ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

І. Д. КВІТ

ДВОПАРАМЕТРИЧНА СІМ'Я СИНГУЛЯРНИХ РОЗПОДІЛІВ

1. Розглянемо гру двох осіб A та B. Нехай кожна партія гри складається з необмеженого числа незалежних кидань однорідної симетричної монети. Якщо при k-му киданні монети випаде герб, то гравцеві A за рахунок гравця B нараховується ac^{k-1} монетних одиниць, $a>0$, $0<c<\frac{1}{2}$; якщо ж випаде число, то гравцеві B за рахунок гравця A нараховується ac^{k-1} монетних одиниць, тобто гравцеві A нараховується $-ac^{k-1}$ монетних одиниць. Результат k-го кидання монети описується випадковою змінною ξ_k, що з половинною ймовірністю набуває значення -1 або $+1$ залежно від того, чи випаде число чи герб. Виграш гравця A в результаті проведеної партії дорівнює

$$\xi(a, c)=\sum_{k=1}^{\infty} ac^{k-1}\xi_k, \quad \left(a>0,\ 0<c<\frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Оскільки сподівання випадкової змінної ξ_k дорівнює нулю, то сподіваний виграш гравця A в одній партії також дорівнює нулю, $E\xi(a, c)=0$. Таким чином, задана гра справедлива. Очевидно, що найменше та найбільше значення випадкової змінної (1) відповідно дорівнює

$$\sum_{k=1}^{\infty} ac^{k-1}\cdot(-1)=-\frac{a}{1-c}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} ac^{k-1}\cdot(+1)=\frac{a}{1-c}.$$

Звідси випливає, що випадкова змінна (1) може набувати свої значення лише на відрізку

$$I=\left[-\frac{a}{1-c}, \frac{a}{1-c}\right], \quad \left(a>0,\ 0<c<\frac{1}{2}\right), \tag{2}$$

і отже, її функція розподілу $F(x;\ a,\ c)$ дорівнює 0 при $x<-\frac{a}{1-c}$ та 1 при $x\geqslant\frac{a}{1-c}$. Покажемо, що функція розподілу випадкової змінної (1) сингулярна. Справді, якщо при першому киданні монети випаде число, то гравець A виграє не більше, ніж

$$-a+\sum_{k=2}^{\infty} ac^{k-1}\cdot(+1)=-\frac{a(1-2c)}{1-c}; \tag{3}$$

якщо ж випаде герб, то не менше, ніж

$$a+\sum_{k=2}^{\infty} ac^{k-1}\cdot(-1)=\frac{a(1-2c)}{1-c}. \tag{4}$$

Отже, випадкова змінна (1) не може набувати значень між (3) і (4),

$$P\left\{-\frac{a(1-2c)}{1-c}<\xi(a,c)<\frac{a(1-2c)}{1-c}\right\}=0;$$

на доповненні до відрізка (2) маємо

$$P\left\{-\frac{a}{1-c}\leqslant\xi(a,c)\leqslant-\frac{a(1-2c)}{1-c}\right\}=\frac{1}{2},$$

$$P\left\{\frac{a(1-2c)}{1-c}\leqslant\xi(a,c)\leqslant\frac{a}{1-c}\right\}=\frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$F(x;a,c)=\frac{1}{2},\quad -\frac{a(1-2c)}{1-c}\leqslant x<\frac{a(1-2c)}{1-c},$$

і отже, стрибок функції розподілу випадкової змінної (1) не може бути більший від половини.

Якщо при перших двох киданнях монети випаде число, то гравець A виграє не більше, ніж

$$-a-ac+\sum_{k=3}^{\infty} ac^{k-1}\cdot(+1)=-\frac{a(1-2c^2)}{1-c}; \tag{5}$$

якщо при першому киданні монети випаде число, а при другому герб, то гравець A виграє не менше, ніж

$$-a+ac+\sum_{k=3}^{\infty} ac^{k-1}\cdot(-1)=-\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}. \tag{6}$$

Отже, випадкова змінна (1) не може набувати значень між (5) і (6),

$$P\left\{-\frac{a(1-2c^2)}{1-c}<\xi(a,c)<-\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}\right\}=0;$$

і далі

$$P\left\{-\frac{a}{1-c}\leqslant\xi(a,c)\leqslant-\frac{a(1-2c^2)}{1-c}\right\}=\frac{1}{4},$$

$$P\left\{-\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}\leqslant\xi(a,c)\leqslant-\frac{a(1-2c)}{1-c}\right\}=\frac{1}{4}.$$

Звідси випливає, що

$$F(x; a, c) = \frac{1}{4}, \quad -\frac{a(1-2c^2)}{1-c} \leqslant x < -\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}.$$

Якщо при першому киданні монети випаде герб, а при другому число, то гравець A виграє не більше, ніж

$$a - ac + \sum_{k=3}^{\infty} ac^{k-1} \cdot (+1) = \frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}; \tag{7}$$

якщо ж при перших двох киданнях монети випаде герб, то гравець A виграє не менше, ніж

$$a + ac + \sum_{k=3}^{\infty} ac^{k-1} \cdot (-1) = \frac{a(1-2c^2)}{1-c}. \tag{8}$$

Таким чином, випадкова змінна (1) не може набувати значень між (7) і (8),

$$P\left\{\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c} < \xi(a, c) < \frac{a(1-2c^2)}{1-c}\right\} = 0;$$

і далі

$$P\left\{\frac{a(1-2c)}{1-c} \leqslant \xi(a, c) \leqslant \frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}\right\} = \frac{1}{4},$$

$$P\left\{\frac{a(1-2c^2)}{1-c} \leqslant \xi(a, c) \leqslant \frac{a}{1-c}\right\} = \frac{1}{4}.$$

Звідси випливає, що

$$F(x; a, c) = \frac{3}{4}, \quad \frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c} \leqslant x < \frac{a(1-2c^2)}{1-c},$$

і отже, стрибок функції розподілу випадкової змінної (1) не може бути більший від $\frac{1}{4}$.

Після n кидань монети стає ясним, що стрибок функції розподілу випадкової змінної (1) не може бути більший від $\frac{1}{2^n}$. Оскільки випадкова змінна (1) визначається безмежним числом кидань монети, то її функція розподілу $F(x; a, c)$ неперервна. Вона набуває сталих значень на інтервалах зі сумарною мірою на відрізку (2)

$$\frac{2a(1-2c)}{1-c} + 2 \cdot \frac{2a(1-2c)}{1-c} \cdot c + 2^2 \cdot \frac{2a(1-2c)}{1-c} \cdot c^2 + \cdots = \frac{2a}{1-c},$$

тобто рівною довжині самого відрізка (2). Похідна неперервної функції розподілу $F(x; a, c)$ всередині інтервалів сталості дорівнює нулю. Отже, $F(x; a, c)$ росте від 0 до 1 на множині міри нуль з відрізка (2). Ця множина потужності континуум (порівн. [1], с. 53—56). Таким чином, функція розподілу $F(x; a, c)$ випадкової змінної (1) сингулярна.

2. Характеристична функція $f(s; a, c)$ суми (1) незалежних випадкових змінних $ac^{k-1}\xi_k$ дорівнює добуткові характеристичних функцій доданків

$$f(s; a, c) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos ac^{k-1} s, \left(a > 0, \ 0 < c < \frac{1}{2}\right), \ -\infty < s < \infty. \quad (9)$$

Очевидно, що характеристична функція (9) задовольняє функціональне співвідношення

$$f\left(\frac{s}{c}; a, c\right) = \cos \frac{a}{c} s f(s; a, c). \quad (10)$$

Залежно від параметра c функція (9) досить по-різному поводиться на нескінченності. Для виявлення цього розглядаємо геометричну прогресію з першим членом $s_0 > 0$ і знаменником $\frac{1}{c}$

$$s_0, \ s_1 = \frac{s_0}{c}, \ s_2 = \frac{s_0}{c^2}, \ldots, \ \left(0 < c < \frac{1}{2}\right). \quad (11)$$

Застосовуючи співвідношення (10) до послідовності (11) при $s_0 = \frac{\pi}{an}$, $c = \frac{1}{n}$, $(n = 3, 4, \ldots)$, можна довести нерівність

$$1 - \frac{\pi^2}{2(n^2-1)} < \max_{|s|>N} |f(s; a, c)| < 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + \frac{\pi^4}{24n^4}, \quad (n = 3, 4, \ldots), \quad (12)$$

де N — довільно велике додатне число, а при $s_0 = \frac{\pi}{\left(2 + \frac{1}{2^n}\right)a}$, $c = \frac{2^n}{2^{n+1}+1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, можна довести нерівність

$$\max_{|s|>N} |f(s; a, c)| < \cos \frac{\pi}{2 + \frac{1}{2^n}}, \quad (13)$$

(порівн. [2], с. 135—140). Таким чином, максимум модуля характеристичної функції (9) сингулярної випадкової змінної (1) при далеких s може бути довільним числом L, $0 < L < 1$ при відповідному виборі параметра c, $0 < c < \frac{1}{2}$.

3. Відзначимо, що при $c=0$ випадкова змінна (1) стає дискретною, яка з половинною ймовірністю набуває значень $-a$ та $+a$; при $c=\frac{1}{2}$ випадкова змінна (1) стає рівномірною на відрізку $[-2a, 2a]$; при $a=0$ випадкова змінна (1) стає невластивою з єдиним значенням нуль. Таким чином, двопараметрична сім'я сингулярних випадкових змінних (1) має граничними змінними невластиву, дискретну та абсолютно неперервну. Навпаки, можемо уявити собі, що одинична маса, розміщена у точці нуль числової осі, роздвоїлася: половина з неї перемістилася в точку $-a$, та половина в точку $+a$. Далі кожна з половинних мас може рівномірно розсіятися від центрів розсіяння $-a$ і $+a$ вліво та вправо зі силою розсіяння, характеризованою параметром c, $0<c\leqslant\frac{1}{2}$, утворюючи при $0<c<\frac{1}{2}$ сингулярний розподіл на відрізку $\left[-\frac{a}{1-c}, \frac{a}{1-c}\right]$, або при $c=\frac{1}{2}$ абсолютно неперервний рівномірний розподіл на відрізку $[-2a, 2a]$. Зауважимо, що при $a=1-c$ половинні маси розсіваються від точки -1 вправо та від точки $+1$ вліво, утворюючи сингулярний розподіл або абсолютно неперервний рівномірний розподіл на тому самому відрізку $[-1, 1]$. При додатних значеннях a ближчих до нуля сингулярна змінна (1) подібніша до невластивої, при значеннях c ближчих до нуля вона подібніша до дискретної, а при c ближчих до половини подібніша до абсолютно неперервної рівномірно розподіленої змінної. Це підтверджується поведінкою характеристичної функції (9) випадкової змінної (1) в околі нескінченності. Справді, характеристична функція (9) неперервно залежить від параметрів a та c, і

$$f(s; 0, c) = 1; f(s; a, 0) = \cos as, a > 0; f\left(s; a, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sin 2as}{2as}, \ a > 0.$$

Звідси,

$$\left|f\left(\frac{\pi k}{a}; a, 0\right)\right| = 1, \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \ \lim_{|s|\to\infty} f\left(s; a, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Останні співвідношення, що характеризують дискретну й абсолютно неперервну змінну, можна також одержати відповідно з нерівностей (12) і (13) при $n\to\infty$.

Розсіяння випадкової змінної (1) оцінюється дисперсією. Дисперсія суми (1) незалежних випадкових змінних $ac^{k-1}\xi_k$ дорівнює сумі дисперсій доданків

$$D\xi(a, c) = \frac{a^2}{1-c^2}, \ \left(a > 0, \ 0 < c < \frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

Як бачимо, дисперсія зростає від нуля для невластивої змінної й a^2 для двозначної дискретної змінної до $\frac{4}{3}a^2$ для абсолютно неперервної рівномірно розподіленої випадкової змінної.

4. Якщо на початку п. 1 вважати, що в разі випадання числа гравець B нічого не одержує за рахунок гравця A, то прийдемо до двопараметричної випадкової змінної, розподіленої на відрізку $\left[0, \frac{a}{1-c}\right]$ замість (2). Зокрема, при $a=1-c$ матимемо однопараметричну сім'ю сингулярних розподілів, використану в [3]. Один із таких сингулярних розподілів при $c=\frac{1}{4}$ маємо в [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Київ, «Вища школа», 1974.
2. Квіт І. Д. Характеристичні функції. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972.
3. Квіт І. Д. Сингулярні стратегії. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М., «Мир», 1967.

УДК 518:512.36

О. М. КОСТОВСЬКИЙ, Г. Г. ЦЕГЕЛИК

ВИЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ НУЛІВ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

В [1] за допомогою параметрів визначається нижня границя для модулів нулів степеневих рядів. Використовуючи параметри, у [2] наводяться формули для визначення правої границі нулів рядів Діріхле з дійсними показниками. У нашій роботі ці результати узагальнюються на ряди Діріхле з комплексними показниками.

Розглянемо абсолютно збіжний у деякій області D ряд [3]

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n z} \ (A_0 \neq 0,\ \lambda_0=0), \tag{1}$$

де $z=x+iy$, A_n, λ_n — комплексні числа; $0<\arg\lambda_n<\frac{\pi}{2}$ $(n=1, 2, \ldots)$, $0<|\lambda_1|<|\lambda_2|<\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$.

Нехай $a_n=|A_n|$, $\lambda_n=\beta_n+i\gamma_n$ і $\{\alpha_n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — до-