СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, II. — «Математический сборник», 1963, т. 61, № 3.
2. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, III. — «Математический сборник», 1964, т. 65, № 3.
3. Кондратюк А. А. Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1968, вып. 7.
4. Кондратюк А. А. Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями. — «Сибирский математический журнал», 1970, т. 11, № 5.
5. Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями. — «Литовский математический сборник», 1967, вып. 7, № 1.
6. Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями, II. — «Литовский математический сборник», 1968, вып. 8, № 1.
7. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.
8. Фрідман О. Н. Оцінки індикаторів мероморфних функційного порядку з додатними нулями і полюсами. — «Доповіді АН УРСР», 1972, № 7.

УДК 517.917

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Л. М. ЛІСЕВИЧ

КОМПАКТНІСТЬ І НОРМАЛЬНІСТЬ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

1. Компактність сім'ї S^p-майже періодичних матриць. О. С. Кованько [2] знайшов умови компактності сім'ї $\{f(x)\}$ S^p-майже періодичних функцій. У цій роботі вивчається аналогічне питання для сім'ї $\{F(x)\}$ S^p-майже періодичних матриць.

Означення. Сім'я $\{F(x)\}$ $(-\infty<x<+\infty)$ S^p-майже періодичних матриць називається S^p-компактною, якщо з довільної її послідовності $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\nu(x), \ldots$ можна виділити збіжну за S^p-нормою підпослідовність $F_{\nu_1}(x), F_{\nu_2}(x), \ldots, F_{\nu_n}(x), \ldots$

Лема 1.1. Сім'я $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ S^p-майже періодичних матриць є S^p-компактною тоді і тільки тоді, коли S^p-компактні множини $\{f_{jk}(x)\}$ S^p-майже періодичних функцій.

Доведення. Необхідність. Необхідність умови очевидна. Справді, користуючись поняттям збіжності за S^p-нормою послідовності S^p-майже періодичних матриць [4], із S^p-компактності сім'ї матриць $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ одержуємо S^p-компактність множин функцій $\{f_{jk}(x)\}$ для всіх j, k і $x\in(-\infty, +\infty)$.

Достатність. Допускаємо, що в сім'ї матриць $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ множини функцій $\{f_{jk}(x)\}$ є S^p-компактні для всіх j, k і $x \in (-\infty, +\infty)$. Виділимо з нашої сім'ї матриць довільну послідовність

$$\{F_\nu(x)\} = \{[f_{jk}^{(\nu)}(x)]\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Оскільки всі множини функцій $\{f_{jk}(x)\}$ є S^p-компактні, то з послідовності $\{f_{11}^{(\nu)}(x)\}$ можна виділити збіжну за S^p-нормою підпослідовність $\{f_{11}^{(\nu)_{11}}(x)\}$.

Далі, з послідовності $\{f_{12}^{(\nu)_{11}}(x)\}$ виділяємо збіжну за S^p-нормою підпослідовність $\{f_{12}^{(\nu)_{12}}(x)\}$. Зрозуміло, що підпослідовність $\{f_{11}^{(\nu)_{12}}(x)\}$ також збігається за S^p-нормою. Якщо матриці такої сім'ї мають вимір $r \times l$, то, продовжуючи цей процес виділення збіжних за S^p-нормою підпослідовностей для всіх інших послідовностей $\{f_{jk}^{(\nu)}(x)\}$, ми в кінцевому результаті одержуємо підпослідовність $\nu_* = \nu_{rl}$, для якої всі підпослідовності $\{f_{jk}^{(\nu_*)}(x)\}$ збігаються за S^p-нормою, тобто існує гранична функція $g_{jk}(x)$ (S^p-майже періодична [3]), що

$$\lim_{\nu_* \to \infty} \| f_{jk}^{(\nu_* \to \infty)}(x) - g_{jk}(x) \|_{S^p} = 0$$

для всіх j, k і $x \in (-\infty, +\infty)$.

Таким чином, існує гранична S^p-майже періодична матриця $G(x) = [g_{jk}(x)]$ така, що

$$\lim_{\nu_* \to \infty} \| F_{\nu_*}(x) - G(x) \|_{S^p} = 0$$

для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Отже, сім'я матриць $\{F(x)\}$ є S^p-компактна.

Розглянемо тепер для нашої сім'ї матриць $\{F(x)\} = \{[f_{jk}(x)]\}$ при фіксованому $h > 0$ множину матриць вигляду

$$F_h(x) = [f_{jk}(x, h)], \text{ де } f_{jk}(x, h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f_{jk}(t)\, dt$$

функції Стеклова. Оскільки $f_{jk}(x, h)$ є майже періодичними функціями Бора [3], то $F_h(x)$, за означенням, є майже періодичною матрицею Бора.

Теорема 1. I. Для того, щоб сім'я $\{F(x)\} = \{[f_{jk}(x)]\}$ S^p-майже періодичних матриць була S^p-компактна, необхідно та достатньо, щоб виконувалися такі умови:

1) Для сім'ї матриць $\{F(x)\}$ при будь-якому $h > 0$ множина майже періодичних матриць Бора $\{F_h(x)\}$ компактна у розумінні рівномірної збіжності на всій дійсній осі;

2) $$\lim_{h \to 0} \| F(x) - F_h(x) \|_{S^p} = 0$$

рівномірно відносно $x \in (-\infty, +\infty)$.

Доведення. Необхідність. Допускаємо, що сім'я матриць $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ S^p-компактна, а отже, за лемою 1.1 множини функцій $\{f_{jk}(x)\}$ також S^p-компактні. На основі теореми компактності О. С. କованька [2] робимо висновок, що множини $\{f_{jk}(x, h)\}$ майже періодичних функцій Бора компактні у розумінні рівномірної збіжності на всій дійсній осі і

$$\lim_{h\to 0}\| f_{jk}(x)-f_{jk}(x,h)\|_{S^p}=0,$$

для всіх j, k. Тоді з леми 1.1. випливає, що множина $\{F_h(x)\}$ майже періодичних матриць Бора компактна в розумінні рівномірної збіжності на всій дійсній осі.

Необхідність другої умови випливає з співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\| F(x)-F_h(x)\|_{S^p}\leqslant \lim_{h\to 0}\sum_{j,k}\| f_{jk}(x)-f_{jk}(x,h)\|_{S^p}=0.$$

Достатність. Якщо множина $\{F_h(x)\}=\{[f_{jk}(x, h)]\}$ майже періодичних матриць Бора компактна у розумінні рівномірної збіжності на всій дійсній осі, то із леми 1. 1. випливає, що й множини функцій $\{f_{jk}(x, h)\}$ також компактні у розумінні рівномірної збіжності.

Разом з тим із співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\| f_{jk}(x)-f_{jk}(x,h)\|_{S^p}\leqslant \lim_{h\to 0}\| F(x)-F_h(x)_{S^p}=0$$

отримуємо

$$\lim_{h\to 0}\| f_{jk}(x)-f_{jk}(x,h)\|_{S^p}=0.$$

Тепер знову на основі теореми О. С. କованька робимо висновок, що множини функцій $\{f_{jk}(x)\}$ S^p-компактні, а отже, за лемою 1.1 і сім'я матриць $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ також S^p-компактна.

2. **Нормальність S^p-майже періодичних матриць.** Користуючись поняттям нормальності функції, Бохнер дав інше означення майже періодичності функції Бора, яке пізніше було узагальнено на майже періодичні матриці Бора. Доведено також еквівалентність обох означень [3]. Ми розглянемо ці питання для S^p-майже періодичних матриць.

Означення. Сумовна разом із своїм p-м $(p\geqslant 1)$ степенем у кожному скінченному інтервалі матриця $F(x)$ називається S^p-нормальною, якщо сім'я матриць $\{F(x+h)\}$ $(-\infty<x<+\infty)$ є S^p-компактною.

Лема 2.1. Матриця $F(x)=[f_{jk}(x)]$ є S^p-нормальною тоді і тільки тоді, коли всі її елементи $f_{jk}(x)$ є S^p-нормальні функції.

Це твердження доводиться на основі леми 1.1.

Теорема 2.1. Для того щоб матриця $F(x)$ була S^p-майже періодичною, необхідно і достатньо, щоб вона була S^p-нормальною.

Доведення. 1) Нехай матриця $F(x)=[f_{jk}(x)]$ є S^p-майже періодична, тобто всі її елементи $f_{jk}(x)$, за означенням, є S^p-майже періодичними функціями. На основі теореми Бохнера робимо висновок, що всі функції $f_{jk}(x)$ S^p-нормальні, отже, за лемою 2.1. і матриця $F(x)=[f_{jk}(x)]$ S^p-нормальна.

2) Якщо матриця $F(x)=[f_{jk}(x)]$ S^p-нормальна, то всі її елементи $f_{jk}(x)$ за лемою 2.1 також S^p-нормальні функції. Тепер знову на основі теореми Бохнера робимо висновок, що $f_{jk}(x)$ S^p-майже періодичні функції, а отже, і матриця $F(x)=$ $=[f_{jk}(x)]$, за означенням, S^p-майже періодична.

Зауваження. Тому що S^p-нормальність матриці є необхідною та достатньою умовою її S^p-майже періодичності, то цю властивість можна прийняти за означення S^p-майже періодичності матриці. Отже, S^p-нормальну матрицю $F(x)$ називатимемо S^p-майже періодичною.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
2. Кованько А. С. О компактности систем обобщенных почти периодических функций Степанова. — ДАН СССР, т. 26, 3 (1940).
3. Левитан Б. М. Почти периодические функции, М., ГИТТЛ, 1953.
4. Лісевич Л. М., Ковальчук Б. В. S^p-майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^p-майже періодичною правою частиною. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1973, вип. 8.