УДК 512.4

О. Л. ГОРБАЧУК, М. Я. КОМАРНИЦЬКИЙ

ПРО S-КРУЧЕННЯ В МОДУЛЯХ

У цій статті досліджується питання про розщеплюваність всіх S-кручень над кільцем, в якому кожний правий ідеал двосторонній. Кожне кільце, яке ми будемо розглядати, припускається асоціативним кільцем з одиницею, а кожний модуль правим і унітарним. Через $\mathfrak{M}_A$ позначатимемо категорію правих модулів над кільцем A. Якщо σ кручення в категорії $\mathfrak{M}_A$, то через $E\sigma$ позначаємо радикальний фільтр правих ідеалів кільця A, який відповідає крученню σ. Нагадаємо, що кручення σ розщеплюється, коли для кожного правого A-модуля M його підмодуль $\sigma(M)$ виділяється прямим додатком. Якщо $\sigma(M)=M$, або $\sigma(M)=0$ для кожного $M\in\mathfrak{M}_A$, то кручення σ називається тривіальним. Кручення, радикальний фільтр якого володіє найменшим ідеалом, називається радикально-напівпростим.

Всі означення, зв'язані з крученням, можна знайти у роботах [5, 6].

Нехай φ: $A_1\to A_2$ накладення кілець (тобто гомоморфізм на) і в категорії $\mathfrak{M}_{A_1}$ задано кручення σ, якому відповідає радикальний фільтр E_1. У роботі [2] показано, що $\varphi(E_1)=\{\varphi(I)\,|\,I\in E_1\}$ радикальний фільтр кільця A_2 і, якщо σ розщеплюється, то кручення $\varphi(\sigma)$, яке відповідає фільтрові $\varphi(E_1)$, також розщеплюється.

Нехай S — правий ідеал кільця A і система правих ідеалів $E_S=\{T\,|\,T$ — правий ідеал; $S+T=A\}$ є радикальним фільтром кільця A. Тоді радикальний фільтр E_S називається радикальним S-фільтром кільця A, а кручення σ_S, яке відповідає радикальному S-фільтрові E_S, називається S-крученням.

Лема 1. Нехай A кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній. Тоді кожний ідеал кільця A визначає S-кручення в категорії $\mathfrak{M}_A$.

Доведення. Нехай S ідеал кільця A і E_S сукупність таких правих ідеалів T кільця A, що $S+T=A$. Перевіримо, що E_S задовольняє умови G.1—G.3 із [5]. Умова G.1 виконується очевидним чином, а умова G.2 випливає із включення $I\subseteq(I:a)$, де $I\in E_S$, $a\in A$. Нехай $I\subseteq J$, $J\in E_S$ і $(I:j)\in E_S$ для кожного $j\in J$, де I, J — ідеали кільця A. Тоді $S+J=A$, тобто існують такі елементи $s\in S$, $j\in J$, що $s+j=1$. За припущенням $(I:j)\in E_S$. Отже, $S+(J:j)=A$, тобто $s_1+j_1=1$ для деяких $s_1\in S$, $j_1\in(J:j)$. Тепер $1=(s+j)(s_1+j_1)=s'+jj_1$, де $s'=ss_1+js_1+sj_1\in S$. Умова $j_1\in(J:j)$ показує, що $jj_1\in J$. Таким чином, $S+J=A$, або $J\in E_S$. Ми показали, що умова G.3 також виконується, отже, E_S є радикальним фільтром. Лема доведена.

Зауваження 1. Нехай σ_S S-кручення визначене ідеалом S кільця A. Тоді $\sigma_S(A)\subseteq S$. Справді, якщо $r\in\sigma_S(A)$, то $rT=0$ для деякого $T\in E_S$. Умова $S+T=A$ показує, що існують такі

$s \in S$, $t \in T$, що $s+t=1$. Тоді $r=rs+rt=rs \in S$ (тому що S — двосторонній ідеал).

Лема 2. Нехай A — кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній, I — ідеал кільця A і $\varphi: A \to B = A/I$ канонічний гомоморфізм. Якщо E_2 радикальний S_2-фільтр кільця B, визначений ідеалом S_2, то існує такий радикальний S_1-фільтр кільця A, що $\varphi(E_1)=E_2$.

Доведення. Нехай $S_1=\varphi^{-1}(S_2)$ — повний прообраз ідеала S_2 відносно гомоморфізму φ. Позначимо через E_1 радикальний S_1-фільтр, визначений ідеалом S_1, існування якого забезпечується лемою 1. Безпосередня перевірка показує, що $\varphi(E_1)=E_2$. Лема доведена.

Сформулюємо теорему 3′, яка є узагальненням теореми 3 із роботи [3], доведення якої зберігається; треба лише до умов а), б), в) і г) додати ще умову д): $\Lambda\lambda_\beta \subseteq \lambda_\beta\Lambda$, а елементи p_α зафіксувати і вважати рівними λ_α для кожного $\alpha < \Omega$ (див. [3], с. 686—687, або [1] с. 83).

Теорема 3′. Нехай σ не радикально-напівпросте кручення і для кожного $I \in E\sigma$ існує $\lambda_I \in I$ такий, що $r(\lambda_I)=0$, $A\lambda_I \subseteq \subseteq \lambda_I A \in E\sigma$. Тоді кручення σ не розщеплюється.

Нагадаємо, що кільце A називається регулярним в сенсі Неймана, якщо для кожного елемента $a \in A$ існує такий елемент $x \in A$, що $axa=a$.

Теорема 1. Нехай A кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній і $J(A)$ його радикал Джекобсона. Якщо над кільцем A всі S-кручення розщеплюються, то кільце $B=A/J(A)$ є регулярним в сенсі Неймана.

Доведення. Нехай $\varphi: A \to B$ канонічний гомоморфізм. За лемою 1 кожний правий ідеал S_2-кільця B визначає S_2-кручення в $\mathfrak{M}_B$, а згідно з лемою 2 існує S_1-фільтр E_1 кільця A такий, що $\varphi(E_1)=E_2$. Тому що за умовою теореми кручення, яке відповідає фільтрові E_1, розщеплюється, то кручення, яке відповідає фільтрові E_2, також розщеплюється. Отже, над кільцем B всі S-кручення розщеплюються. Нехай $b \neq 0$ необоротний справа елемент кільця B, $S=bB$ і E_S радикальний S-фільтр кільця B, визначений ідеалом S.

Розглянемо три можливих випадки:

а) σ_S радикально-напівпросте кручення в $\mathfrak{M}_B$. Тоді в E_S міститься найменший ідеал T. Тому що кожний максимальний правий ідеал кільця B, який не містить ідеала S, належить до E_S, то кожний такий максимальний ідеал містить ідеал T. Таким чином, $S \cap T \subseteq J(B)=0$, тобто $S \oplus T = bB \oplus T = A$ (кільцева пряма сума).

б) $\sigma_S(B)=0$ і σ_S не радикально-напівпросте. Покажемо, що σ_S задовольняє умови теореми 3′. Нехай $T \in E_S$, тоді $S+T=B$, тобто $s+t=1$ для деяких $s \in S$, $t \in T$. Оскільки із $xt=0$ випливає $x(tB)=0$, або, що те саме, $x \in \sigma_S(B)=0$, то лівий анулятор $l(t)$ елемента t нульовий. Нехай $ta=0$. Позначимо через S_x ідеал $(1-ax)B$, де $x \in B$ довільний, а через E_x радикальний

S_x-фільтр, визначений ідеалом S_x. Нехай σ_x кручення, яке відповідає фільтрові E_x. Тоді $B=\sigma_x(B)\oplus K_x$, де K_x деякий ідеал кільця B. Цей розклад показує, що $r+k=1$ для деяких $r\in\sigma_x(B)$, $k\in K_x$. Тому що $t\in\sigma_x(B)$, то $t=rt+kt=rt$, тобто $(r-1)t=0$. Із умови $l(t)=0$ випливає, що $r=1$. Але $r\in\sigma_x(B)$, і згідно зауваження 1 $r=(1-ax)z$, $z\in B$. Це означає, що $(1-ax)$ оборотний справа для кожного $x\in B$. Таким чином, $a\in J(B)=0$. Отже, $r(t)=0$. Решта умов теореми 3′ очевидна. За теоремою 3′ кручення σ_S не розщеплюється, а це суперечить припущенням доводжуваної теореми. Отже, випадок б) не можливий.

в) $\sigma_S(B)=0$, σ_S не радикально-напівпросте. Цей випадок зводиться до випадку б) за допомогою канонічного гомоморфізму $\psi: B\to B/\sigma_S(B)$.

Ми показали, що кожний головний правий ідеал кільця B виділяється прямим доданком, а це означає, що B регулярне в сенсі Неймана кільце ([4] с. 111). Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай A регулярне в сенсі Неймана кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній. Тоді, якщо над кільцем A всі S-кручення розщеплюються, то A є прямою сумою скінченного числа тіл.

Доведення. Нехай S — довільний ідеал кільця A. За лемою 1 S визначає S-кручення σ_S. Із умов теореми випливає, що S-кручення σ_S розщеплюється, а тому $\sigma_S(A)\oplus K=A$. Покажемо, що $\sigma_S(A)=S$. Включення $\sigma_S(A)\subseteq S$ має місце завдяки зауваженню 1. Навпаки, якщо $s\in S$, то з регулярності кільця A випливає, що $sA\oplus K_S=A$, де $K_S\in E_S$. Оскільки $sK_S\subseteq sA\cap K_S=0$, то $s\in\sigma_S(A)$. Отже, $\sigma_S(A)\supseteq S$. Ми показали, що кожний правий ідеал кільця A виділяється прямим доданком. Тепер із умов теореми і з ([4] с. 108 Пропозиція 6) випливає, що A є прямою сумою скінченного числа тіл. Теорема доведена.

Наслідок. Нехай A кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній. Якщо над кільцем A всі S-кручення розщеплюються, то кільце $B=A/J(A)$ є прямою сумою скінченного числа тіл.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Горбачук Е. Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. — «Математические исследования», 1972, VII: 2 (24).
2. Горбачук Е. Л. Радикалы в модулях над разными кольцами. — «Математические исследования», 1972, VII: I (23).
3. Горбачук Е. Л., Расщепляемость кручения и предкручения в категории Λ-модулей. — «Математические заметки», 1967, 2, № 6.
4. Ламбек И. Кольца и модули. М., «Мир», 1971.
5. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. М., «Наука», 1969.
6. Stenström B. Rings and modules of quotiens. — «Lecture Notes in Math», 237, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.