Нижні границі у наведених нерівностях одержані МСЕ з використанням апроксимації функцій напружень поліномами Ерміта третього порядку на трикутних елементах [3]. Верхні границі одержані МОП з використанням дев'яти координатних функцій.

Значення жорсткості на кручення для розглянутого стержня, наведене у роботі [4], дорівнює 0,593 G. Воно теж, як і МСЕ, дає оцінку знизу для точного значення, проте менш точну.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1967.

2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.

3. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А. Метод скінченних елементів. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1976.

4. Скоробагатько А. А., Мамуня Л. А. Решение задачи о кручении шлицевого вала. — «Вычислительная и прикладная математика», 1971, вып. 14.

УДК 517

У. А. МИШКОВЕЦЬ

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ ПЛОЩ ДОТИЧНИХ ТРАПЕЦІЙ І НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована у кожній внутрішній точці відрізка. Назвемо дотичною трапецію, яка обмежена прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$ і дотичною до кривої $f(x)$ у довільній точці $(\xi; f(\xi))$, $a<\xi<b$. Як відомо, при цих умовах існує точка $(c; f(c))$, дотична в якій паралельна хорді (теорема Лагранжа). Коли, крім того, друга похідна функції не змінює знаку, то площа дотичної трапеції з дотиком у точці $(c; f(c))$ дає ліпше наближення означеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ порівняно з площею вписаної трапеції.

У зв'язку з цим виникає питання: площа якої дотичної трапеції дає найліпше наближення означеного інтеграла?

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, двічі диференційована в кожній внутрішній точці відрізка і друга похідна знаковизначена. Тоді площа дотичної трапеції у точці дотику $\left(\frac{a+b}{2};\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ дає найліпше наближення означеного інтеграла порівняно з площами інших дотичних трапецій і площею вписаної трапеції.

Доведення. Проведемо дотичну до кривої $f(x)$ в точці $M(\xi; f(\xi))$, $a<\xi<b$, і запишемо її рівняння

$$y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi). \qquad (1)$$

Функцію відхилення кривої $f(x)$ від дотичної (1) позначимо через

$$R_f(x,\xi)=f(x)-f'(\xi)(x-\xi)-f(x). \qquad (2)$$

Зауважимо, що $R_f(x,\ \xi)\geqslant 0$, коли $f''(x)>0$ і $R_f(x,\ \xi)\leqslant 0$, якщо $f''(x)<0$.

Розглянемо тепер площі дотичних трапецій. Найліпше наближення до площі криволінійної трапеції $\int_a^b f(x)\,dx$ буде давати та площа дотичної трапеції, для якої площа функції відхилення (2) набирає найменше значення за абсолютною величиною

$$S_f(\xi)=\int_a^b R_f(x,\xi)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f'(\xi)(x-\xi)\,dx-$$

$$-\int_a^b f(\xi)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-f'(\xi)\frac{b^2-a^2}{2}+$$

$$+f'(\xi)(b-a)\xi-f(\xi)(b-a).$$

Оскільки $f''(x)\neq 0$, то умова

$$S'_f(\xi)=f''(\xi)(b-a)\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)=0 \qquad (3)$$

виконується у точці $\xi=\dfrac{a+b}{2}$.

Тому що

$$S''_f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f''\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),$$

то при $f''(x)>0$ функція (3) у точці $\dfrac{a+b}{2}$ має мінімум, а при $f''(x)<0$ — максимум.

З формули (3) при $\xi=\dfrac{a+b}{2}$ одержуємо найкраще наближення означеного інтеграла за допомогою площ дотичних трапецій

$$S_f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^b f(x)\,dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \qquad (4)$$

Доведемо другу частину теореми.

Нехай точка c така, що $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

З доведеного вище маємо

$$\left| S_f(c) \right| \geqslant \left| S_f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|. \tag{5}$$

Знак рівності буде, коли $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Похила сторона дотичної трапеції у точці дотику $(c;\ f(c))$ паралельна похилій стороні вписаної трапеції. Як було пояснено раніше,

$$\left| \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| > \left| S_f(c) \right| \right|. \tag{6}$$

З нерівностей (6), (5) і рівності (4) одержуємо

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| > \left| \int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \tag{7}$$

Теорема доведена.

Нерівність (7), яка вказує на перевагу формули прямокутників над формулою трапецій, відома з підручників математичного аналізу. Тут цей факт доводиться дещо простіше і є частиною нашої теореми, яка в певному розумінні дає більше інформації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Коровкин П. П. Математический анализ, ч. 1, М., «Просвещение», 1972.