\alpha}\right)$ $(0 \leqslant \alpha < 1$, R_i — відстань до $\Gamma_i)$, зображується єдиним способом у вигляді суми розв'язків цієї системи в однозв'язних областях $D_0, D_1, \ldots, D_n, T_1, \ldots, T_N$, причому в необмежених областях $D_1, \ldots, D_n, T_1, \ldots, T_N$ відповідні розв'язки системи (1) є регулярними на безмежності.

Для доведення теореми відзначимо передусім, що такий розклад розв'язку системи (1) випливає негайно з інтегрального зображення розв'язків системи (1) у D через узагальнені потенціали простого та подвійного шару, ядра яких внаслідок умови (2) мають у розглядуваному випадку тільки точкову особливість

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} \iint_{\Sigma_k} \left\{ \omega'(x, y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) - \right.$$

$$\left. - \left[u'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(x, y) \right]' \right\} d_y S +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \iint_{\sigma_i} \left\{ \omega'(x, y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) - \right.$$

$$\left. - \left[u'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(x, y) \right]' \right\} d_y S, \tag{3}$$

де $$B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -2\left[\sum_{i, j=1}^{3} \tilde{A}_{ij}(y) \nu_i(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i'(y) \nu_i(y) \right], \tag{4}$$

$\nu(y) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — орт внутрішньої нормалі до $S = \Sigma \cup \delta$, причому тут і далі інтегрування по незамкнених поверхнях δ_i розуміється як інтегрування по двосторонній поверхні, тобто

$$\iint_{\sigma_i} f(y) d_y S = \iint_{\sigma_i^+} f(y) d_y S = \iint_{\sigma_i^-} f(y) d_y S.$$

Таким чином,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} V_k(x) + \sum_{i=1}^{N} W_i(x), \tag{5}$$

де $$V_k(x) = \iint_{\Sigma_k} \left\{ \omega'(x, y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) - \right.$$

$$\left. - \left[u'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(x, y) \right]' \right\} d_y S B (k = \overline{0, n}) \tag{6}$$

та

$$W_i(x) = \iint\limits_{\sigma_i} \left\{ \omega'(x, y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) - \right.$$

$$\left. - \left[u'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(x, y) \right]' \right\} d_y S \quad (i = \overline{1, N})$$

є відповідно розв'язки системи (1) в D_k і T_i $(k=\overline{0, n},\ i=\overline{1, N})$.

Єдиність стверджуваного в теоремі зображення розв'язку системи (1) доведемо від супротивного. Припустимо існування двох зображень одного і того ж розв'язку $u(x)$ системи (1):

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} V_k^{(1)}(x) + \sum_{i=1}^{N} W_i^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} V_k^{(2)}(x) + \sum_{i=1}^{N} W_i^{(2)}(x),$$

де $V_k^{(j)}(x)$, $W_i^{(j)}(x)$ $(j=1;\ 2)$ — розв'язки системи (1) в D_k і T_i відповідно $(k=\overline{0, n};\ i=\overline{1, N}$. Тоді, прийнявши $V_k^{(1)} - V_k^{(2)} = \overline{V}_k$, $W_i^{(1)} - W_i^{(2)} = \overline{W}_i$, одержимо в D таку рівність $\sum\limits_{k=0}^{n} \overline{V}_k(x) + \sum\limits_{i=1}^{N} \overline{W}_i(x) = 0$, яку можна зобразити у вигляді

$$\overline{V}_0(x) = - \sum_{k=1}^{n} \overline{V}_k(x) - \sum_{i=1}^{N} \overline{W}_i(x). \qquad (7)$$

З цієї рівності випливає, що вектор-функція $\overline{V}_0(x)$, визначена раніше як розв'язок системи (1) в D_0, виявляється регулярним розв'язком (1) у всьому просторі, оскільки $\overline{V}_k(x)$, $\overline{W}_i(x)$ $(k=\overline{1, n};\ i=\overline{1, N})$ визначені зовні D_0.

Скористаємося тепер наступною теоремою Ліувілля, доведеною Д. П. Мельник [2]:

Якщо $2s$ раз неперервно диференційований розв'язок еліптичної системи, що задовольняє умовам теореми існування (класичної) фундаментальної матриці, буде порядку $O(|x|^k)$ при $|x| \to \infty$, то він є тотожним нулем (тут k — будь-яке ціле число).

Оскільки система (1) і $\overline{V}_k(x)$, $\overline{W}_i(x)$ $(k=\overline{1, n},\ i=\overline{1, N})$ задовольняють умови цієї теореми, то із того, що $\overline{V}_0(x)$ є регулярним розв'язком системи (1) у всьому тривимірному просторі, випливає його тотожна рівність нулеві $\overline{V}_0(x) \equiv 0$.

Зовсім аналогічно доводиться, що $\overline{V}_k(x) \equiv 0$ $(k=\overline{1, n})$ і $\overline{W}_i(x) \equiv 0$ $(i=\overline{1, N})$.

Таким чином, $V_k^{(1)}(x) \equiv V_k^{(2)}(x)$ $(k=\overline{0, n})$, $W_i^{(1)}(x) \equiv W_i^{(2)}(x)$ $(i=\overline{1, N})$.

3. Доведена теорема обгрунтовує наступний метод розв'язування задачі Діріхле для системи (1) в області D. Позначимо

через $f_k(x)$ і $\varphi_i^{\pm}(x)$ шуканий розв'язок системи (1) відповідно на поверхнях Σ_k і $\sigma_i^{\pm}$, причому $\varphi_i^{+}|_{\Gamma_i} = \varphi_i^{-}|_{\Gamma_i}$, а через $G_k(x, y)$ і $G_i^{*}(x, y)$ — матриці Гріна системи (1) відповідно для областей D_k $(k=\overline{0, n})$ і T_i $(i=\overline{1, N})$. Зобразимо розв'язок задачі

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0 \quad (x \in D), \tag{8}$$

$$u(x)|_{\Sigma_k} = f_k(x), \quad u(x)|_{\sigma_i^{\pm}} = \varphi_i^{\pm}(x), \tag{9}$$

у вигляді *

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} \iint_{\Sigma_k} u_k(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) G_k(x, y)\, d_y S + \\ + \sum_{i=1}^{N} \iint_{\sigma_i} v_i(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) G_i^{*}(x, y)\, d_y S, \tag{10}$$

де $B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ визначено формулою (4), причому інтегрування по незамкнених поверхнях σ_i розуміється як інтегрування по двосторонній поверхні; $u_k(y)$, $v_i(y)$ — невідомі густини, для визначення яких одержимо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$u_l(x) + \sum_{k \neq l = 0}^{n} \iint_{\Sigma_k} u_k(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) G_k(x, y)\, d_y S + \\ + \sum_{i=1}^{N} \iint_{\sigma_i} v_i(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) G_i^{*}(x, y)\, d_y S = f_l(x) \quad (l=\overline{0, n}), \tag{11}$$

$$v_j(x) + \sum_{k=0}^{n} \iint_{\Sigma_k} u_k(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) G_k(x, y)\, d_y S + \\ + \sum_{i \neq j = 1}^{N} \iint_{\sigma_i} v_i(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) G_i^{*}(x, y)\, d_y S = \varphi_j(x) \quad (j = \overline{1, N}).$$

Отримана система регулярних інтегральних рівнянь (11) може бути розв'язана за першою теоремою Фредгольма. Для доведення цього розглянемо відповідну однорідну систему і позначимо через $u_k^0(x)$ і $v_i^0(x)$ її розв'язок

---

* У цьому запису $v_i(x)$ означає вектор-функцію, яка збігається на σ_i^{+} з $v_i^{+}(x)$, а на σ_i^{-} з $v_i^{-}(x)$.

$$u_l^0(x)+\sum_{k\neq l=0}^{n}\iint_{\Sigma_k}u_k^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x,y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\iint_{\sigma_i}v_i^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x,y)\,d_yS=0, \qquad (12)$$

$$v_j^0(x)+\sum_{k=0}^{n}\iint_{\Sigma_k}u_k^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x,y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{i\neq j=1}^{N}\iint_{\sigma_i}v_i^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x,y)\,d_yS=0.$$

Нехай $V_k^0(x)$, $W_i^0(x)$ — розв'язки системи (1) в областях D_k і T_i відповідно, які приймають на Σ_k і σ_i відповідно значення $u_k^0(x)$ і $v_i^0(x)$, тобто

$$V_k^0(x)=\iint_{\Sigma_k}u_k^0(x)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x,y)\,d_yS,$$

$$W_i^0(x)=\iint_{\sigma_i}v_i^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x,y)\,d_yS. \qquad (13)$$

Тоді вектор-функція

$$u^0(x)=\sum_{k=0}^{n}\iint_{\Sigma_k}u_k^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x,y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\iint_{\sigma_i}v_i^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x,y)\,d_yS\equiv\sum_{k=0}^{n}V_k^0(x)+\sum_{i=1}^{N}W_i^0(x)$$

є розв'язком системи (1) в області D, який набуває внаслідок (12) на її межі нульового значення і тому дорівнює тотожно нулеві скрізь у D

$$u^0(x)\equiv\sum_{k=0}^{n}V_k^0(x)+\sum_{i=1}^{N}W_i^0(x)\equiv 0. \qquad (14)$$

Звідси, міркуючи так, як і при доведенні єдиності зображення розв'язку системи (1) у вищенаведеній теоремі, одержуємо

$$V_k^0(x)\equiv 0\ \ (x\in D_k),\quad W_i^0(x)\equiv 0\ \ (x\in T_i). \qquad (15)$$

Оскільки $u_k^0(x)$ і $v_i^0(x)$ є значення $V_k^0(x)$ і $W_i^0(x)$ відповідно на поверхнях Σ_k і σ_i, то з (15) маємо $u_k^0(x)=0$, $v_i^0(x)=0$, тобто система (12) має тільки нульовий розв'язок, а тому система (11) має єдиний розв'язок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Волошина М. С. Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. — ДАН УРСР, 1958, № 10.
2. Мельник Д. П. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. — ДАН УРСР, 1958, № 6.
3. Марія Мартиненко. Деякі крайові задачі для еліптичних систем. — ДАН УРСР, 1968, серія А, № 8.

УДК 517.946

С. П. ЛАВРЕНЮК

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ МЕТАГАРМОНІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Приймемо такі позначення: E^3 — евклідовий простір; $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$ — точки цього простору;, $T\subset E^3$ — скінчена однозв'язна область з поверхнею S, r_{xy} — евклідова відстань між точками x і y.

Під зовнішнім метагармонійним потенціалом простого шару з одиничною густиною розумітимемо функцію

$$v(x;S)=\int\limits_S \frac{e^{-ar_{xy}}}{r_{xy}}\,d_y s, \quad x\in C\overline{T},$$

де $a=\text{const}>0$, $C\overline{T}=E^3\setminus\overline{T}$.

Припустимо, що область T з поверхнею S лежить всередині сфери Σ_R з центром у точці O радіуса $R<1$. Нехай на деякій частині Ω_1 одиничної сфери Σ_1 з центром у точці O відомий метагармонійний потенціал простого шару $v(x;S)$, індукований поверхнею S. Потрібно за значеннями функції $v(x;S)$ на Ω_1 визначити поверхню S.

Розглянемо стійкість поставленої задачі. Для простоти обмежимося випадком, коли Ω_1 визначається нерівністю

$$|x_1|\geqslant A; \; |A|<1.$$

Нехай області T_j з поверхнею $S_j (j=1,2)$ є зірковими відносно точки O і лежать всередині сфери Σ_R. Позначимо через S^e, S^i відповідно границі областей $T^e=T_1\cup T_2$, $T^i=T_1\cap T_2$. Нехай рів-