Оскільки $u_k^0(x)$ і $v_i^0(x)$ є значення $V_k^0(x)$ і $W_i^0(x)$ відповідно на поверхнях Σ_k і σ_i, то з (15) маємо $u_k^0(x)=0$, $v_i^0(x)=0$, тобто система (12) має тільки нульовий розв'язок, а тому система (11) має єдиний розв'язок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Волошина М. С. Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. — ДАН УРСР, 1958, № 10.
2. Мельник Д. П. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. — ДАН УРСР, 1958, № 6.
3. Марія Мартиненко. Деякі крайові задачі для еліптичних систем. — ДАН УРСР, 1968, серія А, № 8.

УДК 517.946

С. П. ЛАВРЕНЮК

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ МЕТАГАРМОНІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Приймемо такі позначення: E^3 — евклідовий простір; $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$ — точки цього простору;, $T\subset E^3$ — скінчена однозв'язна область з поверхнею S, r_{xy} — евклідова відстань між точками x і y.

Під зовнішнім метагармонійним потенціалом простого шару з одиничною густиною розумітимемо функцію

$$v(x;S)=\int\limits_S \frac{e^{-ar_{xy}}}{r_{xy}}\,d_y s,\quad x\in C\overline{T},$$

де $a=\text{const}>0$, $C\overline{T}=E^3\setminus\overline{T}$.

Припустимо, що область T з поверхнею S лежить всередині сфери Σ_R з центром у точці O радіуса $R<1$. Нехай на деякій частині Ω_1 одиничної сфери Σ_1 з центром у точці O відомий метагармонійний потенціал простого шару $v(x;S)$, індукований поверхнею S. Потрібно за значеннями функції $v(x;S)$ на Ω_1 визначити поверхню S.

Розглянемо стійкість поставленої задачі. Для простоти обмежимося випадком, коли Ω_1 визначається нерівністю

$$|x_1|\geqslant A;\ |A|<1.$$

Нехай області T_j з поверхнею $S_j\,(j=1,2)$ є зірковими відносно точки O і лежать всередині сфери Σ_R. Позначимо через S^e, S^i відповідно границі областей $T^e=T_1\cup T_2$, $T^i=T_1\cap T_2$. Нехай рівняння поверхонь S_j, S^e і S^i у сферичній системі координат ρ, φ, θ з центром у точці O мають вигляд

$$\rho = f_j(\varphi, \theta), \ \rho = f^e(\varphi, \theta), \ \rho = f^i(\varphi, \theta), \ (j = 1, 2). \tag{1}$$

Теорема. Нехай функції $f_j(\varphi, \theta)$ $(j=1,2)$ належать класу $H(2, B, \alpha)$ [1] і існує нерівність

$$|v(x; S_1) - v(x; S_2)| \leqslant \varepsilon, \ x \in \Omega_1. \tag{2}$$

Тоді справедлива оцінка

$$\operatorname{mes} S^e - \operatorname{mes} S^i \leqslant \frac{C_1}{n}, \tag{3}$$

де число n визначається зі співвідношень

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \leqslant C_2 |\ln \varepsilon|^{-C_3} \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{4}$$

а додатні сталі C_1, C_2, C_3 залежать від величин A, B, R. Наведемо допоміжну лему.

Лема. Якщо $f_j(\varphi, \theta) \in H(2, B, \alpha)$ і існує нерівність (2), то справедлива оцінка

$$|v(x)| + |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant C_4 |\ln \varepsilon|^{-C_5}, \ x \in S^e, \tag{5}$$

де $v(x) = v(x; S_1) - v(x; S_2)$, а додатні сталі C_4, C_5 визначаються величинами A, B, R.

Перейдемо до доведення теореми. Позначимо через $S^e_{(h)}$ замкнену поверхню, що визначається рівнянням

$$\rho = f^e(\varphi, \theta) + h.$$

Нехай

$$S^{e+} = S^e \cap S_1, \ S^{e-} = S^e \diagdown S^{e+}, \ S^{i+} = S^i \cap S_2, \ S^{i-} = S^i \diagdown S^{i+}.$$

Проведемо у точках перетину поверхонь S_1 і S_2 сфери радіуса t. Частини поверхонь S^{e+}, S^{e-}, які лежать всередині вказаних сфер, позначимо відповідно через S_t^{+e}, S_t^{+e}. Нехай далі

$$S_t^{e+} = S^{e+} \diagdown S_t^{+e}, \ S_t^{e-} = S^{e-} \diagdown S_t^{-e},$$
$$S_{t_1 t_2}^{e+} = S_{t_1}^{+e} \diagdown S_{t_2}^{+e}, \ S_{t_1 t_2}^{e-} = S_{t_1}^{-e} \diagdown S_{t_2}^{-e} \ (t_1 > t_2).$$

Частини поверхонь $S^e_{(h)}$, S^i, яким відповідають промені з точки O, що перетинають поверхні S_t^{e+}, S_t^{e-}, позначимо відповідно через $S^{e+}_{(h)t}$, $S^{e-}_{(h)t}$ і S_t^{i+}, S_t^{i-}. Крім того, нехай

$$S_t^{+i} = S^{i+} \diagdown S_t^{i+}, \ S_t^{-i} = S^{i-} \diagdown S_t^{i-}.$$

Через S_0 позначимо просту замкнену кусково-гладку поверхню, відстань від якої до поверхонь $S_{t_2}^{+e}$, $S_{t_2}^{-e}$ не менше числа $t_1 - t_2$ і таку, що $S^{e+}_{(h)t_1}$, $S^{e-}_{(h)t_1} \subset S_0$.

Нехай функція $u(x)$ задовольняє рівняння

$$\Delta u - a^2 u = 0 \tag{6}$$

в області T^e і має неперервні перші похідні на S^e. Тоді, як і для гармонійних функцій, маємо

$$\int\limits_{S_1} u(x)\,ds - \int\limits_{S_2} u(x)\,ds = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^e}\left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right]ds. \tag{7}$$

Припустимо, що функція $u(x)$ є розв'язком рівняння (6) і набуває на S_0 такі крайові значення:

$$u(x) = 1,\ x \in S^{e+}_{(h)\frac{\delta}{2}},\ u(x) = 0,\ x \in S_0 \setminus S^{e+}_{(h)\frac{\delta}{2}}. \tag{8}$$

Використовуючи внутрішні апріорні оцінки Шаудера [3] і умови теореми, праву частину в формулі (7) можна оцінити так:

$$\left|\int\limits_{S^e}\left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right]ds\right| \leqslant \frac{C_6}{h}|\ln\varepsilon|^{-C_5}. \tag{9}$$

Стала C_6 залежить від величин A, B, R.

Зобразимо ліву частину формули (7) як суму трьох виразів I_1, I_2, I_3 і оцінимо кожний з них.

$$I_1 = \int\limits_{S_\delta^{e+}} u(x)\,ds - \int\limits_{S_\delta^{ei+}} u(x)\,ds - \int\limits_{S_h^{i+}} u(x)\,ds + \int\limits_{S_h^{i-}} u(x)\,ds.$$

Беручи до уваги апріорні оцінки Шаудера [3] в областях, які містяться відповідно між поверхнями $S^{e+}_{(h)\delta}$, S^{e+}_δ і $S^{e-}_{(h)\delta}$, S^{e-}_δ і радіальними прямими, що їх обмежують, справедлива нерівність

$$|\operatorname{grad} u(x)| \leqslant \frac{C_7}{\delta}, \tag{10}$$

де стала C_7 залежить від величини B.

Використовуючи формулу скінчених приростів, а також (8) і (10), одержуємо

$$u(x) \geqslant 1 - \frac{C_7}{\delta}h,\ x \in S_\delta^{e+},\ u(x) \leqslant \frac{C_7}{\delta}h,\ x \in S_\delta^{e-}. \tag{11}$$

З огляду на оцінки (11) маємо

$$I_1 \geqslant \operatorname{mes} S_\delta^{e+} - \operatorname{mes} S_h^{i+} - C_8\frac{h}{\delta}. \tag{12}$$

Розглянемо

$$I_2 = \int\limits_{S_{h\delta}^{e+}} u(x)\,ds - \int\limits_{S_{h\delta}^{e-}} u(x)\,ds.$$

Використовуючи лему з [2] можна показати, що для довільних n знайдуться такі h і δ, що

$$|I_2| \leqslant \frac{C_9}{n}, \tag{13}$$

де стала C_9 залежить від величин R, B.

Розглянемо нарешті

$$I_3 = \int\limits_{S_h^{+e}} u(x)\,ds - \int\limits_{S_h^{-e}} u(x)\,ds - \int\limits_{S_h^{+i}} u(x)\,ds + \int\limits_{S_h^{-i}} u(x)\,ds.$$

З визначення поверхонь S_0, S^e, (8) і апріорних оцінок Шаудера [3] одержуємо, що у точках поверхонь S_h^{+e}, S_h^{-e}, S_h^{+i}, S_h^{-i} існує нерівність

$$|\operatorname{grad} u(x)| \leqslant \frac{C_{10}}{\delta}. \tag{14}$$

Позначимо через Π множину тих кутів φ, θ, які визначають промені, що перетинають поверхні S_h^{+e}, S_h^{-e}. Тоді з огляду на умови теореми і визначення поверхонь S_n^{+e}, S_h^{-e}, S_h^{+i}, S_h^{-i} маємо

$$|f^e(\varphi, \theta) - f^i(\varphi, \theta)| \leqslant C_{11} h, \ (\varphi, \theta) \in \Pi. \tag{15}$$

Стала C_{11} залежить від величин B, R.
Тоді, враховуючи оцінку з [3] і нерівності (14), (15), легко одержати нерівність

$$|I_3| \leqslant C_{12} \frac{\delta \sqrt{h} + h}{\delta}, \tag{16}$$

де стала C_{12} залежить від величин B, R.

Підставляючи (9), (12), (13), (15) в (7), одержуємо

$$\operatorname{mes} S^{e+} - \operatorname{mes} S^{i+} \leqslant \frac{C_9}{n} + C_{13}\left(\sqrt{h} + \frac{h}{\delta}\right) + \frac{C_6}{h} |\ln \varepsilon|^{-C_5}. \tag{17}$$

Приймемо $h = t^{k+1}$, $\delta = t^k$, $t = \dfrac{1}{n}$, $\left(t \leqslant \dfrac{1}{4}\right)$, де $1 \leqslant k < n$, а n виберемо так, щоб задовольнялись співвідношення (4). Тоді з (17) одержимо оцінку

$$\operatorname{mes} S^{e+} - \operatorname{mes} S^{i+} \leqslant \frac{C_{14}}{n}.$$

Аналогічно одержуємо оцінку для різниці $\operatorname{mes} S^{e-} - \operatorname{mes} S^{i-}$. Цим теорема доведена.

Наслідок. Якщо виконуються умови теореми і, крім того, поверхні $S_j (j = 1, 2)$ опуклі, то справедлива оцінка

$$|f_1(\varphi, \theta) - f_1(\varphi, \theta)| \leqslant \frac{C_{15}}{\sqrt[3]{n}},$$

де число n визначається зі співвідношень (4), а стала C_{15} залежить від величин A, B, R.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953.

2. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.

3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.

4. Прилепко А. И. Об устойчивости и единственности решения обратных задач обобщенных потенциалов простого слоя. — «Сибирский математический журнал», 1971, т. 12, № 4.

УДК 517.94

Б. Я. КОЛОДІЙ, Й. Г. ШІПКА

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглядається задача Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \int_a^b K(x, y) f(y, t, \varphi(y, t), \varphi'(y, t))\, dy, \tag{1}$$

$$\varphi(x, 0) = 0, \tag{2}$$

де ядро $K(x, y)$ — симетричне і інтегроване з квадратом; $f(x, t, \varphi, \varphi')$ — неперервна функція по всіх аргументах і задовольняє умову Ліпшиця по φ і φ'.

Нехай $\{\lambda_k\}$ — система власних значень і $\{\varphi_k(x)\}$ — повна ортонормована система власних функцій ядра $K(x, y)$.

Справедлива **теорема:** якщо ядро $K(x, y)$ і функція $f(x, t, \varphi, \varphi')$ задовольняють названі умови, то інтегро-диференціальне рівняння (1) має розв'язок $\varphi(x, t)$, що задовольняє початкову умову (2) і записується

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) z_i(t). \tag{3}$$

Функції $z_i(t)$ задовольняють нескінченну систему рівнянь

$$\frac{dz_i}{dt} = \Phi_i(z_0, z_1, \ldots, z_1', z_2', \ldots), \qquad z_i(0) = 0, \tag{4}$$