

3. Мартынович Т. Л., Зварич М. К. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки. — «Прикладная механика», 1974, т. 10, вып. 9.

4. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис., Львов, 1970.

5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 539.311

В. К. ОПАНАСОВИЧ

СТИСК КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З ДВОМА НАПІВБЕЗМЕЖНИМИ РОЗРІЗАМИ НА ЛІНІЇ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Дослідимо напружений стан у пластинці, яка складається з двох спаяних між собою ізотропних півплощин з двома напівбезмежними розрізами на лінії розділу матеріалів. На безмежності пластинка стискається рівномірно розподіленим навантаженням q , перпендикулярним лінії спаю, і розтягується рівномірно розподіленим навантаженням p_j ($j = 1, 2$), паралельним лінії розподілу матеріалів. Припускається, що під дією даного напруженого стану береги щілин вступають у гладкий контакт по всій своїй довжині.

Для розв'язання задачі виберемо початок декартової системи координат посередині лінії спаю, яку позначимо через L'' . Вісь Ox направимо вздовж лінії розрізів, яку позначимо через L (див. рисунок). Все, що належить до верхньої півплощини, будемо позначати індексами «1» або «+», до нижньої — індексами «2» або «—». Довжину лінії спаю позначимо через $2a$.

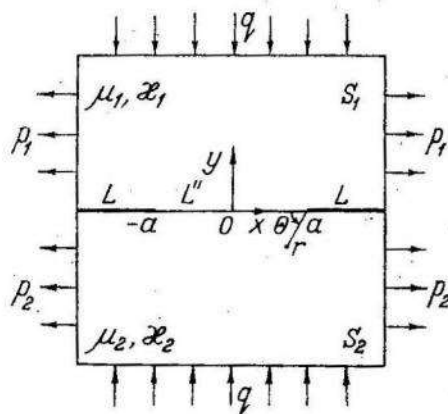
Згідно з постановкою задачі на дійсній осі виконуються такі співвідношення:

$$Y_y^+ = Y_y^-, X_y^+ = X_y^- = 0, v^+ - v^- = 0 \text{ на } L,$$

$$(Y_y - iX_y)^+ = (Y_y - iX_y)^-, (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L''. \quad (1)$$

Зауважимо, що надалі індекс j приймає лише два значення 1 і 2.

Для розв'язання поставленої проблеми введемо функції Колосова—Мусхелішвілі $\Phi_j(z)$ і $\Psi_j(z)$. Аналітично продовживши функцію $\Phi_j(z)$ із області S_j в область S_{3-j} , як це зроблено в



[2], одержуємо формули (2), статті [1]. Введемо функцію $\Phi_0(z)$ (формула (3) роботи [1]); для її визначення з граничних умов (1) дістаємо крайову задачу

$$\begin{aligned}\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) &= 0 \quad x \in L'', & \Phi_0^+(x) - \overline{\Phi_0^+(x)} &= 0 \quad x \in L, \\ \Phi_0^-(x) - \overline{\Phi_0^-(x)} &= 0 \quad x \in L,\end{aligned}$$

яка за допомогою простих перетворень зводиться до таких задач лінійного спряження:

$$\begin{aligned}[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)}]^+ - [\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)}]^- &= 0 \quad x \in L'' + L, \\ [\Phi_0(x) - \overline{\Phi_0(x)}]^+ + [\Phi_0(x) - \overline{\Phi_0(x)}]^- &= 0 \quad x \in L, \\ [\Phi_0(x) - \overline{\Phi_0(x)}]^+ - [\Phi_0(x) - \overline{\Phi_0(x)}]^- &= 0 \quad x \in L''.\end{aligned}$$

Розв'язуючи останні, знаходимо

$$\Phi_0(z) = D + (-1)^{j+1} \frac{C_1 z + C_0}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad z \in S_j, \quad (2)$$

де D, C_0, C_1 — дійсні невідомі постійні.

Виходячи з умов задачі, функцію $\Phi_0(z)$ при великих $|z|$ можемо записати у вигляді

$$\Phi_0(z) = K_j + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad z \in S_j, \quad (3)$$

де
$$K_j = \frac{1}{4} [D_j p_j - R_{3-j} p_{3-j} - (3R_{3-j} + D_j) q],$$

вирази для D_j і R_j даються формулами (4') у роботі [1].

Надалі будемо вибирати таку вітку функції $\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}$, яка в околі нескінченно віддаленої точки має розклад

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z}\right). \quad (4)$$

Беручи до уваги (3), (4), (2), одержуємо

$$D = \frac{1}{2} (K_1 + K_2), \quad C_1 = \frac{1}{2} (K_1 - K_2).$$

Сталу C_0 знайдемо з умови симетрії задачі відносно осі Oy , наприклад, що $Y_y(x) = Y_y(-x)$ $x \in L$, але з другого боку

$$Y_y = \frac{1-g}{A_1} D + \frac{(1+g)(C_1 x + C_0)}{\sqrt{x^2 - a^2}} \operatorname{sign} x \quad x \in L,$$

звідки випливає, що $C_0 = 0$.

У попередній формулі введено позначення

$$A_j = \mu_j + \mu_{3-j} \kappa_j, \quad g = -A_1/A_2.$$

Маючи визначені всі постійні, можемо знайти розподіл напружень на лінії розподілу матеріалів

$$|x| > a$$

$$Y_y = -q + \frac{1+g}{A_1} C_1 \frac{|x| - \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad X_y = 0, \quad (5)$$

$$X_x^+ = p_1 + \frac{3-g}{1+g} (Y_y + q), \quad X_x^- = p_2 - \frac{1-3g}{1+g} (Y_y + q),$$

$$|x| < a$$

$$Y_y = -q - \frac{1+g}{A_1} C_1, \quad X_y = \frac{1-g}{A_1} C_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$X_x^+ = p_1 - \frac{3-g}{A_1} C_1, \quad X_x^- = p_2 + \frac{1-3g}{A_1} C_1.$$

Як випливає з (5), напруження в околі кінця тріщини не будуть мати коливного характеру.

Цікаво відзначити такий факт. Коли позначити через $n = \mu_1/\mu_2$ і

$$n_1 = \min \left\{ \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_2 - 1}, \frac{p_1(1 + \kappa_1) + (3 - \kappa_1)q}{p_2(1 + \kappa_2) + (3 - \kappa_2)q} \right\},$$

$$n_2 = \max \left\{ \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_2 - 1}, \frac{p_1(1 + \kappa_1) + (3 - \kappa_1)q}{p_2(1 + \kappa_2) + (3 - \kappa_2)q} \right\},$$

то для $n > n_2$ або $n < n_1$ контактні напруження Y_y в малому околі кінця тріщини будуть від'ємними і необмеженими з внутрішньої сторони тріщини, тоді як для $n_1 < n < n_2$ Y_y — додатні та необмежені, тобто розтягуючі, отже, без додаткових припущень поставлена вище задача фізично нереальна. Крім того, при $n = n_1$ або $n = n_2$ з (5) знаходимо

$$Y_y = -q, \quad X_x^+ = p_1, \quad X_x^- = p_2, \quad X_y = 0 \quad (-\infty < x < +\infty),$$

тобто у цьому випадку тріщина не впливає на розподіл напружень у пластинці вздовж дійсної осі.

А тепер детальніше дослідимо поведінку напружень в околі кінців тріщини при різних значеннях n . Для цього запишемо формули розподілу напружень в околі тріщини при $y > 0$

$$\sigma_\theta = -\frac{k_{2m}}{2\sqrt{2r}} \left[e^{-\pi\beta} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right) + \sin \frac{3\theta}{2} e^{\pi\beta} \right], \quad (6)$$

$$\sigma_r = -\frac{k_{2m}}{2\sqrt{2r}} \left[e^{-\pi\beta} \left(3 \sin \frac{\theta}{2} - \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right) - \sin \frac{3\theta}{2} e^{\pi\beta} \right],$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{k_{2m}}{2\sqrt{2r}} \left[e^{-\pi\beta} \cos \Theta \cos \frac{\Theta}{2} + \cos \frac{3\Theta}{2} e^{\pi\beta} \right],$$

де k_{2m} — коефіцієнт інтенсивності напружень, який визначається рівністю

$$k_{2m} = (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{a} e^{\pi\beta}}{A_1} C_1, \quad (7)$$

$$m = \begin{cases} 1 & \text{для кінця } a \\ 2 & \text{для кінця } -a, \end{cases} \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln(-g).$$

Виходячи з (7), переконуємося, що тільки при

$$n = \frac{p_1(1+x_1) + (3-x_1)q}{p_2(1+x_2) + (3-x_2)q},$$

$k_{2m}=0$ і, як випливає з (6), напруження в околі кінців тріщин тільки при цьому значенні n обмежені, а при інших значеннях — необмежені.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гриліцький Д. В., Опанасович В. К. Стиск кусково-однорідної пластинки з фізичною щільною на лінії розділу матеріалів. У цьому ж Віснику.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 539.375

М. А. РУДЬ, М. П. САВРУК, О. П. ДАЦИШИН

ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА КРАЙОВИХ ТРІЩИН У ПІВПЛОЩИНІ

Нехай пружна ізотропна півплощина послаблена періодичною системою крайових розрізів (тріщин). Довжина тріщин — l , кути між лініями тріщин і краєм півплощини — $\alpha \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$, відстань між вершинами сусідніх тріщин — d .

Якщо на нескінченності і на границі півплощини навантаження відсутні, а вздовж берегів усіх тріщин діють довільні самозрівноважені зусилля

$$p(x) = N^+ - iT^+ = N^- - iT^-, \quad 0 \leq x < l,$$

то розв'язування такої плоскої задачі теорії пружності зводиться [1] до сингулярного інтегрального рівняння

$$\int_0^l [g'(t) M(t, x) + \overline{g'(t)} N(t, x)] dt = \pi p(x), \quad 0 \leq x < l \quad (1)$$