СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, М., Гостехиздат, 1954.
2. Демидович Б. П. Об одном случае почти периодичности решения обыкновенного дифференциального уравнения. УМН, 1953, т. VIII, вып. 6 (58).
3. Петровский Г. И. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.

УДК 517.946

В. М. ЦИМБАЛ

ВИРОДЖЕННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ЗВИЧАЙНЕ

У змінній смузі $V_T: \{0 \leqslant t \leqslant T, \ -\infty < x_i < +\infty\}$ $(i=1, \ldots, n)$ розглядається задача Коші для лінійного рівняння у частинних похідних другого порядку з малим параметром $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\,u = f(x,t), \quad (1)$$

$$u(x,0) = g(x) \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = h(x). \quad (2)$$

Припускаємо, що в області V_T виконуються такі умови:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x); \ \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j < \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \ \nu < 0,$$

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ — довільні дійсні числа, тобто рівняння (1) є гіперболічне; $b(x, t) > 0$; всі задані функції вважаються достатньо гладкими для проведення подальших викладок.

Методом М. І. Вішика—Л. А. Люстерніка [1] побудуємо асимптотичний розклад розв'язку задачі Коші (1)—(2) за степенями малого параметру ε.

Розв'язок задачі (1)—(2) шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \bar{u}_i(x,t) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x,\eta) + \varepsilon^{N+1} Z_N, \quad (3)$$

де функції $\bar{u}_i(x, t)$, $v_i(x, \eta)$ $\left(\eta = \frac{t}{\varepsilon}\right)$ визначаються відповідно з першого та другого ітераційних процесів [1], наведених нижче; Z_N — нев'язка; N — наперед задане додатне ціле число. $\bar{u}_q(x, t)$ $(q=0, \ldots, N)$ визначаються як розв'язки задач:

$$b(x,t)\frac{\partial \bar{u}_q}{\partial t} + a(x,t)\,\bar{u}_q = f_q(x,t) \ (q = 0, \ldots, N), \quad (4)$$

де $f_0(x,t)=f(x,t)$, $f_q(x,t)=-\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_{q-1}}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \bar{u}_{q-1}}{\partial x_i}\right)\right)$

$$(q=1,\ldots,N);$$

$$\bar{u}_q(x,0)=g_q(x) \quad (q=0,\ldots,N), \tag{5}$$

де $g_0(x)\equiv g(x)$, $g_q(x)=-v_{q-1}(x,0)$ $(q=1,\ldots,N)$; $v_p(x,\eta)$ $(p=0,\ldots,N)$ визначаються як розв'язки задач:

$$\frac{\partial^2 v_p}{\partial \eta^2}+b(x,0)\frac{\partial v_p}{\partial \eta}=F_p(x,\eta) \quad (p=0,\ldots,N), \tag{6}$$

де $$F_0(x,\eta)\equiv 0,\ F_p(x,\eta)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v_{p-2}}{\partial x_j}\right)-$$

$$-\sum_{q=1}^{p}\frac{\eta^q}{q!}b^{(q)}(x,0)\frac{\partial v_{p-q}}{\partial \eta}-\sum_{q=0}^{p-1}\frac{\eta^q}{q!}a^{(q)}(x,0)v_{p-q-1}$$

$$(p=1,\ldots,N),\ v_{-1}\equiv 0;$$

$$\frac{\partial v_q(x,0)}{\partial \eta}=h_q(x) \quad (q=0,\ldots,N), \tag{7}$$

де $h_0(x)=-\frac{\partial \bar{u}_0(x,0)}{\partial t}+h(x)$, $h_q(x)=-\frac{\partial \bar{u}_q(x,0)}{\partial t}$ $(q=1,\ldots,N)$,

за умови, що $v_p(x,\eta)\underset{\eta\to\infty}{\to}0$ $(p=0,\ldots,N)$.

Рівняння (4) одержані при підстановці першого з рядів (3) в (1) і зрівнюванні коефіцієнтів при однакових степенях ε. Рівняння (6) одержані таким чином: в однорідному рівнянні, яке відповідає (1), робимо регуляризуюче перетворення $\eta=\frac{t}{\varepsilon}$, розкладаємо коефіцієнти $b(x,\varepsilon\eta)$, $a(x,\varepsilon\eta)$ за степенями $t=\varepsilon\eta$, замість u підставляємо другий з рядів (3) і зрівнюємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Умови (5), (7) знайдені зрівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях ε і підстановці (3) у (2). Як бачимо, функції $\bar{u}_q(x,t)$ визначаються як розв'язки задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами, $v_p(x,\eta)$ визначаються зі звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами ($x_1,\ldots,x_n$ — грають роль параметрів), виконуються умови регулярності виродження [1], тому $v_p(x,\eta)$ $(p=0,\ldots,N)$ є функціями типу примежового шару. Перший і другий ітераційні процеси треба вести одночасно.

Нев'язка Z_N є розв'язок такої задачі:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 Z_N}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial Z_N}{\partial x_i}\right)\right)+b(x,t)\frac{\partial Z_N}{\partial t}+$$

$$+ a(x, t) Z_N = G(x, t); \tag{8}$$

$$Z_N(x, 0) = -v_N(x, 0), \qquad \frac{\partial Z_N(x, 0)}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

де $G(x, t)$ — відома функція.

Для доведення асимптотичної коректності розкладу (3) необхідно одержати оцінку Z_N в деякій нормі у кожній компактній підобласті області V_T. Шукаємо Z_N у вигляді $Z_N = Z_N^{(1)} + Z_N^{(2)}$, де $Z_N^{(1)}$ задовольняє умови (9) і має обмежені похідні до другого порядку [2]. Тоді $Z_N^{(2)}$ є розв'язок задачі, аналогічної до (8)—(9), але умови (9) однорідні, а в правій частині (8) маємо $G^1(x, t)$, яка просто виражається через $G(x, t)$ і $Z_N^{(1)}$.

Для $Z_N^{(2)}$ методом інтегралів енергії [3] одержана оцінка

$$\int\limits_{D_\tau} (Z_N^{(2)})^2 \, dx \, dt \leqslant C,$$

де C — константа, яка не залежить від ε; D_τ — частина характеристичного конуса між гіперплощинами $t = \tau$ і $t = 0$. Звідси випливає асимптотична коректність розкладу (3).

Зауважимо, що результат роботи узагальнює [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. — УМН, 1957, № 5.

2. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехтеориздат, 1953.

3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., Наука. 1973.

4. Smith R. R., Palmer J. T. On the behavior of the solution of the telegraphist's equation for large absorption. — «Arch. Ration. Mech and Analysis», 1970, vol. 39, N 2.

УДК 517.535.4

О. Н. ФРІДМАН

ОЦІНКИ ІНДИКАТОРІВ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛОГО ПОРЯДКУ З ДОДАТНИМИ НУЛЯМИ ТА ПОЛЮСАМИ

Нехай ρ — деяке ціле число, $\rho \geqslant 0$, $\rho(r)$ уточнений порядок (див., наприклад, [7] с. 47), $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$. Уточнений порядок $\rho(r)$ належить до класу збіжності ($\rho(r) \in C$) або класу