$$+ a(x,t) Z_N = G(x,t); \tag{8}$$

$$Z_N(x,0) = -v_N(x,0), \qquad \frac{\partial Z_N(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

де $G(x,t)$ — відома функція.

Для доведення асимптотичної коректності розкладу (3) необхідно одержати оцінку Z_N в деякій нормі у кожній компактній підобласті області V_T. Шукаємо Z_N у вигляді $Z_N = Z_N^{(1)} + Z_N^{(2)}$, де $Z_N^{(1)}$ задовольняє умови (9) і має обмежені похідні до другого порядку [2]. Тоді $Z_N^{(2)}$ є розв'язок задачі, аналогічної до (8)—(9), але умови (9) однорідні, а в правій частині (8) маємо $G^1(x,t)$, яка просто виражається через $G(x,t)$ і $Z_N^{(1)}$.

Для $Z_N^{(2)}$ методом інтегралів енергії [3] одержана оцінка

$$\int\limits_{D_\tau} (Z_N^{(2)})^2\, dx\, dt \leqslant C,$$

де C — константа, яка не залежить від ε; D_τ — частина характеристичного конуса між гіперплощинами $t=\tau$ і $t=0$. Звідси випливає асимптотична коректність розкладу (3).

Зауважимо, що результат роботи узагальнює [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. — УМН, 1957, № 5.

2. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехтеориздат, 1953.

3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., Наука. 1973.

4. Smith R. R., Palmer J. T. On the behavior of the solution of the telegraphist's equation for large absorption. — «Arch. Ration. Mech and Analysis», 1970, vol. 39, N 2.

УДК 517.535.4

О. Н. ФРІДМАН

ОЦІНКИ ІНДИКАТОРІВ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛОГО ПОРЯДКУ З ДОДАТНИМИ НУЛЯМИ ТА ПОЛЮСАМИ

Нехай ρ — деяке ціле число, $\rho \geqslant 0$, $\rho(r)$ уточнений порядок (див., наприклад, [7] с. 47), $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$. Уточнений порядок $\rho(r)$ належить до класу збіжності ($\rho(r) \in C$) або класу розбіжності ($\rho(r)\in D$) залежно від того, збігається чи розбігається інтеграл

$$\int_1^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt.$$

Позначимо через $\rho_1(r)$ функцію

$$\rho_1(r)=\rho+\frac{\ln\int_1^r t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt}{\ln r}\quad(r>1),$$

якщо $\rho(r)\in D$, через $\rho_2(r)$ функцію

$$\rho_2(r)=\rho+\frac{\ln\int_r^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt}{\ln r}\quad(r>1),$$

якщо $\rho(r)\in C$ і через $\rho_3(r)$ функцію $\rho_3(r)\equiv\rho$.

У цій статті розглядається клас $F(\rho(r),\ \delta_1,\ \delta_2)$ мероморфних функцій $f(z)$ цілого порядку з додатними нулями та полюсами, таких, що $-\infty<\delta_1\leqslant\delta_1(f)\leqslant\delta_2(f)\leqslant\delta_2<\infty$,

де
$$\delta_1(f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{r^{\rho(r)}},\quad \delta_2(f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{r^{\rho(r)}};\tag{1}$$

$\nu(r)$ — різниця кількості нулів і полюсів функції $f(z)$ у крузі $\{|z|\leqslant r\}$. Знаходяться точні оцінки для індикаторів функції $f(z)$:

$$h_j(\varphi,f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_j(r)}},\quad 0<\varphi<2\pi,\ j=1,2,3.$$

Наша стаття доповнює роботу [8], де розглядається випадок мероморфних функцій нецілого порядку. Для класу цілих функцій цілого порядку аналогічні задачі розв'язувалися А. А. Гольдбергом [1, 2] і А. А. Кондратюком [3—6].

При $\rho(r)\in C$ мероморфну функцію $f(z)$ можна записати у вигляді

$$f(z)=\exp\{\alpha(f)z^\rho+P(z)\}\prod_{k=1}^\infty E\left(\frac{z}{c_k},\ \rho-1\right)^{\varepsilon_k},$$

де $P(z)$ — многочлен степеня не вище $\rho-1$; $E(z,\ \rho-1)$ — первісний множник Вейєрштрасса роду $\rho-1$; c_k — послідовність, яка складається з нулів та полюсів функції $f(z)$, $1\leqslant c_1\leqslant c_2\leqslant\leqslant\ldots$, $\varepsilon_k=1$, якщо c_k — нуль, $\varepsilon_k=-1$, коли c_k — полюс $f(z)$.

Теорема. Нехай δ_1 і δ_2 — деякі дійсні числа, $-\infty<\delta_1\leqslant\leqslant\delta_2<\infty$ і верхня та нижня щільності $\nu(r)$ (див. (1)) мероморфної функції $f(z)\in F(\rho(r),\ \delta_1,\ \delta_2)$, виміряні відносно $r^{\rho(r)}$, дорівнюють відповідно $\delta_2(f)$ і $\delta_1(f)$, $-\infty<\delta_1\leqslant\delta_1(f)\geqslant\delta_2(f)\leqslant\leqslant\delta_2<\infty$. Тоді, якщо $\rho(r)\in D$, то

$$\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|\leqslant h_1(\varphi,f)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|.$$

Коли $\rho(r)\in C$ і $\alpha(f)=0$, то)

$$-\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|\leqslant h_2(\varphi,f)\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|.$$

Якщо $\rho(r)\in C$ і $\alpha=\alpha(f)\neq 0$, то

$$h_3(\varphi,f)=|\alpha|\cos(\rho\varphi+\arg\alpha).$$

Існує мероморфна функція $f(z)\in F(\rho(r),\ \delta_1,\ \delta_2)$, з $\delta_2(f)=\delta_2$ і $\delta_1(f)=\delta_1$ така, що при $\rho(r)\in D$

$$h_1(\varphi,f)\equiv\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|,$$

а при $\rho(r)\in C$ і $\alpha(f)=0$ така, що

$$h_2(\varphi,f)\equiv-\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|.$$

Для фіксованого φ, $0<\varphi<2\pi$ можна вказати мероморфну функцію $f(z)\in F(\rho(r),\ \delta_1,\ \delta_2)$, $\delta_1\leqslant\delta_1(f)\leqslant\delta_2(f)\leqslant\delta_2$ таку, що при $\rho(r)\in D$

$$h_1(\varphi,f)=\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|,$$

а при $\rho(r)\in C$ і $\alpha(f)=0$

$$h_2(\varphi,f)=-\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|.$$

Доведення теореми з незначними змінами проводиться методом, вказаним А. А. Гольдбергом [2] при доведенні відповідної теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, II. — «Математический сборник», 1963, т. 61, № 3.
2. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, III. — «Математический сборник», 1964, т. 65, № 3.
3. Кондратюк А. А. Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1968, вып. 7.
4. Кондратюк А. А. Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями. — «Сибирский математический журнал», 1970, т. 11, № 5.
5. Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями. — «Литовский математический сборник», 1967, вып. 7, № 1.
6. Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями, II. — «Литовский математический сборник», 1968, вып. 8, № 1.
7. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.
8. Фрідман О. Н. Оцінки індикаторів мероморфних функційного порядку з додатними нулями і полюсами. — «Доповіді АН УРСР», 1972, № 7.

УДК 517.917

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Л. М. ЛІСЕВИЧ

КОМПАКТНІСТЬ І НОРМАЛЬНІСТЬ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

1. Компактність сім'ї S^p-майже періодичних матриць. О. С. Кованько [2] знайшов умови компактності сім'ї $\{f(x)\}$ S^p-майже періодичних функцій. У цій роботі вивчається аналогічне питання для сім'ї $\{F(x)\}$ S^p-майже періодичних матриць.

Означення. Сім'я $\{F(x)\}$ $(-\infty<x<+\infty)$ S^p-майже періодичних матриць називається S^p-компактною, якщо з довільної її послідовності $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\nu(x), \ldots$ можна виділити збіжну за S^p-нормою підпослідовність $F_{\nu_1}(x), F_{\nu_2}(x), \ldots, F_{\nu_n}(x), \ldots$

Лема 1.1. Сім'я $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ S^p-майже періодичних матриць є S^p-компактною тоді і тільки тоді, коли S^p-компактні множини $\{f_{jk}(x)\}$ S^p-майже періодичних функцій.

Доведення. Необхідність. Необхідність умови очевидна. Справді, користуючись поняттям збіжності за S^p-нормою послідовності S^p-майже періодичних матриць [4], із S^p-компактності сім'ї матриць $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ одержуємо S^p-компактність множин функцій $\{f_{jk}(x)\}$ для всіх j, k і $x\in(-\infty, +\infty)$.

Достатність. Допускаємо, що в сім'ї матриць $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ множини функцій $\{f_{jk}(x)\}$ є S^p-компактні для