$$\tau_{r\theta} = \frac{k_{2m}}{2\sqrt{2r}}\left[e^{-\pi\beta}\cos\Theta\cos\frac{\Theta}{2} + \cos\frac{3\Theta}{2}e^{\pi\beta}\right],$$

де k_{2m} — коефіцієнт інтенсивності напружень, який визначається рівністю

$$k_{2m} = (-1)^{m+1}\frac{\sqrt{a}\,e^{\pi\beta}}{A_1}C_1, \qquad (7)$$

$$m = \begin{cases} 1 \text{ для кінця } a \\ 2 \text{ для кінця } -a, \end{cases} \qquad \beta = \frac{1}{2\pi}\ln(-g).$$

Виходячи з (7), переконуємося, що тільки при

$$n = \frac{p_1(1+\varkappa_1) + (3-\varkappa_1)q}{p_2(1+\varkappa_2) + (3-\varkappa_2)q},$$

$k_{2m}=0$ і, як випливає з (6), напруження в околі кінців тріщини тільки при цьому значенні n обмежені, а при інших значеннях — необмежені.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Грилицький Д. В., Опанасович В. К. Стиск кусково-однорідної пластинки з фізичною щілиною на лінії розділу матеріалів. У цьому ж Віснику.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 539.375

М. А. РУДЬ, М. П. САВРУК, О. П. ДАЦИШИН

ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА КРАЙОВИХ ТРІЩИН У ПІВПЛОЩИНІ

Нехай пружна ізотропна півплощина послаблена періодичною системою крайових розрізів (тріщин). Довжина тріщин — l, кути між лініями тріщин і краєм півплощини — $\alpha\left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, відстань між вершинами сусідніх тріщин — d. Якщо на нескінченності і на границі півплощини навантаження відсутнє, а вздовж берегів усіх тріщин діють довільні самозрівноважені зусилля

$$p(x) = N^+ - iT^+ = N^- - iT^-, \ 0 \leqslant x < l,$$

то розв'язування такої плоскої задачі теорії пружності зводиться [1] до сингулярного інтегрального рівняння

$$\int_0^l [g'(t)M(t,x) + \overline{g'(t)}N(t,x)]\,dt = \pi p(x), \ 0 \leqslant x < l \qquad (1)$$

з ядрами

$$M(t,x)=\frac{\pi}{2d}\left\{e^{-i\alpha}\operatorname{ctg}\left(e^{-i\alpha}\pi\frac{t-x}{d}\right)+e^{i\alpha}\operatorname{ctg}\left(e^{i\alpha}\pi\frac{t-x}{d}\right)+\right.$$

$$+e^{-i\alpha}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\bar{\omega}}{d}\right)+e^{i\alpha}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)+\frac{2\pi ite^{-i\alpha}}{d}\sin\alpha\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)\times$$

$$\left.\times\left[1-e^{2i\alpha}+\frac{4\pi ixe^{2i\alpha}}{d}\sin\alpha\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)\right]\right\};$$

$$N(t,x)=\frac{\pi e^{i\alpha}}{2d}\left\{(1-e^{2i\alpha})\left[\operatorname{ctg}\left(e^{i\alpha}\pi\frac{t-x}{d}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{e^{i\alpha}\pi(t-x)}{d}\operatorname{cosec}^2\left(e^{i\alpha}\pi\frac{t-x}{d}\right)\right]-\frac{2\pi it}{d}\sin\alpha\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi\bar{\omega}}{d}\right)+$$

$$\left.+(1-e^{2i\alpha})\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)+\frac{2\pi ixe^{2i\alpha}}{d}\sin\alpha\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)\right\},$$

$$\omega=xe^{i\alpha}-te^{-i\alpha}.$$

Для знаходження чисельного розв'язку рівняння (1) скористуємося методом механічних квадратур [5], узагальнивши його на випадок крайових тріщин. Після заміни змінних $t=l(\xi+1)/2$, $x=l(\eta+1)/2$ рівняння (1) запишемо так:

$$\int_{-1}^{1}[\varphi(\xi)K(\xi,\eta)+\overline{\varphi(\xi)}L(\xi,\eta)]\,d\xi=q(\eta),\ |\eta|<1, \qquad (2)$$

де

$$K(\xi,\eta)=\frac{\lambda}{2}M\left(\frac{\xi+1}{2}l,\ \frac{\eta+1}{2}l\right),\ \ L(\xi,\eta)=\frac{\lambda}{2}N\left(\frac{\xi+1}{2}l,\frac{\eta+1}{2}l\right),$$

$$\varphi(\xi)=g'\left(\frac{\xi+1}{2}l\right),\ \ q(\eta)=p\left(\frac{\eta+1}{2}l\right),\ \ \lambda=\frac{l}{d}.$$

Зобразимо функцію $\varphi(\xi)$ у вигляді

$$\varphi(\xi)=\frac{w(\xi)}{s\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (3)$$

і будемо шукати $\omega(\xi)$ у формі інтерполяційного полінома Лагранжа

$$w(\eta)=\frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}w(\xi_m)\sum_{r=0}^{M-1}T_r(\xi_m)T_r(\eta)-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}w(\xi_m) \qquad (4)$$

по чебишовських вузлах (M — натуральне число)

$$\xi_m=\cos\left(\pi\frac{2m-1}{M}\right).$$

У формулах (3) і (4) s — силовий фактор, до якого віднесена вся система зовнішніх навантажень, $T_r(\xi)$ — поліном Чебишова першого роду.

Використовуючи квадратурну формулу Гаусса—Чебишова і її аналог для сингулярного інтеграла, від рівняння (2) прийдемо до системи $M-1$ алгебраїчних рівнянь [5]

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(w_m\alpha_{mk}+\overline{w}_m\beta_{mk})=f_k \quad (k=1,2,\ldots,M-1) \qquad (5)$$

для визначення M невідомих $w_m=w(\xi_m)$. Тут

$$\alpha_{mk}=K(\xi_m,\eta_k),\ \beta_{mk}=L(\xi_m,\eta_k),\ f_k=q(\eta_k)/s,\ \eta_k=\cos\left(\frac{k\pi}{M}\right).$$

Систему (5) необхідно доповнити ще одним рівнянням. Оскільки функція $\varphi(\xi)$ в точці виходу тріщини на границю півплощини ($\xi=-1$ або $x=0$) має особливість меншого порядку, ніж $1/\sqrt{1+\xi}$, то приймемо, що

$$w(-1)=0. \qquad (6)$$

На основі формул (4) і (6) одержимо останнє рівняння системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{M-m}w_m\operatorname{tg}\left(\pi\frac{2m-1}{4M}\right)=0.$$

Для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень k_1 і k_2 матимемо співвідношення [2]

$$k_1-ik_2=-\sqrt{\frac{l}{2}}sw(1)=-\sqrt{\frac{l}{2}}\frac{s}{M}\sum_{m=1}^{M}w_m(-1)^m\operatorname{ctg}\left(\pi\frac{2m-1}{4M}\right).$$

На машині «Минск-22» були проведені обчислення у випадку перпендикулярних тріщин ($\alpha=\pi/2$), коли на їх берегах діють сталі нормальні (σ) і дотичні (τ) зусилля: $p(x)=-s=-(\sigma-i\tau)$. Нижче для різних значень λ наведені коефіцієнти інтенсивності напружень k_1 і k_2, які одержані при розв'язуванні системи 40 рівнянь ($M=40$).

λ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$k_1/\sigma\sqrt{l}$	1,1214	0,8720	0,6253	0,5104	0,4446	0,3987
$k_2/\tau\sqrt{l}$	1,1214	1,1320	1,2072	1,3291	1,4575	1,5797
λ	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0
$k_1/\sigma\sqrt{l}$	0,3641	0,3372	0,3154	0,2973	0,2821	0,2303
$k_2/\tau\sqrt{l}$	1,6943	1,8022	1,9043	2,0013	2,0940	2,5075

З аналізу числових даних випливає, що при зменшенні відстані між тріщинами коефіцієнт інтенсивності напружень k_1 спадає до нуля, а k_2 монотонно зростає. При $\lambda=0$ одержується результат для однієї крайової тріщини у півплощині [1].

На закінчення відзначимо, що плоска задача теорії пружності для півплощини, яка послаблена системою крайових перпендикулярних до краю півплощини тріщин, розглядалась також методом конформних відображень у роботі [3] і асимптотичним методом — у роботі [6]. Числові результати одержано в роботі [4] для випадку нормального тиску на тріщинах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

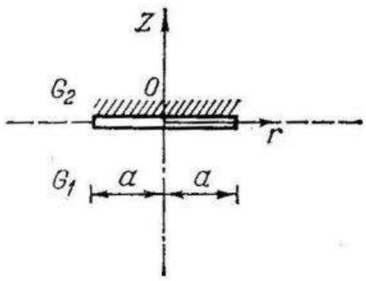
1. Койтер В. Т. Обсуждение статьи Бови «Растяжение прямоугольной пластины с симметричными трещинами на кромках». — «Прикладная механика. Серия Е», 1965, т. 32, № 1.
2. Саврук М. П., Дацышин А. П. О взаимодействии системы трещин с границей упругого тела. — «Прикладная механика», 1974, т. 10, вып. 7.
3. Bowie O. L. Solution of plane crack problems by mapping thechnique. — In: Methods of analysis and solution of crack problems. Leiden, Noordhoff Intern. Publ., 1973.
4. Ejke U. B. C. O. A row of external cracks in an elastic half-plane.— «J. Elast.», 1973, v. 3, N 4.
5. Erdogan F. E., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations. — «Quart. Appl. Math.», 1972, v. 29, N 4.
6. Koiter W. T. On the flexural rigidity of a beam weakened by transverse saw cuts. — «Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet.», 1956, Bd. 59, N 4.

УДК 539.385

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, О. П. ПІДДУБНЯК

МІШАНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З ЩІЛИНОЮ

Розглянемо безмежний двошаровий пружний простір, послаблений у площині спряження матеріалів круговою щілиною радіуса a (див. рисунок). Припустимо, що до однієї з площин щілини (наприклад, верхньої) прикладені скручуючі дотичні напруження, на нижній площині щілини задані тангенціальні зміщення. Потрібно визначити пружно-деформований стан тіла.



Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння кручення [1]

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$