$$|f_1(\varphi,\theta)-f_1(\varphi,\theta)|\leqslant\frac{C_{15}}{\sqrt[3]{n}},$$

де число n визначається зі співвідношень (4), а стала C_{15} залежить від величин A, B, R.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
2. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.
4. Прилепко А. И. Об устойчивости и единственности решения обратных задач обобщенных потенциалов простого слоя. — «Сибирский математический журнал», 1971, т. 12, № 4.

УДК 517.94

Б. Я. КОЛОДІЙ, Й. Г. ШІПКА

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглядається задача Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=\int_a^b K(x,y)\,f(y,t,\varphi(y,t),\varphi'(y,t))\,dy, \qquad (1)$$

$$\varphi(x,0)=0, \qquad (2)$$

де ядро $K(x, y)$ — симетричне і інтегроване з квадратом; $f(x, t, \varphi, \varphi')$ — неперервна функція по всіх аргументах і задовольняє умову Ліпшиця по φ і φ'.

Нехай $\{\lambda_k\}$ — система власних значень і $\{\varphi_k(x)\}$ — повна ортонормована система власних функцій ядра $K(x, y)$.

Справедлива **теорема:** якщо ядро $K(x, y)$ і функція $f(x, t, \varphi, \varphi')$ задовольняють названі умови, то інтегро-диференціальне рівняння (1) має розв'язок $\varphi(x, t)$, що задовольняє початкову умову (2) і записується

$$\varphi(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\,z_i(t). \qquad (3)$$

Функції $z_i(t)$ задовольняють нескінченну систему рівнянь

$$\frac{dz_i}{dt}=\Phi_i(z_0,z_1,\ldots,z_1',z_2',\ldots),\qquad z_i(0)=0, \qquad (4)$$

де

$$\Phi_1(z_0, z_1, \ldots, z_1', z_2', \ldots) = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b f\left(y, t, \sum_{k=1}^{\infty} z_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} z_k' \varphi_k\right)\varphi_i(y)\,dy.$$

При цьому повинна виконуватись умова

$$\int_a^b \left[f\left(y, t, \sum_{k=1}^{\infty} z_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} z_k' \varphi_k\right)\right]^2 dy \leqslant B^2.$$

Доведення. Припускаємо, що всі власні значення впорядковані таким чином:

$$0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots$$

Для доведення існування розв'язку системи використовуємо метод стиснутих відображень

$$|\Phi_i(z) - \Phi_i(\bar{z})| \leqslant \frac{A\rho(z, \bar{z})}{|\lambda_i|},$$

де A — константа Ліпшиця для функції f;

$$\rho(z, \bar{z}) \leqslant AK\rho(z, \bar{z})(t+1),$$

де

$$K = \int_a^b |K(x, x)|\,dx.$$

Отже, при $O<t<\dfrac{1-AK}{AK}$ система (4) матиме єдиний розв'язок. Позначимо

$$D = \left\{a \leqslant x \leqslant b,\ 0 < t < \frac{1-AK}{AK}\right\}.$$

Для доведення збіжності ряду (3) припустимо спочатку, що ядро $K(x, y)$ має тільки скінченне число власних значень. Тоді

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\cdot\frac{1}{\lambda_k}.$$

Функція

$$\varphi_m(x, t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)\,z_i(t)$$

є розв'язком задачі (1—2).

Тепер припускаємо, що ядро $K(x, y)$ має нескінченну кількість власних значень. Покажемо, що

$$\lim_{m \to \infty} \varphi_m(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) z_i(t) = \varphi(x, t) \tag{5}$$

існує і що

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \frac{dz_i(t)}{dt} = \lim_{m \to \infty} \frac{d\varphi_m}{dt}. \tag{6}$$

Застосувавши до системи (4) нерівність Бесселя, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 [z_i'(t)]^2 \leqslant \int_a^b \left[f\left(y, t, \sum_{k=1}^{\infty} z_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} z_k' \varphi_k\right)\right]^2 dy < B^2.$$

Звідси, зважаючи на нерівність Коші,

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |\varphi_i(x) z_i(t)| \leqslant \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \varphi_i^2(x) \frac{1}{\lambda_i^2}\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i^2 [z_i'(t)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant BM,$$

де M^2 — точна верхня грань виразу в дужках при $a \leqslant x$, $y \leqslant b$.

Отже, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) z_i'(t)$$

є рівномірно збіжний і може бути почленно інтегрований по t.

Таким чином, існування $\varphi(x, t)$ і рівності (5), (6) доведені.

Розклавши ядро $K(x, y)$ в ряд, можна легко показати, що $\varphi(x, t)$ є розв'язком рівняння (1).

Доведемо єдиність розв'язку.

Припустимо, що існують два розв'язки задачі (1)—(2): $\varphi(x, t)$ і $\bar{\varphi}(x,t)$.

Використовуючи умови, які задовольняє функція f і метод індукції, одержуємо

$$|\varphi(x, t) - \bar{\varphi}(x, t)| \leqslant A^n G K^n \frac{t^n}{n!},$$

де

$$G = G_1 + G_2; \quad G_1 = \sup_D |\varphi(x, t) - \bar{\varphi}(x, t)|;$$

$$G_2 = \sup_D |\varphi'(x, t) - \bar{\varphi}'(x, t)|.$$

Спрямувавши n до нескінченності, маємо $\varphi(x, t) \equiv \bar{\varphi}(x, t)$. Єдиність доведена.

Окремі випадки рівняння (1) розглядались у роботах [1, 2].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Melvin L. Heard. On a non-linear integrodifferential equation. — «Journal of mathematical analysis and applications», 1969, 26.
2. Shin-Hsun Chang. A class of integrodifferential. — «American journal mathematic». 1949, 71.