З аналізу числових даних випливає, що при зменшенні відстані між тріщинами коефіцієнт інтенсивності напружень k_1 спадає до нуля, а k_2 монотонно зростає. При $\lambda=0$ одержується результат для однієї крайової тріщини у півплощині [1].

На закінчення відзначимо, що плоска задача теорії пружності для півплощини, яка послаблена системою крайових перпендикулярних до краю півплощини тріщин, розглядалась також методом конформних відображень у роботі [3] і асимптотичним методом — у роботі [6]. Числові результати одержано в роботі [4] для випадку нормального тиску на тріщинах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

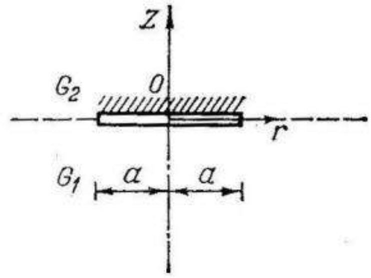
1. Койтер В. Т. Обсуждение статьи Бови «Растяжение прямоугольной пластины с симметричными трещинами на кромках». — «Прикладная механика. Серия Е», 1965, т. 32, № 1.
2. Саврук М. П., Дацышин А. П. О взаимодействии системы трещин с границей упругого тела. — «Прикладная механика», 1974, т. 10, вып. 7.
3. Bowie O. L. Solution of plane crack problems by mapping thechnique. — In: Methods of analysis and solution of crack problems. Leiden, Noordhoff Intern. Publ., 1973.
4. Ejke U. B. C. O. A row of external cracks in an elastic half-plane.— «J. Elast.», 1973, v. 3, N 4.
5. Erdogan F. E., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations. — «Quart. Appl. Math.», 1972, v. 29, N 4.
6. Koiter W. T. On the flexural rigidity of a beam weakened by transverse saw cuts. — «Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet.», 1956, Bd. 59, N 4.

УДК 539.385

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, О. П. ПІДДУБНЯК

МІШАНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З ЩІЛИНОЮ

Розглянемо безмежний двошаровий пружний простір, послаблений у площині спряження матеріалів круговою щілиною радіуса a (див. рисунок). Припустимо, що до однієї з площин щілини (наприклад, верхньої) прикладені скручуючі дотичні напруження, на нижній площині щілини задані тангенціальні зміщення. Потрібно визначити пружно-деформований стан тіла.



Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння кручення [1]

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

$$u_\theta(r,z)=\begin{cases}u_\theta^{(1)}(r,z), & z<0,\\ u_\theta^{(2)}(r,z), & z>0\end{cases}$$

при таких умовах

$$u_\theta^{(j)}\to 0,\ \sqrt{r^2+z^2}\to\infty\ (j=1,2), \tag{2}$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r,0^-)=G_1\,T\left(\frac{r}{a}\right),\ 0\leqslant r<a, \tag{3}$$

$$u_\theta^{(2)}(r,0^+)=aU\left(\frac{r}{a}\right),\ 0\leqslant r<a, \tag{4}$$

$$u_\theta^{(1)}=u_\theta^{(2)},\ \tau_{\theta z}^{(1)}=\tau_{\theta z}^{(2)},\ z=0,\ r>a. \tag{5}$$

Загальний розв'язок рівняння (1) за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля зобразимо як

$$u_\theta^{(j)}=a\int_0^\infty \varphi_j(\eta)\exp\left[(-1)^{j+1}\eta\zeta\right]J_1(\eta\rho)\,d\eta\ (j=1,2). \tag{6}$$

Умова (2) при цьому буде виконана. Дотичні напруження визначаться у вигляді

$$\tau_{\theta z}^{(j)}=(-1)^{j+1}G_j\int_0^\infty \eta\varphi_j(\eta)\exp\left[(-1)^{j+1}\eta\zeta\right]J_1(\eta\rho)\,d\eta, \tag{7}$$

$$\tau_{r\theta}^{(j)}=-G_j\int_0^\infty \eta\varphi_j(\eta)\exp\left[(-1)^{j+1}\eta\zeta\right]J_2(\eta\rho)\,d\eta. \tag{8}$$

У формулах (6)—(8) $\varphi_j(\eta)$ — шукана функція; $\rho=r/a$, $\zeta=z/a$, G_j — модуль зсуву.

Задовольнивши умови (3)—(5), одержимо систему парних інтегральних рівнянь відносно $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$

$$\int_0^\infty \eta\varphi_1(\eta)J_1(\eta\rho)\,d\eta=T(\rho),\ 0\leqslant\rho<1,$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(\eta)J_1(\eta\rho)\,d\eta=U(\rho),\ 0\leqslant\rho<1,$$

$$\int_0^\infty [\varphi_1(\eta)-\varphi_2(\eta)]J_1(\eta\rho)\,d\eta=0,\ \rho>1,$$

$$\int_0^\infty \eta [\beta_1 \varphi_1(\eta) + \beta_2 \varphi_2(\eta)] J_1(\eta\rho)\, d\eta = 0, \ \rho > 1, \tag{9}$$

де $\beta_j = G_j/(G_1+G_2)$ $(j=1,2)$.

Ввівши нові функції $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ таким чином, що

$$\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta) = \int_0^\infty H(1-t)\,\Phi_1(t) \cos \eta t\, dt, \tag{10}$$

$$\beta_1 \varphi_1(\eta) + \beta_2 \varphi_2(\eta) = \int_0^\infty H(1-t)\,\Phi_2(t) \sin \eta t\, dt,$$

($H(x)$ — функція Хевісайда)

два останні рівняння (9) задовольнимо зразу, як тільки

$$\int_0^1 \Phi_1(t)\, dt = 0. \tag{11}$$

Відзначимо, що $\Phi_1(-t) = \Phi_1(t)$, $\Phi_2(-t) = -\Phi_2(t)$.

Визначивши з (10) $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$, можна знайти різницю дотичних напружень і різницю зміщень на поверхні щілини $(0 \leqslant \rho < 1)$

$$\tau(\rho) = -\frac{d}{d\rho}\int_\rho^1 \frac{\Phi_2(t)\, dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}, \quad \tau(\rho) = \beta_1 T(\rho) - (G_1+G_2)^{-1} \tau_{\theta z}^{(2)}/_{\zeta=0}, \tag{12}$$

$$u(\rho) = -\frac{1}{\rho}\int_\rho^1 \frac{t\Phi_1(t)\, dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}, \quad u(\rho) = \frac{1}{a} u_\theta^{(1)}/_{\zeta=0} - U(\rho). \tag{13}$$

Підставимо $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ у перші два рівняння системи (9), проінтегрувавши перше з них по ρ. Застосуємо до першого рівняння оператор $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{\rho d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}$, а до другого оператор $\dfrac{d}{dx}\, x \displaystyle\int_0^x \frac{d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}$ [5]. Врахувавши перший інтеграл Соніна [3] та виконавши необхідні перетворення у класі узагальнених функцій, одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\beta_2 \Phi_1(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\Phi_2(t)\,dt}{t-x} = T_1(x) - \frac{2}{\pi} C_0,$$

$$\Phi_2(t) + \frac{1}{\pi}\beta_1 \int_{-1}^{1} \frac{\Phi_1(t)\,dt}{t-x} = U_1(x) \ \ |x| < 1, \tag{14}$$

де C_0 — стала інтегрування,

$$T_1(x) = -\frac{2}{\pi} x \int_0^x \frac{T(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x^2-\xi^2}}; \ U_1(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx} x \int_0^x \frac{U(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x^2-\xi^2}}.$$

Ввівши функції

$$\psi_{1,2}(x) = N_{1,2}\beta_2 \Phi_1(x) + \Phi_2(x),\ N_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}, \tag{15}$$

систему (12) розділимо на два незалежних сингулярних рівняння

$$\psi_j(x) + \frac{1}{\pi} N_j \int_{-1}^{1} \frac{\psi_j(t)}{t-x} dt = R_j(x),\ |x| < 1 \ \ (j = 1, 2), \tag{16}$$

де $$R_j(x) = U_1(x) + N_j\left[T_1(x) - \frac{2}{\pi} C_0\right] \ (j = 1, 2).$$

Точний розв'язок кожного з рівнянь (16) можна подати у вигляді розкладу по ортогональних поліномах Якобі, якщо скористуватись результатом з [2]

$$P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\pi\alpha}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{P_n^{(-\alpha,\alpha)}(t)}{t-x} \times$$

$$\times \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\alpha} dt = \sec\pi\alpha\, P_n^{(\alpha,-\alpha)}(x),\ |x| < 1,$$

у результаті одержимо

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{4\sqrt{\beta_1\beta_2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n P_n^{(\alpha,-\alpha)}(x)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\right],$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} - \right.$$

$$-(-1)^n P_n^{(\alpha,-\alpha)}(x)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\Bigg], \quad |x|<1, \tag{17}$$

де

$$\alpha=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right),\; A_n=\frac{(n!)^2(2n+1)}{2\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(n+1-\alpha)}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\alpha}P_n^{(\alpha,-\alpha)}(t)\,\{\cos\pi\alpha\,[U_1(t)-U_1(-t)]+$$

$$+\sin\pi\alpha\,[T_1(t)+T_1(-t)]\}\,dt,\quad n=\overline{1,\infty}. \tag{18}$$

При цьому врахована умова (11), внаслідок якої стала C_0 не впливає на розв'язок задачі.

Маючи функції $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, на основі (10), (6)—(8) можна одержати напруження і зміщення у пружному тілі. Зокрема, при підході до краю щілини різниця дотичних напружень має характер

$$\tau(\rho)\sim k_1(1-\rho)^{-\frac{1}{2}-\alpha}+k_2(1-\rho)^{-\frac{1}{2}+\alpha},\quad \rho\to1, \tag{19}$$

де
$$k_1=-\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{2^{\frac{1}{2}-\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A_n\Gamma(n+1-\alpha),$$

$$k_2=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A_n\Gamma(n+1+\alpha). \tag{20}$$

Відзначимо, що формулу (19) можна визначити також, якщо розв'язати відповідну сингулярну задачу теорії пружності [4].

З умови статики

$$\frac{M}{2\pi(G_1+G_2)a^3}=\int_0^1\rho^2\tau(\rho)\,d\rho=\int_{-1}^{1}t\,\Phi_2(t)\,dt$$

знайдемо величину моменту кручення M зусиль, що прикладені до поверхонь щілини

$$M=\pi(G_1+G_2)a^3\int_{-1}^{1}(t+\alpha)\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\alpha}\{\cos\pi\alpha\,[U_1(t)-U_1(-t)]+$$

$$+\sin\pi\alpha\,[T_1(t)+T_1(-t)]\}\,dt. \tag{21}$$

Розглянемо приклад, коли $T(\rho)=0$, а $U(\rho)=\varepsilon\rho$, що відповідає крученню двошарового середовища тонкою жорсткою шайбою, розміщеною в щілині при умові, що шайба припаяна лише однією стороною до пружного тіла.

У цьому випадку $A_1=\frac{8\varepsilon}{\pi}\cos\pi\alpha,\ A_n=0\ (n\geqslant 2)$. За формулами (17) знаходимо

$$\Phi_1(x)=\frac{2\varepsilon}{\pi\sqrt{\beta_1\beta_2}}\cos\pi\alpha\left[(x+\alpha)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}-(x-\alpha)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\right], \tag{22}$$

$$\Phi_2(x)=\frac{2\varepsilon}{\pi}\cos\pi\alpha\left[(x+a)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}+(x-\alpha)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\right].$$

Коефіцієнти k_1 і k_2 приймають значення

$$k_1=-\frac{2^{\frac{1}{2}+\alpha}\Gamma(2-\alpha)\cos\pi\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\varepsilon,\quad k_2=-\frac{2^{\frac{1}{2}-\alpha}\Gamma(2+\alpha)\cos\pi\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\varepsilon. \tag{23}$$

Момент кручення M пов'язаний з кутом повороту ε шайби формулою

$$M=\frac{16}{3}(G_1+G_2)\,a^3\varepsilon\pi\alpha\,(1-\alpha^2)\operatorname{ctg}\pi\alpha. \tag{24}$$

Значення жорсткості пружної системи на кручення $C=M/(G_2\varepsilon a^3)$ та коефіцієнтів $K_1=-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}2^{-\frac{1}{2}-\alpha}k_1$, $K_2=-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}\times 2^{-\frac{1}{2}+\alpha}k_2$ залежно від параметра α поміщені у таблиці.

Значення жорсткості на кручення C та коефіцієнтів K_1 і K_2

α	0	1/8	1/4	3/8	1/2
C	$\frac{16}{3}$	0,581	0,784	1,621	∞
K_1	0,660	0,372	0,162	0,0447	0
K_2	0,564	0,674	0,655	0,429	0

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.

2. Карпенко Л. Н. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. — «Прикладная математика и механика», 1966, т. 30, вып. 3.

3. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.

4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.

5. Keer L. M. Mixed boundary value problems for a penny-shaped cut. — «Journal of Elasticity», 1975, vol. 5, N 2.