

На рисунку показані деякі графіки температури і напружень: інтегральні рівняння розв'язували зведенням до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи квадратурну формулу Гауса.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. АН СССР, 1962.
2. Подстригач Я. С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью промежуточного слоя. — ИФЖ, 1966, № 10.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., АН СССР, 1967.
4. Papulis A. The new Method Laplas transforms. Quart. Appl. Math. 1957, N 14.
5. Noble B. The solution of Bessel function dual integral equations by multiplying factor method. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol. 59, № 2, 1963.
6. Padovan Joseph. Thermoelasticity of an elastic anisotropic half space «CANSAM 73, с. г. 4 eme congr. can. nec. appl. Montréal, 1973».

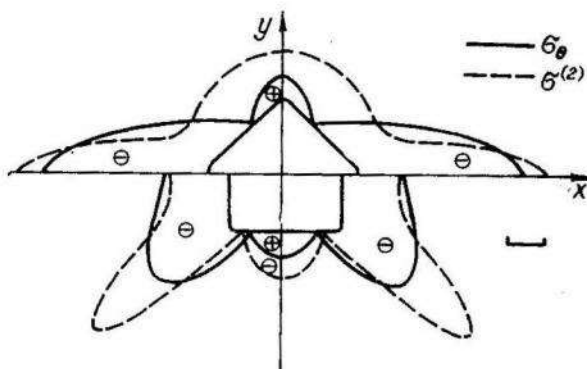
УДК 539.3

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, М. К. ЗВАРИЧ, В. С. ШУКІН

ВПРЕСОВКА ПРУЖНОГО СТЕРЖНЯ У КРИВОЛІНІЙНИЙ ОТВІР ВАГОМОГО СЕРЕДОВИЩА

Розглянемо однорідний ізотропний гірничий масив, в якому на глибині H від земної поверхні пройдена горизонтальна виробка сталого перерізу. Нехай для запобігання обвалів у виробку вставили з натягом підземну конструкцію (обробку), розрахунок якої будемо проводити за теорією криволінійних стержнів. Тертям на поверхні контакту нехтуємо.

Як відомо з [1, 2], задача про наближене визначення напруженого стану такого масиву зводиться до плоскої задачі теорії пружності для нескінченної області з криволінійним отвором, коли у віддалених від отвору ($H \geq 50a$, a — найбільший розмір отвору) частинах середовища діють стискаючі зусилля $\sigma_y^* = -\gamma H$ і $\sigma_x^* = -\lambda \gamma H$, де γ — об'ємна вага породи; $\gamma = v/(1-v)$ — коефі-



цієнт бічного розпору; ν — коефіцієнт Пуассона. Систему декартових координат розмістимо так, як це показано на рисунку.

Нехай функція

$$z = \omega(\zeta) = R \left[\zeta + \frac{m}{s-1} \zeta^{1-s} \right], \quad |m| < 1, \quad s \neq 1 \quad (1)$$

конформно відображає зовнішність одиничного кола γ на зовнішність контура отвору L .

У перетвореній області (1) граничні умови такої задачі при відсутності навантаження на стержень набирають вигляду [3] ($r_1 > r_0$):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F'(\sigma) \operatorname{Re} U d\sigma = 2\mu \int_{\gamma} F'(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + i\Theta_b + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(r_1 - r_0) i \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\Theta_b}{d\sigma} \right] \omega'(\sigma) d\sigma \right\} d\sigma + 2\mu \int_{\gamma} \varepsilon^* F'(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\int_{\gamma} V \overline{F'(\sigma)} d\bar{\sigma} = g \int_{\gamma} \left[\frac{e_0}{r_1} - \frac{\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{de_0}{d\sigma} \right) \right] \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma,$$

$$\int_{\gamma} V F'(\sigma) d\sigma = g \int_{\gamma} \left[\frac{e_0}{r_1} - \frac{\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{de_0}{d\sigma} \right) \right] F(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma,$$

де

$$U = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\zeta |\omega'(\zeta)|} \left[\kappa \Phi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \overline{\Phi'(\zeta)} - \overline{\Psi(\zeta)} \right],$$

$$V = \Phi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)}, \quad (3)$$

де $F(\zeta) = F_1[\omega(\zeta)]$ — довільна функція, голоморфна в перетвореній області; $\Phi(\zeta) = \Phi_1[\omega(\zeta)]$ і $\Psi(\zeta) = \Psi_1[\omega(\zeta)]$ — комплексні потенціали, які визначають напружений стан масиву; $g = E^* F$ — жорсткість стержня на розтяг; r_0 і r_1 — відповідно радіуси кривизн нейтрального (для чистого згину) L_0 волокна стержня і крайнього L_1 , що контактує з масивом; e_0 — відносне подовження волокна L_0 ; Θ_b — кут повороту нормального перерізу стержня; $\sigma = e^{i\Theta}$ — афікс точки контура γ .

Функції $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ та $F(\zeta)$, голоморфні зовні кола γ , допускають розклади вигляду

$$\varphi(\zeta) = \Gamma\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k}; \quad \psi(\zeta) = \Gamma'\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k};$$

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}. \quad (4)$$

Постійні Γ і Γ' визначаються через компоненти напружень на нескінченності за відомими формулами [5].

Компоненти деформації стержня e_0 і Θ_b подаємо на γ у формі комплексних рядів Фур'є

$$e_0 = \alpha_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k;$$

$$\Theta_b = \beta_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k. \quad (5)$$

У випадку повної симетрії задачі відносно осей координат коефіцієнти розкладів (4) з парними, а (5) з непарними індексами дорівнюють нулеві, і a_k , b_k , α_k — дійсні, а β_k — уявні величини.

Підставимо вирази (1), (3)—(5) у граничні умови (2) і виконаємо інтегрування вздовж контура γ . Використовуючи належним чином довільність вибору функції $F(\zeta)$, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів α_k , β_k , a_k і b_k .

Нормальне напруження σ у поперечному перерізі стержня і внутрішні зусилля в ньому визначаються залежностями вигляду [4]

$$\sigma = E^* \left[\frac{r_0}{r} e_0 + (r - r_0) i \frac{d\Theta_b}{dt} \right],$$

$$V_\tau = g e_0, \quad L_b = g \eta_c r_1 i \frac{d\Theta_b}{dt}. \quad (6)$$

Напруження, які виникають у масиві, визначаються за відомими формулами [5]

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 [\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}],$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \overline{\Psi(\zeta)}]. \quad (7)$$

Для ілюстрації розв'язку задачі розглянемо однорідний ізотропний масив, в якому на відстані H від денної поверхні пройдена горизонтальна виробка квадратного перерізу ($s=4$). У цьому випадку коефіцієнти системи виражаються через інтеграли типу

$$I_{\frac{|n-1|}{2}} = \frac{1}{4i} \int_{\gamma} \frac{\sigma^n d\sigma}{V(\sigma^4 - m)(1 - m\sigma^4)} =$$

$$= \begin{cases} m^{\frac{|n-1|}{4}} \int_0^1 \frac{x^{\frac{|n-1|}{2}} dx}{V(1-x^2)(1-m^2x^2)}, & \frac{|n-1|}{2} - \text{парне,} \\ 0, & \frac{|n-1|}{2} - \text{непарне,} \end{cases} \quad (8)$$

для яких при великих n справедлива оцінка

$$I_n(m) < \sqrt{\frac{\pi}{2n}} m^{\frac{n}{2}}, \quad n > 0. \quad (9)$$

Нормальні напруження (6) у перерізі стержня з врахуванням (1) і (5) обчислюються за формулою

$$\sigma = E^* \left[\frac{r_0}{r} \alpha_0 + 2 \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \alpha_k - \frac{k(r-r_0)\beta_k}{RV\sqrt{1+m^2-2m\cos 4\theta}} \right) \cos k\theta \right], \quad (10)$$

де $r_2 \leq r \leq r_1$.

Для числових розрахунків, проведених на ЕОМ «Минск-32», вибрані гірничий масив із сланцю і стальна обробка з такими пружними та геометричними характеристиками: $E^* = 2,06 \times 10^{11}$ н/м²; $\mu = 5,07 \cdot 10^9$ н/м²; $\nu = 0,16$; $\kappa = 2,36$; $\lambda = 0,1905$; $\delta = 0,1$.

Розглянуто два випадки розташування отворів у масиві, яким відповідають: $m = 1/3$ — вершини квадрату лежать на координатних осях і $m = -1/3$ — сторони квадрату паралельні координатним осям.

На рисунку показані графіки розподілу кільцевих напружень σ_θ вздовж контура отвору і нормальних напружень $\sigma(r=r_2)$ у поперечному перерізі стержня від заданого однорідного напруженого стану на нескінченності $\sigma_x^\infty = -\lambda\gamma H$, $\sigma_y^\infty = -\gamma H$, $\epsilon^* = 0$ (в частках $9,81 \cdot 10^4 \gamma H$).

Для інших видів отворів задача розв'язується аналогічно.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Динник А. Н., Моргаевский А. Б., Савин Г. Н. Распределение напряжений вокруг подземных выработок. — В кн.: Совещания по управлению горным давлением. М., Изд-во АН СССР, 1938.
2. Лехницкий С. Г. Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения. — В кн.: Сборник трудов по сдвигению горных пород, горному давлению и методике маркшейдерских работ. ВНИМИ, т. XL, 1962.

3. Мартынович Т. Л., Зварич М. К. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки. — «Прикладная механика», 1974, т. 10, вып. 9.

4. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис., Львов, 1970.

5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 539.311

В. К. ОПАНАСОВИЧ

СТИСК КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З ДВОМА НАПІВБЕЗМЕЖНИМИ РОЗРІЗАМИ НА ЛІНІЇ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Дослідимо напружений стан у пластинці, яка складається з двох спаяних між собою ізотропних півплощин з двома напівбезмежними розрізами на лінії розділу матеріалів. На безмежності пластинка стискається рівномірно розподіленим навантаженням q , перпендикулярним лінії спаю, і розтягується рівномірно розподіленим навантаженням p_j ($j = 1, 2$), паралельним лінії розподілу матеріалів. Припускається, що під дією даного напруженого стану береги щілин вступають у гладкий контакт по всій своїй довжині.

Для розв'язання задачі виберемо початок декартової системи координат посередині лінії спаю, яку позначимо через L'' . Вісь Ox направимо вздовж лінії розрізів, яку позначимо через L (див. рисунок). Все, що належить до верхньої півплощини, будемо позначати індексами «1» або «+», до нижньої — індексами «2» або «—». Довжину лінії спаю позначимо через $2a$.

Згідно з постановкою задачі на дійсній осі виконуються такі співвідношення:

$$Y_y^+ = Y_y^-, X_y^+ = X_y^- = 0, v^+ - v^- = 0 \text{ на } L,$$

$$(Y_y - iX_y)^+ = (Y_y - iX_y)^-, (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L''. \quad (1)$$

Зауважимо, що надалі індекс j приймає лише два значення 1 і 2.

Для розв'язання поставленої проблеми введемо функції Колосова—Мусхелішвілі $\Phi_j(z)$ і $\Psi_j(z)$. Аналітично продовживши функцію $\Phi_j(z)$ із області S_j в область S_{3-j} , як це зроблено в

