УДК 517.91/943

Л. М. ЛІСЕВИЧ, Л. І. БЛАВАЦЬКА

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ КВАЗІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо квазілінійну систему

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \varphi_i(x), \tag{1}$$

у якої $f_i(y_1, y_2, ..., y_n)$ — монотонні по кожній змінній функції, що мають неперервні частинні похідні, $\varphi_i(x)$ — майже періодичні функції, $i=1, 2, \ldots, n$. Вважатимемо, що система (1) допускає розв'язок $y=y^*(x)=\{y_1^*(x), y_2^*(x), ..., y_n^*(x)\}$, визначений і обмежений на всій дійсній осі $(-\infty<x<+\infty)$, тобто існує $M>0$, що

$$\| y^*(x) \| = \sum_{i=1}^{n} | y_i^*(x) | < M. \tag{2}$$

Лема. Якщо векторна функція $g(x)=\{g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)\}$ неперервна і обмежена в $(x_0, +\infty)$ (або в $(-\infty, x_0)$), то для будь-якого числа τ існує послідовність значень $x_n \to +\infty$ (або $x_n \to -\infty$) таких, що

$$\lim_{n\to\infty} \| g(x_n+\tau) - g(x_n) \| = 0. \tag{3}$$

Для скалярної функції ця лема була доведена Б. П. Демидовичем [2].

Теорема. Нехай

1) функції $f_i(y_1, y_2, ..., y_n)$ — неперервні і мають неперервні частинні похідні у деякій опуклій по $y_1, y_2, ..., y_n$ області, причому $\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \geqslant 0$, $i, k=1, 2, ..., n$,

2) векторна функція $\varphi(x)=\{\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\}$ є неперервною майже періодичною з обмеженим неозначеним інтегралом

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt. \tag{4}$$

Тоді будь-який обмежений розв'язок системи (1) є майже періодичним.

Доведення. На основі теореми про неозначений інтеграл від майже періодичної функції функція $\Phi(x)$ є майже періодичною. Нехай $\tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ — майже період функції $\Phi(x)$, тобто

$$\| \Phi(x+\tau) - \Phi(x) \| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

для $-\infty < x < +\infty$. Позначимо через $y^*(x)$ обмежений на всій дійсній осі розв'язок системи (1), для якого виконується умова (2) і приймемо

$$\Delta_i(x) = y_i^*(x+\tau) - y_i^*(x), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Тоді з системи (1), застосовуючи при цьому відому лему Адамара [3], одержуємо лінійну систему

$$\frac{d\Delta_i(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(x)\,\Delta_j(x) + \varphi_i(x+\tau) - \varphi_i(x), \tag{7}$$

де $K_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ є неперервні функції.

Приймемо $\Delta(x) = \{\Delta_1(x), \ldots, \Delta_n(x)\}$,

$$\Psi_\tau(x) = \{\varphi_1(x+\tau) - \varphi_1(x); \ldots\ldots; \varphi_n(x+\tau) - \varphi_n(x)\},$$

$K(x) = [K_{ij}(x)]$ — матриця виміру $n \times n$ і запишемо систему (7) у вигляді векторного рівняння

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = K(x)\,\Delta(x) + \Psi_\tau(x). \tag{8}$$

Нехай тепер x фіксоване. На основі леми виберемо $x_0 > x$ так, щоб

$$\|\Delta(x_0)\| = \|y^*(x_0+\tau) - y^*(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Як відомо, розв'язок рівняння (8) запишеться

$$\Delta(x) = \Omega_{x_0}^{x}(K)\,\Delta x_0 + \int_{x_0}^{x} \Omega_t^x K(t)\,\Psi_\tau(t)\,dt, \tag{10}$$

де $\Omega_{x_0}^{x}(K)$ — матриціант, який є рівномірно збіжний рядом. Елементи матриці $K(x) = [K_{ij}(x)]$ — невід'ємні та неперервні функції. Якщо прийняти, що $g(x) = \max K_{ij}(x)$ і розглянути матрицю $G(x) = [g(x)]$ виміру $n \times n$, то, як відомо [1],

$$\Omega_{x_0}^{x}(K) \leqslant \Omega_{x_0}^{x}(G) \leqslant e^{-n\int_x^{x_0} g(t)dt} \cdot I, \tag{11}$$

де I — матриця виміру $n \times n$, всі елементи якої одиниці. Нехай $M = \sup\limits_x \|\Omega_{x_0}^{x}(K)\|$. Враховуючи тепер (5), (9) і (11) і поступаючи майже так, як в роботі [1], одержуємо

$$\|\Delta(x)\| = \|y^*(x+\tau) - y^*(x)\| < M \cdot \varepsilon$$

для $-\infty < x < +\infty$, тобто векторна функція $y^*(x)$ майже періодична.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, М., Гостехиздат, 1954.
2. Демидович Б. П. Об одном случае почти периодичности решения обыкновенного дифференциального уравнения. УМН, 1953, т. VIII, вып. 6 (58).
3. Петровский Г. И. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.

УДК 517.946

В. М. ЦИМБАЛ

ВИРОДЖЕННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ЗВИЧАЙНЕ

У змінній смузі $V_T: \{0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < x_i < +\infty\}$ $(i=1, \ldots, n)$ розглядається задача Коші для лінійного рівняння у частинних похідних другого порядку з малим параметром $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\,u = f(x,t), \quad (1)$$

$$u(x,0) = g(x) \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = h(x). \quad (2)$$

Припускаємо, що в області V_T виконуються такі умови:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x); \ \nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j < \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \ \nu < 0,$$

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ — довільні дійсні числа, тобто рівняння (1) є гіперболічне; $b(x, t) > 0$; всі задані функції вважаються достатньо гладкими для проведення подальших викладок.

Методом М. І. Вішика—Л. А. Люстерніка [1] побудуємо асимптотичний розклад розв'язку задачі Коші (1)—(2) за степенями малого параметру ε.

Розв'язок задачі (1)—(2) шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i\,\overline{u}_i(x,t) + \varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\,v_i(x,\eta) + \varepsilon^{N+1} Z_N, \quad (3)$$

де функції $\overline{u}_i(x,t)$, $v_i(x,\eta)$ $\left(\eta = \frac{t}{\varepsilon}\right)$ визначаються відповідно з першого та другого ітераційних процесів [1], наведених нижче; Z_N — нев'язка; N — наперед задане додатне ціле число. $\overline{u}_q(x, t)$ $(q=0, \ldots, N)$ визначаються як розв'язки задач:

$$b(x,t)\frac{\partial \overline{u}_q}{\partial t} + a(x,t)\,\overline{u}_q = f_q(x,t) \ \ (q = 0, \ldots, N), \quad (4)$$