

- 2) $\|G_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$;
 3) $\|P''(x)\| \leq M$, $\|P'''(x)\| \leq K$ в області, яка містить точки $x_0, x_1, \dots$ (досить при $\|x - x_0\| \leq z^*$);
 4) константи B_0, η_0, M, K такі, що рівняння

$$Q(z) = \frac{\beta}{6} K z^3 + \frac{1}{2} M z^2 - \frac{1}{B_0} z + \frac{\eta_0}{B_0} = 0 \quad (6)$$

має три дійсні корені.

Тоді ітераційний процес (2) збігається і $\|x^* - x_0\| \leq z^*$ (z^* -менший корінь рівняння (6)).

Швидкість збіжності характеризується нерівністю $\|x_n - x^*\| \leq z^* - z_n$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бартіш М. Я., Сеньо П. С. Про методи типу Рунге для розв'язування нелінійних операторних рівнянь. — «ДАН УРСР, серія А», 1972, № 9.
2. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. М., «Гостехиздат», 1950.
3. Канторович Л. В. Принцип мажорант и метод Ньютона. — «ДАН СССР, серия А», 1951, т. 76, № 1.
4. Канторович Л. В. Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант. — «ДАН СССР, серия А», 1951, т. 80, № 6.

УДК 518:519.3

Я. Г. САВУЛА, Г. А. ШИНКАРЕНКО, В. Н. ВОВК

АПОСТЕРІОРНА ОЦІНКА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ, ОДЕРЖАНОГО МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, У ЗАДАЧІ КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ

Метод скінченних елементів (МСЕ) у задачі кручення стержнів [4]

$$-\Delta u = 2, \quad (1) \quad u|_S = 0, \quad (2)$$

перетин яких займає скінченну однозв'язну область Ω з границею S , як узагальнення методу Рітца, дає наближений розв'язок, який збігається знизу до точного. У зв'язку з цим цікаво одержати наближення зверху та апостеріорну оцінку розв'язку МСЕ. Для цього використаємо метод ортогональних проєкцій (МОП) [2].

Застосовуючи відому формулу — $\text{grad } u = \bar{v}$ з рівняння (1) одержимо

$$\text{div } \bar{v} = 2. \quad (3)$$

Для задачі кручення стержнів, де шуканими величинами є жорсткість стержня на кручення та значення похідних функ-

ції $u(x, y)$ в області Ω , достатньо розв'язати задачу (3), (2), тобто знайти такий вектор $\bar{v}$, що задовольняє рівняння (3) і є градієнтом деякої скалярної функції, рівної нулеві на границі S .

Її розв'язок запишемо у вигляді

$$\bar{v} = \bar{V} - \bar{w}, \quad (4)$$

де $\bar{V}$ — довільний вектор, що задовольняє рівняння (3), а вектор $\bar{w}$ задовольняє умову $\operatorname{div} \bar{w} = 0$. Вектор $\bar{w}$ будемо у вигляді суми

$$\bar{w} = \sum_{i, k} a_{ik} \bar{w}_{ik} \quad (5)$$

за координатними функціями $\bar{w}_{ik}$.

Коефіцієнти a_{ik} визначаються з умови

$$\|\bar{V} - \bar{w}\|^2 = \min.$$

Остання приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i, k} (\bar{w}_{ik}, \bar{w}_{rs}) a_{ik} = (\bar{V}, \bar{w}_{rs}), \quad r, s = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Скалярні добутки $(\bar{w}_{ik}, \bar{w}_{rs})$ і $(\bar{V}, \bar{w}_{rs})$ є інтегралами

$$\int_{\Omega} \bar{w}_{ik}^T \bar{w}_{rs} d\Omega, \quad \int_{\Omega} \bar{V}^T \bar{w}_{rs} d\Omega. \quad (7)$$

Систему координатних функцій, що задовольняють умову $\operatorname{div} \bar{w}_{ik} = 0$, можна одержати, вибираючи $\bar{w}_{ik}$ так, щоб їх складові мали вигляд добутків степенів x та y

$$\bar{w}_{ik} = \begin{cases} kx^i y^{k-1} \\ -ix^{i-1} y^k \end{cases}, \quad \begin{matrix} i, k = 0, 1, 2, \dots \\ i+k > 0 \end{matrix} \quad (8)$$

(замість x^{-1} та y^{-1} слід підставити нуль).

У випадку, якщо область Ω має дві осі симетрії Ox та Oy , то у формулі (8) досить прийняти $i=2m+1$ і $k=2n+1$; одну вісь симетрії Oy , то $i=2m+1$, $k=2(n+1)$; одну вісь симетрії Ox , то $i=2(m+1)$, $k=2n+1$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$).

Маючи розв'язок, побудований МОП, можна дати апостеріорну оцінку енергетичної норми різниці розв'язку u_n , побудованого МСЕ, і u_0 — узагальненого розв'язку задачі (1), (2) [2].

$$\|u_n - u_0\| < (F(u_n) - \delta)^{1/2}.$$

Величина δ визначається за МОП

$$\delta = \int_{\Omega} \left\{ \bar{V}^T \left(\sum_{i, k} a_{ik} \bar{w}_{ik} - \bar{V} \right) \right\} dx dy.$$

Для обчислення інтегралів типу (7), які для вибраної системи координатних функцій (8) мають вигляд

$$I = \int_{\Omega} x^m y^n dx dy \quad (9)$$

зобразимо область Ω у вигляді об'єднання підобластей T_e трикутного вигляду, $e=1, 2, \dots, t$. Тут може бути використане роз-

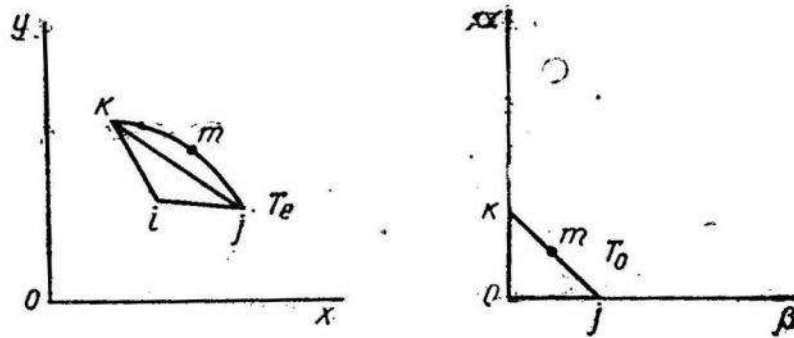


Рис 1.

биття області Ω на елементи таке ж, як і в МСЕ [3]. Виконуючи інтегрування на кожному трикутнику T_e і підсумовуючи по всій області, одержимо

$$I = 2 \sum_{e=1}^t \Delta_e \sum_{r=0}^m \sum_{p=0}^n \sum_{s=0}^r \sum_{q=0}^p \quad (10)$$

$$\frac{m! n! (m+n-r-p)! (r+p-s-q)! (s+q)!}{(m+n+2)! (m-r)! (r-s)! (n-p)! (p-q)! s! q!} x_{rs}^m y_{pq}^n,$$

де Δ_e — площа трикутника з номером e ,

$$x_{rs}^m = x_i^{m-r} x_j^{r-s} x_k^s, \quad y_{pq}^n = y_i^{n-p} y_j^{p-q} y_k^q,$$

(x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) — координати вершин; i, j, k — номери вершин, що входять у трикутник з номером e ; t — кількість трикутників у розбитті області Ω .

Інтеграли (9) можна обчислювати також за формулою наближеного інтегрування Родона [1], яка точна для поліномів п'ятого степеня.

У випадку області з криволінійною границею інтегрування будемо виконувати по трикутниках T_e з однією криволінійною стороною. Для цього відобразимо кожний такий трикутник на трикутник T_0 з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ (рис. 1), за формулами

$$\begin{aligned} x(\alpha, \beta) &= x_i + c_k \alpha - c_j \beta + (c_k z^* - c_j t^*) \alpha \beta, \\ y(\alpha, \beta) &= y_i - b_k \alpha + b_j \beta + (b_j t^* - b_k z^*) \alpha \beta, \end{aligned} \quad (A)$$

де $z^* = 4z_m - 2$; $t^* = 4t_m - 2$; $z_m = \frac{1}{\Delta} [b_j(x_m - x_i) + c_j(y_m - y_i)]$;

$t_m = \frac{1}{\Delta} [b_k(x_m - x_i) + c_k(y_m - y_i)]$; $\Delta = c_k b_j - b_k c_j$; $c_k = x_j - x_i$,

$c_j = x_i - x_k$, $b_j = y_k - y_i$, $b_k = y_i - y_j$; (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) — координати вершин трикутника; (x_m, y_m) — координати середини криволінійної сторони. Заміною змінних (A) в інтегралі (9) одержуємо

$$I = \int_{T_e} x^m y^n dx dy = \Delta_e \int_{T_0} [x(\alpha, \beta)]^m [y(\alpha, \beta)]^n L d\alpha d\beta,$$

де

$$L = 1 + z^* \beta + t^* \alpha.$$

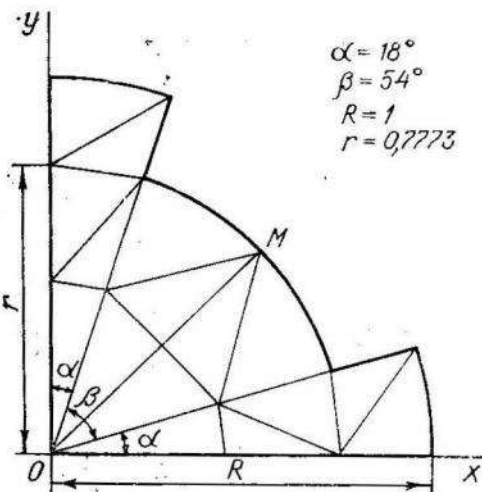


Рис. 2.

Результати обчислень для областей Ω , що мають квадратний зі стороною довжини a і еліптичний із півосями a та b ($\frac{a}{b} = 2$)

перетини для різного числа координатних функцій і різного розбиття областей на трикутні елементи, наведені в табл. 1, 2. Оцінки розв'язку, одержаного МСЕ для квадратного та еліптичного перетинів, наведені у табл. 3.

Оскільки точність обчислень для квадратного перетину мало залежить від розбиття області

на елементи, то вона збільшується з ростом кількості координатних

Таблиця 1

Значення жорсткості на кручення і максимального дотичного напруження для стержня квадратного перетину

Кількість елементів	Кількість координатних функцій	C/Ga^4	$\tau_{\max}/G\theta a$
2	4	0,14074	0,6947
2	9	0,14071	0,6944
8	4	0,14074	0,6944
8	6	0,14065	0,6724
8	7	0,14061	0,6724
8	9	0,14058	0,6710
Точне значення		0,14058	0,6756

натних функцій в апроксимації вектора $\bar{\omega}$. Для досягнення точності у п'ятому знаку мантиси жорсткості стержня на кручення достатньо взяти 8 або 9 координатних функцій.

Таблиця 2

Значення жорсткості на кручення та максимального дотичного напруження для еліптичного перетину

Кількість елементів	Кількість координатних функцій	Апроксимація області Ω			
		трикутниками		криволінійними трикутниками	
		C/Ga^4	$\tau_{\max}/G\theta a$	C/Ga^4	$\tau_{\max}/G\theta a$
3	4	0,25655	0,8241	0,31392	0,8028
11	4	0,29902	0,7999	0,31405	0,7983
11	9	—	—	0,31404	0,8009
Точне значення		0,31415	0,8	0,31415	0,8

Для еліптичного перетину апроксимація області криволінійними трикутниками значно поліпшує результати. Задовільної точності (у другому знаку мантиси) для жорсткості стержня на кручення можна вже досягнути при розбитті області на три елементи, два з яких криволінійні, і при чотирьох координатних функціях.

Таблиця 3

Оцінка точності наближеного розв'язку

Метод розв'язування	Поперечний перетин стержня			
	квадратний		еліптичний	
	C/Ga^4	$\tau_{\max}/G\theta a$	C/Ga^4	$\tau_{\max}/G\theta a$
МСЕ	0,14057	0,6751	0,30875	0,7683
МОП	0,14058	0,6724	0,31405	0,7983
Точний	0,14058	0,6756	0,31415	0,8
Відносна похибка $\frac{\ u_n - u_0\ }{\ u_n\ }$ в %	2,3	—	17	—

Описана методика використовувалася для одержання двосторонніх наближень максимальних напружень і жорсткості стержня складного поперечного перетину, четверта частина якого разом з вибраним розбиттям на елементи, зображена на рис. 2. Максимальне напруження досягається у точці М перетину і лежить у межах

$$0,9898 G\theta \leq \tau_{\max} \leq 1,2270 G\theta.$$

Для жорсткості стержня на кручення одержана така оцінка

$$0,7008 G \leq C \leq 0,7919 G.$$

Нижні границі у наведених нерівностях одержані МСЕ з використанням апроксимації функцій напружень поліномами Ерміта третього порядку на трикутних елементах [3]. Верхні границі одержані МОП з використанням дев'яти координатних функцій.

Значення жорсткості на кручення для розглянутого стержня, наведене у роботі [4], дорівнює 0,593 G. Воно теж, як і МСЕ, дає оцінку знизу для точного значення, проте менш точну.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1967.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
3. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А. Метод скінченних елементів. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1976.
4. Скоробагатко А. А., Мамуня Л. А. Решение задачи о кручении шлицевого вала. — «Вычислительная и прикладная математика», 1971, вып. 14.

УДК 517

У. А. МИШКОВЕЦЬ

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ ПЛОЩ ДОТИЧНИХ ТРАПЕЦІЙ І НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована у кожній внутрішній точці відрізка. Назвемо дотичною трапецію, яка обмежена прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$ і дотичною до кривої $f(x)$ у довільній точці $(\xi; f(\xi))$, $a < \xi < b$. Як відомо, при цих умовах існує точка $(c; f(c))$, дотична в якій паралельна хорді (теорема Лагранжа). Коли, крім того, друга похідна функції не змінює знаку, то площа дотичної трапеції з дотиком у точці $(c; f(c))$ дає ліпше наближення означеного інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ порівняно з площею вписаної трапеції.

У зв'язку з цим виникає питання: площа якої дотичної трапеції дає найліпше наближення означеного інтеграла?

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, двічі диференційована в кожній внутрішній точці відрізка і друга похідна знаковизначена. Тоді площа дотичної трапеції у точці дотику $\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ дає найліпше наближення означеного інтеграла порівняно з площами інших дотичних трапецій і площею вписаної трапеції.

Доведення. Проведемо дотичну до кривої $f(x)$ в точці $M(\xi; f(\xi))$, $a < \xi < b$, і запишемо її рівняння