СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., «Мир», 1972.
2. Ощипко Л. Й., Іванків К. С. Застосування геометричного програмування до оптимізації по вазі тонкостінних конструкцій. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1976, вип. 11.
3. Прочность, упругость, колебания. Справочник. Т. 1. М., «Машиностроение», 1968.

УДК 518:517.948

Ю. М. ЩЕРБИНА

ОДИН КЛАС ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

У роботі [9] (с. 188—197) запропоновано клас ітераційних методів високого порядку збіжності для розв'язування нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Тому що обчислювальні схеми всіх методів з цього класу використовують лише першу похідну, значення якої на кожному кроці обчислюється лише в одній точці, то цікавим є узагальнення методів з [9] для розв'язування операторних рівнянь у банаховому просторі.

Нехай задано рівняння

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

де P — достатньо гладкий нелінійний оператор, що діє з банахового простору X у банахів простір Y. Розглянемо клас ітераційних методів для розв'язування задачі (1)

$$x_{n+1} = x_n - \sum_{k=1}^{m-1} a_k^{(m)} F_k^{(m)}(x_n), \tag{2}$$

де $F_k^{(m)}(x) = \Gamma(x) P\left[x + \sum_{j=1}^{k-1} b_{k,j}^{(m)} F_j^{(m)}(x)\right]$, $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$,

$F_1^{(m)}(x) = \Gamma(x) P(x)$, $\sum_{j=1}^{0} = 0$, $a_k^{(m)}, b_{k,j}^{(m)}$ — дійсні коефіцієнти.

Для вибору конкретного методу з класу (2) величина m фіксується наперед. Коефіцієнти $a_k^{(m)}$, $b_{k,j}^{(m)}$ обчислюються з умов забезпечення порядку збіжності не нижче m, а також найбільшої ефективності [2] для розв'язування певного класу задач. Це здійснюється таким чином. Виділимо з класу (2), наприклад, наступний алгоритм ($m=3$)

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \tag{3}$$

де $\Phi(x) = x - a_1^{(3)} F_1^{(3)}(x) - a_2^{(3)} F_2^{(3)}(x),\ \Gamma(x) = [P'(x)]^{-1},$

$$F_1^{(3)}(x) = \Gamma(x) P(x),\ F_2^{(3)}(x) = \Gamma(x) P[x + b_{2,1}^{(3)} F_1^{(3)}(x)].$$

Після нескладних перетворень з використанням формули Тейлора [4] одержимо

$$\Phi(x) = x - [a_1^{(3)} + a_2^{(3)}(1 + b_{2,1}^{(3)})]\Gamma(x) P(x) -$$

$$-\frac{1}{2} a_2^{(3)} (b_{2,1}^{(3)})^2 \Gamma(x) P''(x)(\Gamma(x) P(x)^2 -$$

$$-\frac{1}{2} a_2^{(3)} (b_{2,1}^{(3)})^3 \Gamma(x) \int_0^1 P'''(x + \tau b_{2,1}^{(3)} \Gamma(x) P(x))(1-\tau)^2 d\tau\, (\Gamma(x) P(x))^3.$$

Відомо [8], що оператор

$$\Psi(x) = x - \Gamma(x) P(x) - \frac{1}{2}\Gamma(x) P''(x)(\Gamma(x) P(x))^2$$

породжує ітераційний процес Чебишева

$$x_{n+1} = \Psi(x_n).$$

Порядок збіжності цього процесу дорівнює трьом.

Розглянемо різницю

$$\Phi(x) - \Psi(x).$$

Використовуючи теорему 5 з [7], приходимо до висновку, що алгоритм (3) має третій порядок збіжності, якщо коефіцієнти $a_1^{(3)}$, $a_2^{(3)}$, $b_{2,1}^{(3)}$ задовольняють умови

$$a_1^{(3)} + a_2^{(3)}(1 + b_{2,1}^{(3)}) = 1, \quad a_2^{(3)} \cdot (b_{2,1}^{(3)})^2 = 1. \tag{4}$$

Таким чином, співвідношення (3)—(4) визначають однопараметричну сім'ю методів третього порядку збіжності.

Цікаво дослідити деякі конкретні значення коефіцієнтів [9]. Зокрема, при $a_1^{(3)} = 0$ $(b_{2,1}^{(3)})^2 = 1 + b_{2,1}^{(3)}$, звідки $b_{2,1}^{(3)} = c = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx$ $\approx -0{,}62$. Тоді одержимо процес

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{c^2}\Gamma_n P(x_n + c\Gamma_n P(x_n)),$$

де $\Gamma_n = \Gamma(x_n)$. При $a_1^{(3)} = a_2^{(3)} = 1$, $b_{2,1}^{(3)} = -1$ дістаємо метод, розглянутий в [6].

Для формулювання теореми типу Л. В. Канторовича [3], яка дає достатні умови збіжності процесу (3)—(4), скористаємося загальними результатами з [1]. Перетворимо процес (3)—(4) до вигляду

$$x_{n+1} = x_n - U_n^{-1}\Gamma_n P(x_n),$$

де
$$U_n^{-1} = I + \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n) +$$
$$+ \frac{1}{2} b_{2,1}^{(3)} \Gamma_n \int_0^1 P'''(x_n + \tau b_{2,1}^{(3)} \Gamma_n P(x_n))(1-\tau)^2 d\tau (\Gamma_n P(x_n))^2,$$
$$\Gamma_n = \Gamma(x_n) = [P'(x_n)]^{-1}.$$

Теорема. Нехай виконуються умови:

1) для початкового наближення $x_0 \in X$ існує оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, причому $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$;

2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

3) $\|P''(x)\| \leqslant M$, $\|P'''(x)\| \leqslant N$ в області
$$\Omega_0 = \{x : \|x - x_0\| \leqslant g(h_0)\eta_0/(1 - w_0)\},$$
де
$$w_0 = Kh_0^2/(1 - h_0 g(h_0)), \; g(h_0) = 1 +$$
$$+ \frac{1}{2}h_0 + \frac{|b_{2,1}^{(3)}|}{6} \cdot \frac{N}{B_0 M^2} h_0^2, \; h_0 = B_0 M \eta_0,$$
$$K = \left(\frac{1}{4} + \frac{|b_{2,1}^{(3)}|}{12} \cdot \frac{N}{M^2}\eta_0\right) g(h_0) + \frac{N}{6B_0 M^2} g(h_0)(g^2(h_0) +$$
$$+ |b_{2,1}^{(3)}|) + \frac{1}{1 - v_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{|b_{2,1}^{(3)}|}{6} \cdot \frac{N}{M}\eta_0\right)^2 g(h_0),$$
$$v_0 = \frac{1}{2}h_0 + \frac{|b_{2,1}^{(3)}|}{6} \cdot \frac{N}{B_0 M^2} h_0^2 < 1;$$

4) $h_0 g(h_0) < 1$;

5) $s_0^2 = \dfrac{w_0}{1 - h_0 g(h_0)} < 1$.

Тоді рівняння (1) має розв'язок $x^* \in \Omega_0$, до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за (3)—(4), причому
$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{g(h_0)}{1 - w_0}(1 - h_0 g(h_0))^n s_0^{3^n - 1}\eta_0.$$

Доведення полягає в елементарній перевірці, що при сформульованих припущеннях виконуються умови 1)—6) теореми 1 з [1]. При цьому використовується представлення оператора, оберненого до U_n^{-1}, за допомогою ряда́ Неймана [5].

Аналогічно до попереднього досліджуються й інші методи з класу (2). Фіксуємо m і, використовуючи результати теореми 5 з роботи [7], підбираємо коефіцієнти $a_k^{(m)}$, $b_{k,j}^{(m)}$. Далі, користуючись загальними результатами з [1], формулюємо відповідну теорему з умовами типу Л. В. Канторовича, яка дає достатні умови збіжності алгоритму. Для цього потрібно лише підрахувати необхідні константи.

Виявляється [9], що відповідним вибором коефіцієнтів $a_k^{(m)}$, $b_{k,j}^{(m)}$ порядок збіжності деяких алгоритмів з класу (2) можна зробити більшим від m.

Наприклад, метод ($m=4$).

$$x_{n+1} = \Xi(x_n)$$

при

$$\Xi(x) = x - \frac{1}{c^2}\Gamma(x) P(x + c\Gamma(x) P(x)) -$$

$$- \Gamma(x) P\left(x - \frac{1}{c^2}\Gamma(x) P(x + c\Gamma(x) P(x))\right),$$

де $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$ має четвертий порядок збіжності, а при

$$\Xi(x) = x - \Gamma(x) P(x) - \frac{9}{5}\Gamma(x) P[x - \Gamma(x) P(x)] -$$

$$- \frac{1}{5}\Gamma(x) P\{x - \Gamma(x) P(x) - 5\Gamma(x) P[x - \Gamma(x) P(x)]\} -$$

п'ятий. Системи рівнянь для обчислення коефіцієнтів $a_k^{(m)}$, $b_{k,j}^{(m)}$ збігаються з наведеними в [9].

Дещо інший підхід до вивчення методів високого порядку збіжності, обчислювальні схеми яких використовують лише перші похідні, розглянуто в [6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бартиш М. Я. О методах типа Ньютона—Канторовича. — ВИНИТИ, № 5653—73 Деп.

2. Бартіш М. Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь. — «ДАН УРСР, серія А», 1968, № 5.

3. Канторович Л. В. О методе Ньютона. — «Труды математического ин-та АН СССР», 1949, вып. 28.

4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., «Мир», 1971.

5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.

6. Лика Д. К. Некоторые теоремы о сходимости многоточечных итерационных процессов в суперметрических пространствах. — «Известия АН Молдавской ССР, серия физико-технических и математических наук», 1972, № 2.

7. Чернышенко В. М. Общая теория итерационных методов решения нелинейных функциональных уравнений. Автореф. докт. дис., Днепропетровск, 1974.

8. Шафиев Р. А. О некоторых итерационных процессах. — «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1964, т. 4, № 1.

9. Traub J. F. Iterative Methods for the Solution of Equations. Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.