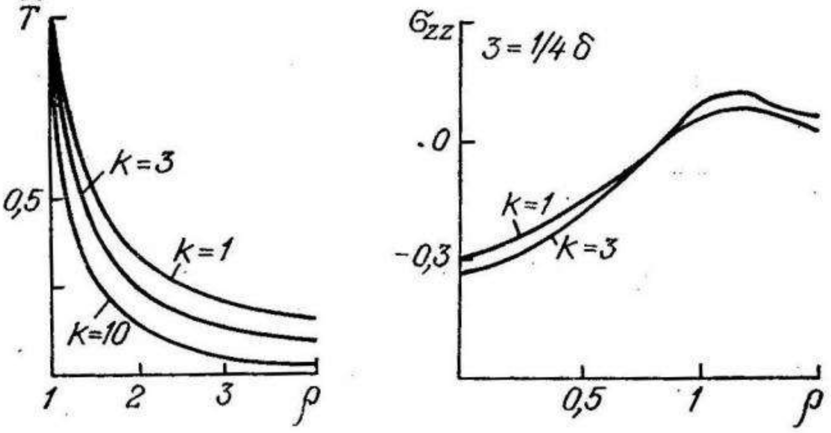
МЕХАНІКА

УДК 539.3

В. П. БАРАН

НЕСТАЦІОНАРНА ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ОСНОВИ

1. Розглядається плоскопаралельний трансверсально-ізотропний шар, спаяний з трансверсально-ізотропним півпростором. Площини ізотропії перпендикулярні до осі oz циліндрич-



ної системи координат r, φ, z. Початок координат розмістимо на верхній границі шару в центрі круга радіуса a, де підтримується температура $T_0(r, \tau)$, а вісь oz спрямуємо всередину шару. Зовні круга проходить теплообмін з зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Вважається, що тепловий контакт між шаром і півпростором неідеальний. Скористаємось умовами неідеального теплового контакту [2], які виведені з припущення, що між контактуючими тілами знаходиться тонкий проміжковий шар, наділений своїми теплофізичними характеристиками. Важливість такого типу задач з технічної точки зору описана в роботах [1, 6].

Отже, потрібно визначити температурне поле і температурні напруження при таких крайових умовах:

$$T^{(1)}(r, z, \tau) = T_0(r, \tau), \; z = 0, \; 0 \leqslant r < a;$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = k T^{(1)}, \; z = 0, \; a < r < \infty; \tag{1.1}$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(1)} = 0, \; z = 0, \; 0 < r < \infty; \tag{1.2}$$

$$\lambda\Delta\left(T^{(1)} + T^{(2)}\right) + 2\left(\lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} - \lambda_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z}\right) = c\, \frac{\partial\left(T^{(1)} + T^{(2)}\right)}{\partial \tau},$$

$$\lambda\Delta\left(T^{(1)}-T^{(2)}\right)+6\left(\lambda_1\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z}\right)-12\,h\left(T^{(1)}-T^{(2)}\right)=$$

$$=c\,\frac{\partial\left(T^{(1)}-T^{(2)}\right)}{\partial\tau},\ z=H,\ 0\leqslant r<\infty, \tag{1.3}$$

$$u^{(1)}=u^{(2)};\ w^{(1)}=w^{(2)};\ \sigma_{zz}^{(1)}=\sigma_{zz}^{(2)};\ \sigma_{rz}^{(1)}=\sigma_{rz}^{(2)},\ \underset{0\leqslant r<\infty}{z=H}, \tag{1.4}$$

$$T^{(1)}=T^{(2)}=0\ \text{при}\ \tau=0. \tag{1.5}$$

Величини, позначені індексом (1), належать до шару, індексом (2) до півпростору. Для трансверсально-ізотропних тіл відомі такі співвідношення [1]:

$$\sigma_{zz}=\beta A_{33}A_{44}\nabla^2\left(d\nabla^2+e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi,$$

$$\sigma_{rz}=-\beta A_{33}A_{44}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(d\nabla^2+e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi,$$

$$w=\beta A_{44}\frac{\partial}{\partial z}\left(b\nabla^2+e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi;\ u=\beta A_{44}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2+a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi; \tag{1.6}$$

$$T=A_{33}A_{44}\left(\mu_1^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi.$$

Функція ψ задовольняє у випадку відсутності джерел тепла таке рівняння:

$$\left(\mu_1^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_5^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\sigma^2\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi=0. \tag{1.7}$$

2. Застосовуючи інтегральне перетворення Лапласа до (1.1)—(1.7), маючи на увазі (1.5), одержимо ці співвідношення у просторі зображень Лапласа, які позначимо відповідно (2.1)—(2.7).

Застосовуючи перетворення Ханкеля до (2.7), одержимо звичайне диференціальне рівняння, розв'язок якого має вигляд:

$$\tilde{\tilde{\psi}}^{(i)}=\sum_{i=1,3}\left[C_j e^{\mu_j^{(i)}\xi(z-H)}\delta_1^i+D_j^{(i)}e^{\mu_j^{(i)}\xi(H-z)}\right]+$$

$$+C_5 e^{\sqrt{\mu_5^{(i)^2}\xi^2+\sigma_{(i)}^2 p}\,(z-H)}\ \delta_1^i+D_5^{(i)}e^{\sqrt{\mu_5^{(i)^2}\xi^2+\sigma_{(i)}^2 p}\,(H-z)}. \tag{2.8}$$

Застосовуючи перетворення Ханкеля до (2.6), використовуючи формулу обернення і задовольняючи граничним умовам (2.1) і (2.3), одержимо співвідношення

$$D_5^{(1)}(\alpha,p)=Q(\alpha,p)\,C_5(\alpha,p);\ D_5^{(2)}(\alpha,p)=G(\alpha,p)\,C_5(\alpha,p) \tag{2.9}$$

(вирази для Q і G не наводимо внаслідок їх громіздкості) і парні інтегральні рівняння для визначення $C_5(\alpha,\ p)$

$$\int_0^\infty E(\alpha, p) J_0(\alpha\rho)\, d\alpha = \frac{a\overline{T}_0(\rho, p)}{A'_{33} A'_{44}}, \quad 0 < \rho < 1;$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha E(\alpha, p)}{1 - g(\alpha, p)} J_0(\alpha\rho) d\alpha = 0, \quad 1 < \rho < \infty, \tag{2.10}$$

при таких позначеннях:

$$g(\alpha, p) = 1 - \frac{\mu_5' \alpha\, [e^{-S_1\delta} + Q(\alpha, p)\, e^{S_1\delta}]}{Q(\alpha, p)\, e^{S_1\delta}(S_1 + ka) - e^{-S_1\delta}(S_1 - ka)};$$

$$E(\alpha, p) = \frac{1}{a}\vartheta\alpha\, [e^{-s_1\delta} + Q(\alpha, p)\, e^{S_1\delta}]\, C_5(\alpha, p);$$

$$\vartheta = \frac{1}{a^4}[\alpha^2(\mu_5^{(1)^2} - \mu_1^{(1)^2}) + \sigma_{(1)}^2 a^2 p][\alpha^2(\mu_5^{(1)^2} - \mu_3^{(1)^2}) + \sigma_{(1)}^2 a^2 p];$$

$$S_{(i)} = \sqrt{\mu_5^{(1)^2}\alpha^2 + \sigma_{(i)}^2 a^2 p}; \quad r = a\rho; \ \xi = \frac{\alpha}{a}; \ \zeta = \frac{z}{a}; \ \delta = \frac{H}{a}.$$

Шукаючи розв'язок рівнянь (2.10) у вигляді [5]

$$E_k(\alpha) = [1 - g_k(\alpha)] \int_0^1 \varphi_k(t) \cos \alpha t\, dt, \tag{2.11}$$

одержимо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi_k(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi_k(t) K_k(x, t)\, dt = F_k(x), \tag{2.12}$$

де
$$F_k(x) = \frac{2a}{\pi A_{33}^{(1)} A_{44}^{(1)}}\left[\overline{T}_{0k}(0) + x\int_0^{\pi/2} \overline{T}'_{0k}(x \sin\Theta)\, d\Theta\right];$$

$$K_k(x, t) = \int_0^\infty [1 - g_k(\alpha)] \cos \alpha t \cos \alpha x\, d\alpha;$$

$$E_k(\alpha) = E(\alpha, p_k); \ \overline{T}_0(\rho, p_k) = \overline{T}_{0k}(\rho);$$
$$g(\alpha, p_k) = g_k(\alpha), \ k = 1, 2, \ldots$$

Після визначення $\varphi_k(t)$ з інтегрального рівняння (2.12), з формули (2.11) знайдемо $C_5(\alpha, p_k)$ і згідно (2.9) — $D_5^{(i)}(\alpha p_k)$ $(i=1,2)$. Для визначення $C_j^{(i)}(\alpha, p_k)$ і $D_j^{(i)}(\alpha, p_k)$ $(i=1,2;\ j=1,3)$ використовуємо умови (2.2) і (2.4). Таким чином, всі коефіцієнти функції $\tilde{\tilde{\psi}}(\alpha, p)$ знайдені. Підставивши $\tilde{\tilde{\psi}}(\alpha, p_k)$ у співвідношення (2.6), одержуємо вирази для визначення температурного поля і температурних у просторі зображень Лапласа в ряді точок p_k.

3. Залишається перейти до оригіналів за деякою кількістю числових результатів. У роботі [4] показано, що оригінали можна записати у вигляді

$$r(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(\tau), \tag{3.1}$$

де $\varphi_k(\tau)$ деяка повна система ортогональних функцій. Використаємо тригонометричні функції $\sin(2k+1)\Theta$. Тоді

$$r(\tau)=r\left(-\frac{1}{\sigma}\ln\cos\Theta\right)=\Phi(\Theta)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(2k+1)\Theta, \tag{3.2}$$

де c_k визначаються з трикутної нескінченної системи рівнянь

$$\left[\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}\right]c_0+\ldots+\left[\binom{2n}{k}-\binom{2n}{k-1}\right]c_{n-k}+\ldots+$$

$$+c_n=\frac{4^{n+1}}{\pi}\sigma r\left[(2n+1)\sigma\right],\ n=1,2,3,\ldots,\ \sigma=\mathrm{const}. \tag{3.3}$$

При цьому вважається, що зображення $\bar{r}(p)$ існує при $\operatorname{Re} p>0$ і $r(+0)=0$. Однак ці припущення не зменшують загальності методу, оскільки замість зображення $\bar{r}(p)$ можна розглянути зображення $\bar{r}(p+a)$, що рівносильно множенню $r(\tau)$ на $e^{-a\tau}$. Якщо $r(+0)\neq 0$, то його слід визначити, користуючись теоремою про граничні значення, і відняти від $r(\tau)$, що рівносильно заміні зображення на $\bar{r}(p)-\dfrac{r(+0)}{p}$.

Коли потрібно знайти оригінал $r(\tau)$ для деяких значень τ, то слід визначити $\Phi(\Theta)$ для значень $\Theta=\arccos e^{-\sigma\tau}$ (3.2) можна записати у виразі часу

$$r(\tau)=(1-e^{-2\sigma\tau})^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k U_{2k}(e^{-\sigma\tau}), \tag{3.4}$$

де $U_n(x)$ поліном Чебишева другого роду.

4. Числовий приклад розглянемо для трансверсально-ізотропного магнію (шар) і пісковика (півпростір). Температура всередині круга змінюється за законом

$$T_0(r,\tau)=T_0(1-e^{-\frac{\tau}{\gamma}}).$$

Використовуючи теорему про граничні значення, визначимо шукані величини при $\tau\to\infty$.

На рисунку показані деякі графіки температури і напружень: інтегральне рівняння розв'язували зведенням до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи квадратурну формулу Гауса.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

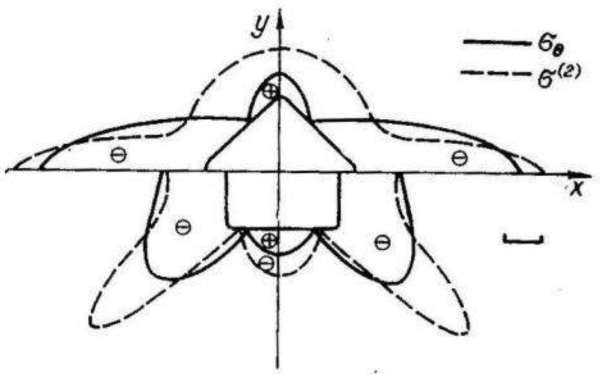
1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. АН СССР, 1962.
2. Подстригач Я. С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью промежуточного слоя. — ИФЖ, 1966, № 10.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., АН СССР, 1967.
4. Papulis A. The new Method Laplas transforms. Quart. Appl. Math. 1957, N 14.
5. Noble B. The solution of Bessel function dual integral equations bu multipling factor metod. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol. 59, № 2, 1963.
6. Padovan Joseph. Thermoelasticity of an elastic anisotropik half space «CANSAM 73, c. r. 4 eme congr. can. néc. appl. Montréal, 1973». Montreal, 1973.

УДК 539.3

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, М. К. ЗВАРИЧ, В. С. ЩУКІН

ВПРЕСОВКА ПРУЖНОГО СТЕРЖНЯ У КРИВОЛІНІЙНИЙ ОТВІР ВАГОМОГО СЕРЕДОВИЩА

Розглянемо однорідний ізотропний гірничий масив, в якому на глибині H від земної поверхні пройдена горизонтальна виробка сталого перерізу. Нехай для запобігання обвалів у виробку вставили з натягом підземну конструкцію (обробку), розрахунок якої будемо проводити за теорією криволінійних стержнів. Тертям на поверхні контакту нехтуємо.



Як відомо з [1, 2], задача про наближене визначення напруженого стану такого масиву зводиться до плоскої задачі теорії пружності для нескінченної області з криволінійним отвором, коли у віддалених від отвору ($H \geqslant 50\,a$, a — найбільший розмір отвору) частинах середовища діють стискаючі зусилля $\sigma_y^{\infty} = -\gamma H$ і $\sigma_x^{\infty} = -\lambda\gamma H$, де γ — об'ємна вага породи; $\gamma = \nu/(1-\nu)$ — коефі-