УДК 518:517.948

П. С. СЕНЬО

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МАЖОРАНТ ДО ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ТИПУ РУНГЕ

Нехай задано нелінійне операторне рівняння

$$P(x)=0, \tag{1}$$

де P діє з простору X в простір Y; простори X, Y узагальнено нормовані лінійними напівупорядкованими просторами відповідно Z та W [2].

Для розв'язування рівняння (1) застосуємо методи типу Рунге

$$x_{n+1}=x_n-U_n^{-1}P(x_n)(n=0,1,2,\cdots), \tag{2}$$

де $U_n=\left[(1-\beta)P'(x_n)+\beta P'\left(x_n-\frac{1}{2\beta}\Gamma_n P(x_n)\right)\right]$, $\Gamma_n=[P'(x_n)]^{-1}$,

β — довільне дійсне число, що не дорівнює нулю.

В [1] методи (2) розглянуті для випадку, коли простори X, Y банахові. Тут розглянемо ширший клас рівнянь, а саме рівняння, означені в узагальнено нормованих просторах. Для їх дослідження застосуємо принцип мажорант, розроблений в [3], [4]. При цьому ряд оцінок з [1] суттєво уточнено.

Поряд з рівнянням (1) розглянемо

$$Q(z)=0, \tag{3}$$

де оператор Q діє з Z в W; $|P'(x)|\leqslant Q'(z)$ для $x\longleftrightarrow z$. Рівняння (3) розв'язуватимемо аналогічно (2).

Достатні умови збіжності послідовності $\{x_n\}$, побудованої за (2), до розв'язку рівняння (1) і існування цього розв'язку x^* дає наступна теорема.

Теорема 1. Нехай P і Q неперервні і тричі диференційовні відповідно по шляхах $x_0, x_1, \cdots$ і $z_0, z_1, \cdots$ та виконуються умови:

1) для початкового наближення x_0 існують оператори $\Gamma_0=[P'(x_0)]^{-1}$, $\Delta_0=[Q'(z_0)]^{-1}$, причому Δ_0 — неперервний для $x\longleftrightarrow z$ і $|\Gamma_0|\leqslant-\Delta_0$;

2) $|\Gamma_0 P(x_0)|\leqslant-\Delta_0 Q(z_0)$;

3) $|\Gamma_0 P''(x)|\leqslant-\Delta_0 Q''(z)$;

4) $|\Gamma_0 P'''(x)|\leqslant-\Delta_0 Q'''(z)$; для $x\longleftrightarrow z$.

Тоді зі збіжності процесу типу Рунге для рівняння (3) випливає існування розв'язку x^* і збіжність процесу (2) для рівняння (1), причому $|x^*-x_n|\leqslant z^*-z_n$.

Доведення. На першому кроці (2) можна розглядати як процес послідовних наближень для рівняння $x=U(x)$, де $U(x)=x-U_0^{-1}P(x)$.

Тоді з теореми 1 [3] випливає $|x_1 - x_0| \leqslant z_1 - z_0$. Тепер на основі умов теореми одержуємо

$$|\Gamma_0 P(x_1)| \leqslant -\Delta_0 Q(z_1).$$

Оператор $I-(I-\Delta_0 Q'(z_1))$ має обернений рівний $[Q'(z_1)]^{-1} Q(z_0)$. Оскільки $|I - \Gamma_0 P'(x_1)| = |-\int\limits_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x)\,dx| \leqslant$ $\leqslant -\Delta_0 \int\limits_{z_0}^{z_1} Q''(z)\,dz = I - \Delta_0 Q'(z_0)$, то існує оператор $\Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1}$ і при цьому $|\Gamma_1| \leqslant -[Q'(z_1)]^{-1} = -\Delta_1$. Легко перевірити, що при заміні точок x_0 і z_0 на x_1 і z_1 умови теореми будуть виконуватися, а тому аналогічний процес може бути продовжений.

Методом математичної індукції легко виявити, що

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant z_{n+1} - z_n. \tag{4}$$

Тому що процес типу Рунге для рівняння (3) збігається, то з (4) випливає збіжність послідовності $\{x_n\}$, одержаної за (2), а з того, що $Q'(z)$ мажорує $P'(x)$, випливає існування розв'язку (1) $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Теорема доведена.

Границі області єдиності кореня рівняння (1) дає теорема 2.

Теорема 2. Нехай P і Q неперервні тричі диференційовні в

$$|x - x_0| \leqslant z - z_0 < z' - z_0 \tag{5}$$

і виконуються умови:

1) для початкового наближення x_0 умови 1), 2) теореми 1;
2) умови 3), 4) теореми 1 в області (5);
3) $Q(z') \leqslant 0$;
4) рівняння (3) має єдиний корінь z^* в інтервалі $z_0 \leqslant z \leqslant z'$.

Тоді рівняння (1) має єдиний корінь в області (5), причому кожну точку з (5) можна брати за початкове наближення для (2).

Доведення. $Q(z') \leqslant 0 \leqslant z'$ і $z_1 = Q(z_0) \geqslant z_0$, бо $z_1 = z_0 -$ $- V_0^{-1} Q(z_0)$, де $V_0 = (1-\beta) Q'(z_0) + \beta Q'\left(z_0 - \frac{1}{2\beta} \Delta_0 Q(z_0)\right) =$

$$= Q'(z_0) + \beta Q''(z_0)\left(-\frac{1}{2\beta}\Delta_0 Q(z_0)\right) + \beta \int\limits_0^1 Q'''\left(z_0 + t\left(-\frac{1}{2\beta}\Delta_0 Q(z_0)\right)\right) \times$$

$$\times (1-t)\,dt \left(-\frac{1}{2\beta}\Delta_0 Q(z_0)\right)^2.$$

Тепер легко переконатися, що виконуються умови леми і теорем 1, 2 з [4], а це і доводить нашу теорему.

Наслідок (нормований випадок). Нехай X і Y-нормовані простори і

1) $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$;

2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

3) $\|P''(x)\| \leqslant M$, $\|P'''(x)\| \leqslant K$ в області, яка містить точки $x_0, x_1, \ldots$ (досить при $\|x-x_0\| \leqslant z^*$);

4) константи B_0, η_0, M, K такі, що рівняння

$$Q(z) = \frac{\beta}{6} K z^3 + \frac{1}{2} M z^2 - \frac{1}{B_0} z + \frac{\eta_0}{B_0} = 0 \tag{6}$$

має три дійсні корені.

Тоді ітераційний процес (2) збігається і $\|x^*-x_0\| \leqslant z^*$ (z^*-менший корінь рівняння (6)).

Швидкість збіжності характеризується нерівністю $\|x_n - x^*\| \leqslant z^* - z_n$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бартіш М. Я., Сеньо П. С. Про методи типу Рунге для розв'язування нелінійних операторних рівнянь. — «ДАН УРСР, серія А», 1972, № 9.

2. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., «Гостехиздат», 1950.

3. Канторович Л. В. Принцип мажорант и метод Ньютона. — «ДАН СССР, серия А», 1951, т. 76, № 1.

4. Канторович Л. В. Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант. — «ДАН СССР, серия А», 1951, т. 80, № 6.

УДК 518:519.3

Я. Г. САВУЛА, Г. А. ШИНКАРЕНКО, В. Н. ВОВК

АПОСТЕРІОРНА ОЦІНКА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ, ОДЕРЖАНОГО МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, У ЗАДАЧІ КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ

Метод скінченних елементів (МСЕ) у задачі кручення стержнів [4]

$$-\Delta u = 2, \quad (1) \qquad u|_S = 0, \quad (2)$$

перетин яких займає скінченну однозв'язну область Ω з границею S, як узагальнення методу Рітца, дає наближений розв'язок, який збігається знизу до точного. У зв'язку з цим цікаво одержати наближення зверху та апостеріорну оцінку розв'язку МСЕ. Для цього використаємо метод ортогональних проекцій (МОП) [2].

Застосовуючи відому формулу $-\operatorname{grad} u = \overline{v}$ з рівняння (1) одержимо

$$\operatorname{div} \overline{v} = 2. \tag{3}$$

Для задачі кручення стержнів, де шуканими величинами є жорсткість стержня на кручення та значення похідних функ-