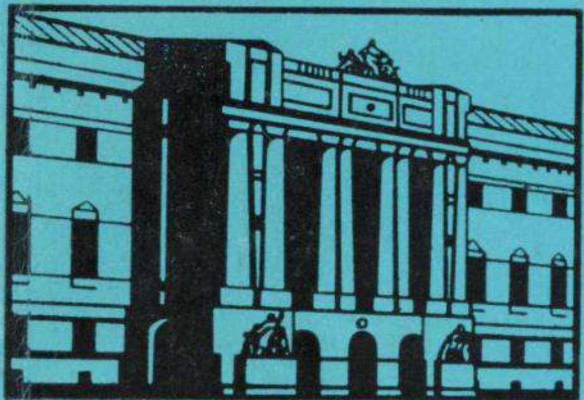
ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. Ів. ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 12



ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ І АНАЛІЗУ

1977

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВ. ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 12

ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ І АНАЛІЗУ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ
«ВИЩА ШКОЛА»

1977

518
Л89

УДК 513

Вестник Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 12. Вопросы математической физики и анализа. Львов, «Вища школа», изд-во при Львов. ун-те, 1977, с. 98.

В сборнике помещены статьи по теории функций, теории вероятности, дифференциальных и интегральных уравнений, алгебры, геометрии, теории упругости и вычислительной математики. Предназначен для научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов.

Редакція науково-технічної
та природничої літератури

В $\frac{20200-029}{М225(04)-77}$

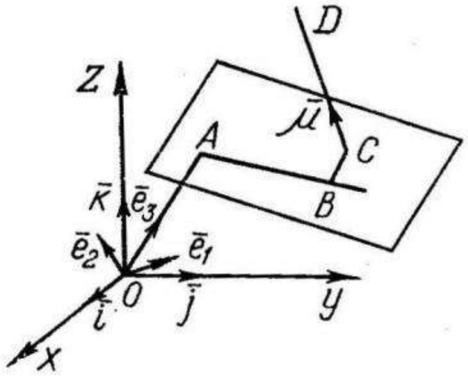
МАТЕМАТИКА

УДК 513

С. В. ДЕНИСКО

ВІДТВОРЕННЯ РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕХАНІЗМІВ

Нехай пряма CD, як показано на рисунку, поступально переміщається відносно ортонормованого репера $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, у якого вектор $\bar{e}_1$ знаходиться у площині Oxy так, що траєкторії різних її точок є прямі, перпендикулярні до вектора $\bar{e}_3$. Нехай



цей поступальний рух здійснюється за допомогою складної зубчастої передачі [1] внаслідок обертання репера $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ навколо осі Oz. Пряма CD описуватиме в просторі лінійчасту поверхню, яку називатимемо для зручності поверхнею Σ. Виснимо, за яких умов поверхня Σ є розгортною.

Нехай OA — перпендикуляр до площини векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ (вектор $\overline{AB}$ вказує напрямок і величину зміщення прямої CD відносно репера $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, вектор $\overline{BC}$ перпендикулярний до векторів $\overline{AB}$, $\bar{e}_3$). Нехай вісь Ox вибрана так, що $\overline{AB}=k\varphi(\alpha\bar{e}_1+ +\beta\bar{e}_2)$, де k — стала, $\alpha\bar{e}_1+\beta\bar{e}_2$ — напрямний орт прямої AB, а φ — кут повороту репера $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, який відлічується від напрямного орта $\bar{i}$ осі Ox. Тоді координати x, y, z радіуса-вектора $\bar{r}$ точки C і координати X, Y, Z напрямного орта $\bar{\mu}=\mu^s\bar{e}_s$ прямої CD матимуть вигляд

$$x = am\zeta + k\varphi(-a\eta - \beta n\zeta) + \Delta(\beta\eta - \alpha n\zeta),$$

$$y = am\eta + k\varphi(\alpha\zeta - \beta n\eta) - \Delta(\beta\zeta + \alpha n\eta),$$

$$z = an + k\varphi\beta m + \Delta\alpha m,$$

$$X = -\mu^1\eta - \mu^2 n\zeta + \mu^3 m\zeta, \quad Y = -\mu^1\zeta - \mu^2 n\eta + \mu^3 m\eta,$$

$$Z = \mu^2 m + \mu^3 n, \tag{1}$$

де $a = |\overline{OA}|$, $\zeta = \cos\varphi$, $\eta = \sin\varphi$, $m = \sin\angle ZOA$, $n = \cos\angle ZOA$, Δ — координата вектора $\overline{BC}$ на координатній осі BC, масштабним вектором якої є вектор $-\beta\overline{e}_1 + \alpha\overline{e}_2$.

Як відомо [2], поверхня Σ буде розгортною тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\frac{d\overline{r}}{d\varphi}\,\overline{\mu}\,\frac{d\overline{\mu}}{d\varphi}\right) = 0.$$

Зважаючи на (1), ця умова перепишеться таким чином:

$$[(\mu^1)^2 + (-\mu^2 n + \mu^3 m)^2]\,k\beta m - (\mu^2 m + \mu^3 n)\{(am - k\varphi\beta n -$$

$$-\Delta\alpha n + k\alpha)\mu^1 + (-k\varphi\alpha + \Delta\beta)(-\mu^2 n + \mu^3 m) - k\beta n\,[-\zeta^2\eta\mu^1 +$$

$$+\zeta^3(-\mu^2 n + \mu^3 m) + \zeta\eta^2\mu^1 - \eta^3(-\mu^2 n + \mu^3 m)]\} = 0. \tag{2}$$

Розглянемо тепер всі можливі випадки, які випливають з умови (2).

Нехай $(\mu^2 m + \mu^3 n)\beta n \neq 0$.
Тоді розгортна поверхня Σ є циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz.

Якщо $\mu^2 m + \mu^3 n = 0$, то розгортна поверхня Σ є куском площини, перпендикулярним до осі Oz.

Нехай $\mu^2 m + \mu^3 n \neq 0$, але $\beta n = 0$. Якщо $\beta = 0$, то розгортна поверхня Σ є або циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz, або поверхнею, для якої виконуються умови

$$\beta = 0, \quad -\mu^2 n + \mu^3 m = 0, \quad ma - \Delta n + k = 0.$$

Якщо ж $n = 0$, то розгортна поверхня Σ задовольняє умови

$$n = 0, \quad \alpha = 0, \quad \left[\left(\frac{\mu^1}{\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu^3}{\mu^2}\right)^2\right]k - \left(\frac{\mu^1}{\mu^2}a + \frac{\mu^3}{\mu^2}\Delta\right) = 0,$$

або

$$n = 0, \quad \mu^3 = 0, \quad \mu^1[\mu^1 k\beta - \mu^2(a - k\alpha)] = 0. \tag{3}$$

В останньому випадку за умови, що $\mu^1 = 0$, поверхня Σ є циліндричною поверхнею з твірними паралельними осі Oz.

Наявні такі твердження.

1. Нехай площина ABC паралельна осі Oz. Тоді необхідною умовою того, що неперпендикулярна до осі Oz твірна розгортної поверхні Σ не належить площині ABC, є паралельність вектора $\overline{AB}$ осі Oz.

2. Нехай площина ABC паралельна осі Oz, вектор $\overline{AB}$ паралельний площині Oxy, а твірна розгортної поверхні Σ не паралельна ні осі Oz, ні площині Oxy. Тоді $a=k$.

3. Якщо твірна розгортної поверхні Σ не перпендикулярна до осі Oz і належить площині ABC, то площина ABC паралельна осі Oz.

4. Нехай твірна розгортної поверхні Σ належить площині ABC і паралельна вектору $\overline{AB}$. Тоді поверхня Σ є або круговим конусом з віссю Oz, або круговим циліндром з тією ж віссю, або куском площини, перпендикулярним до осі Oz. Цим і вичерпуються всі можливі випадки.

5. Нехай вектор $\overline{AB}$ паралельний площині Oxy і для розгортної поверхні Σ виконується умова $ma-\Delta n+k=0$. Тоді площина, паралельна твірній поверхні Σ і вектору $\overline{AB}$, паралельна осі Oz. Крім цього, якщо пряма AB перетинає вісь Oz, то $\Delta\neq 0$.

Розглянемо деякі положення, пов'язані з перенастройкою механізму. Візьмемо той випадок, коли твірна розгортної поверхні належить площині ABC, паралельній осі Oz. Перенастройку механізму будемо здійснювати за рахунок довільної зміни тільки одного параметру. У такому разі матимемо прямолінійну конгруенцію [3], до якої належатимуть розгортні поверхні, відтворювані механізмом.

Нехай довільно змінюється відношення μ^1/μ^2, а параметр a змінюється згідно з формулою (3). Тоді дістанемо гіперболічну конгруенцію, у якої одну фокальну поверхню описує точка перетину прямих CD, AB, а друга фокальна поверхня складена з ребер звороту розгортних поверхонь, відтворюваних механізмом. Якщо ж не параметр a, а параметр k змінюватиметься за формулою (3), то матимемо нормальну конгруенцію.

Нехай тепер довільно змінюється кут між векторами $\overline{AB}$, $\overline{e}_1$, а кут між прямими AB, CD залишається незмінним. Тоді при умові, що параметр a змінюється згідно (3), дістанемо нормальну конгруенцію. Так само матимемо нормальну конгруенцію і при умові, що k змінюється згідно з формулою (3).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. М., «Наука», 1975.
2. Норден А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.
3. Фиников С. П. Теория конгруэнций. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

УДК 517.913

В. Г. КОСТЕНКО

ПРО ОДНЕ КВАЗІЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Розглянемо квазілінійне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varphi(u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{1}$$

де $\varphi(u)$ — довільна неперервно диференційовна функція.

Так само, як і в [2], знайдено, що серед рівнянь виду (1) нескінченну неперервну групу перетворень допускає лише рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \exp(-\alpha u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{1'}$$

де α — довільна стала. В інфінітезімальному операторі

$$Uf = (t+1)\frac{\partial f}{\partial t} + \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{2}{\alpha}\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial u}$$

відповідної групи перетворень $\xi(x, y)$ і $\eta(x, y)$ є довільні спряжено-гармонійні функції. Скінчені перетворення цієї неперервної нескінченої групи мають вигляд [1], [3]

$$t_1 = at + b,\ x_1 = P_1(x, y),\ y_1 = Q_1(x, y),\ u_1 = u(t, x, y) + R(x, y), \tag{2}$$

де $R(x, y)$ — гармонійна функція; $P_1(x, y)$ і $Q_1(x, y)$ — довільні спряжено-гармонійні функції; a, b — довільні сталі. Зображення функції

$$R(x, y) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left[\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3}$$

знайдено з умови інваріантності рівняння (1′) відносно групи перетворень (2). Після цього в (2) виключаємо t, x і y з врахуванням (3) і наступним перепозначенням t_1, x_1, y_1 знову через t, x, y. Це дає

$$u_1 = u\left(\frac{t-b}{a},\ P(x, y),\ Q(x, y)\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right], \tag{4}$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ — також довільні спряжено-гармонійні функції.

Таким чином, формулою (4) зображається деяка сукупність розв'язків u_1 рівняння (1′), якщо частинний розв'язок $u(t, x, y)$ цього рівняння відомий.

Хоча б один розв'язок рівняння (1′) шукаємо у вигляді

$$u(t, x, y) = T(t) + v(x, y).$$

Тоді $T'' + \lambda \exp(-\alpha T) = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\lambda \exp(\alpha v).$

Інтегруючи останні рівняння [2], знаходимо деяку сукупність розв'язків рівняння (1') у вигляді

$$\alpha u_1 = 2 \ln \left[\frac{c_1}{2} \exp\left(\frac{\alpha c_0 (t-b)}{2a} \right) - \frac{\lambda}{\alpha c_0^2 c_1} \exp\left(-\frac{\alpha c_0 (t-b)}{2a} \right) \right] +$$

$$+ (\beta \sqrt{2} - 2) \ln \sqrt{P^2 + Q^2} - 2 \ln \frac{1 + (P^2 + Q^2)^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}}}{2} -$$

$$- 2 \ln \frac{\sqrt{\lambda\alpha}}{\beta} + \ln \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Тут $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — довільні спряжено-гармонійні функції, c_0, c_1, β, λ, α, a, b — довільні сталі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Костенко В. Г. Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом. Вид-во Львівського ун-ту, 1959.
2. Костенко В. Г., Євстаф'єва Н. В. Деякі диференціальні рівняння, інваріантні відносно груп перетворень. — В кн.: Збірник робіт аспірантів механіко-математичного та фізичного факультетів. Вид-во Львівського ун-ту, 1961.
3. Sophus Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.913

К. С. КОСТЕНКО

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші

$$y''' + A(x) y' + \frac{1}{2} A'(x) y = (A(x) - p(x)) y' +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} A'(x) - q(x) \right) y + f(x, y, y', y''), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; y''(x_0) = y_0'', \tag{2}$$

де $A(x) = \xi^{-2}(x)(\mu - 2\xi''(x)\xi(x) + \xi'^2(x))$. Нехай функції: $q(x)$ — неперервна, $p(x)$ — неперервно диференційовна, $\xi(x)$ — тричі неперервно диференційовна на інтервалі $x_0 \leqslant \leqslant x < \infty$, $f(x, y, y', y'')$ — неперервна в області D $(x_0 \leqslant x < \infty$, $|y|, |y'|, |y''| \leqslant m)$ і μ — довільний додатний параметр.

Задача (1), (2) зведена до інтегро-диференціального рівняння [1]

$$y(x, x_0) = \xi(x)(c_1 + c_2 \cos\sqrt{\mu}\varphi(x, x_0) + c_3 \sin\sqrt{\mu}\varphi(x, x_0)) +$$
$$+ \xi(x)\int_{x_0}^{x} [P(t)\cos\sqrt{\mu}\varphi(x, t) + Q(t)\sin\sqrt{\mu}\varphi(x, t) -$$
$$- P(t)]\, y(t, x_0)\, dt + \mu^{-1}\xi(x)\int_{x_0}^{x}\xi(t)(1 - \cos\sqrt{\mu}\varphi(x, t)) \times$$
$$\times f(t, y(t), y'(t), y''(t))\, dt, \tag{3}$$

де $P(x) = \mu^{-1}\left[\xi'(x)(A(x) - p(x)) + \xi(x)\left(\frac{1}{2}A'(x) + q(x) - p'(x)\right]\right.$;

$Q(x) = \mu^{-1/2}(A(x) - p(x))$, $\varphi(x, x_0) = \int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\, dt$; c_1, c_2, c_3 залежать лише від y_0, y_0', y_0'', $\xi(x_0)$, $\xi'(x_0)$, $\xi''(x_0)$ і $p(x_0)$.

Якщо в D

$$|f(x, y, y', y'')| \leqslant r(x)\, y^{\alpha}, \; r(x) > 0, \tag{4}$$

то, оцінюючи (3) за модулем, маємо

$$\left|\frac{y(x, x_0)}{\xi(x)}\right| \leqslant c + \int_{x_0}^{x}(k_1(t)\,|y(t, x_0)| + b_1(t)\,|y(t, x_0)|^{\alpha})\, dt, \tag{5}$$

де $k_1(x) = 3\max_x[|P(x)|, |Q(x)|]$, $b_1(x) = 2\mu^{-1}|\xi(x)|\, r(x)$, $c = \max[|c_1|, |c_2|, |c_3|]$.

Заміною

$$y(x, x_0) = \xi(x)\, z(x, x_0) \tag{6}$$

зводимо (5) до

$$|z(x, x_0)| \leqslant c + \int_{x_0}^{x}(k(t)\,|z(t, x_0)| + b(t)\,|z(t, x_0)|^{\alpha})\, dt, \tag{7}$$

де $$k(x) = |\xi(x)|\, k_1(x), \; b(x) = |\xi(x)|^{\alpha} b_1(x).$$

Лема Перова в застосуванні до нерівності (7) дає:

1) якщо $0 \leqslant \alpha < 1$, то для $x \geqslant x_0$

$$|z(x, x_0)| \leqslant R_1(x), \tag{8}$$

де

$$R_1(x) = \left\{ c^{1-\alpha} \exp\left[(1-\alpha) \int_{\tau}^{x} k(s)\, ds \right] + \right.$$

$$\left. + (1-\alpha) \int_{x_0}^{x} b(\tau) \exp\left[(1-\alpha) \int_{\tau}^{x} k(s)\, ds \right] d\tau \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{9}$$

2) якщо $\alpha > 1$ і початкові умови (2) такі, що

$$c < \left[(\alpha - 1) \int_{x_0}^{x_0+h} b(s)\, ds \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left(- \int_{x_0}^{x_0+h} k(s)\, ds \right) = R_2(h), \tag{10}$$

то на відрізку $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$

$$|z(x, x_0)| \leqslant R_3(x), \tag{11}$$

де

$$R_3(x) = c \left\{ \exp\left[(1-\alpha) \int_{x_0}^{x} k(s)\, ds \right] - \right.$$

$$\left. - c^{\alpha-1} (\alpha - 1) \int_{x_0}^{x} b(\tau) \exp\left[(1-\alpha) \int_{\tau}^{x} k(s)\, ds \right] d\tau \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{12}$$

Враховуючи (6), для розв'язків задачі (1), (2) одержуємо оцінки: якщо $0 \leqslant \alpha < 1$, то

$$|y(x, x_0)| \leqslant |\xi(x)|\, R_1(x), \quad x \geq x_0; \tag{13}$$

якщо $\alpha > 1$ і $c < R_2(h)$, то

$$|y(x, x_0)| \leqslant |\xi(x)|\, R_3(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h; \tag{14}$$

за лемою Гронуолла—Беллмана [2], якщо $\alpha = 1$, то

$$|y(x, x_0)| \leqslant c\, |\xi(x)| \exp \int_{x_0}^{x} (k(t) + b(t))\, dt, \quad x \geqslant x_0. \tag{15}$$

У випадку, коли праві частини (13), (15) необмежені при $x \to \infty$, вони дають оцінки зверху для тих швидкостей, з якими розв'язки задачі (1), (2) ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) прямують до ∞ при $x \to \infty$. Знайдемо умови, за яких розв'язки задачі (1), (2) будуть обмеженими при $x \to \infty$. Припустимо, що

$$\int_{x_0}^{\infty} k(t)\,dt = k_0 < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} b(t)\,dt = b_0 < \infty. \tag{16}$$

Тоді очевидно, що за $\alpha > 1$ величина

$$R_2(\infty) = \left[(\alpha - 1)\int_{x_0}^{\infty} b(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left(-\int_{x_0}^{\infty} k(s)ds\right) =$$

$$= \exp(-k_0)\left[(\alpha - 1)\,b_0\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = s_0 < \infty.$$

Якщо початкові умови (2) такі, що (10) має місце для $h \leqslant \infty$, то оцінка (11) також має місце для всіх $x \geqslant x_0$ і, крім того, (10) та (13) за умов (16) будуть обмеженими при $x \to \infty$.

Тепер з аналізу оцінок (13), (14), (15) випливає такий висновок.

Теорема. Нехай $f(x, y, y', y'')$ неперервна в області $D(x_0 \leqslant \leqslant x < \infty, |y|, |y'|, |y''| \leqslant m)$, $q(x)$ і $p'(x)$ неперервні на інтервалі $x_0 \leqslant x < \infty$. Крім того, нехай мають місце умови (4) і (16), якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, або (4), (16) і $c < R_2(\infty)$, коли $\alpha > 1$.

Тоді всі розв'язки задачі (1), (2) будуть обмеженими, якщо функція $\xi(x)$ залишається обмеженою при $x \to \infty$, або прямуватимуть до нуля, коли $\xi(x)$ прямує до нуля при $x \to \infty$.

Приклад. В інтервалі $x_0 \leqslant x < \infty$ розглянемо рівняння

$$y''' + x^2 y' + xy = x^{-\beta} y^{\alpha} \cos\psi(y', y''). \tag{17}$$

Виберемо $\xi(x) = x^{-1}$, $\mu = 1$. Тоді $P(x) = 6x^{-4}$, $Q(x) = -3x^{-2}$. Отже, для достатньо великих x $k(x) = 9x^{-3}$, $b(x) = 2x^{-(1+\alpha+\beta)}$ і якщо $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, то умови теореми задовольняються. Таким чином, за відповідних початкових умов розв'язки рівняння (17) прямуватимуть до нуля з швидкістю не меншою від швидкості прямування до нуля функції $\xi(x) = x^{-1}$ при $x \to \infty$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Костенко Е. С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. — «Дифференциальные уравнения», 1974, т. 10, № 10.

2. Павлюк І. А. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. К., Вид-во Київського ун-ту, 1970.

УДК 517.946

Л. С. ПАРАСЮК, Є. М. ПАРАСЮК

ОСНОВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПІВПЛОЩИНІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ, ЩО ВИРОДЖУЮТЬСЯ НА ГРАНИЦІ

І. Л. Кароль [1—4] вперше дослідив рівняння змішаного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \ \lambda=\text{const}, \tag{1}$$

в області D, обмеженій зверху кривою (або декількома кривими) Γ, які лежать у півплощині $y>0$ і спираються своїми кінцями на вісь OX, а знизу — двома характеристичними дугами. Зокрема була вивчена задача Трікомі.

У цій статті розглядається рівняння вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{2}$$

для якого у півплощині $y>0$ ставляться і розв'язуються в явному вигляді основні крайові задачі, доводяться теореми існування залежно від дійсних значень параметра λ.

Як відомо, першу крайову задачу для рівняння (2), як і для рівняння (1), можна ставити так: знайти такий розв'язок рівняння у півплощині $y>0$, який би задовольняв крайову умову

$$\lim_{y\to 0} u(x, y)=f(x). \tag{3}$$

Теорема 1. Якщо $f(x)$ неперервна і абсолютно інтегрована на всій осі, то при всіх $\lambda<0$ розв'язок задачі (2), (3) існує у вигляді

$$u(x, y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x-\xi, y)\, f(\xi)\, d\xi, \tag{4}$$

де

$$G_\lambda(x-\xi, y)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{(4y)^\lambda\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\lambda)[(x-\xi)^2+4y]^{1/2-\lambda}}, \tag{5}$$

Доведення. На основі обмежень, накладених на функцію $f(x)$, інтеграл (4) є збіжним у півплощині $y>0$ і допускає диференціювання під знаком інтеграла. Тоді безпосередньою перевіркою переконуємось, що (4) задовольняє (2).

Покажемо, що (4) задовольняє крайову умову (3). Нехай D — дійсна вісь, а D_ε — довільно малий ε — окіл точки x: $|x-\xi|<\varepsilon$. Легко переконатись у справедливості рівностей

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{D/D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\,d\xi = 0, \quad (6) \qquad \lim_{y\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\,d\xi = 1. \quad (7)$$

Рівність (6) безпосередньо випливає із (5) при $\lambda<0$. Для доведення рівності (7), зробимо заміну $\xi - x = t$. Тоді

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\,d\xi = \lim_{y\to 0}\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{(4y)^\lambda\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\lambda)}\int\limits_0^\varepsilon \frac{dt}{(4y+t^2)^{1/2-\lambda}}.$$

Зробивши знову заміну $t=2\sqrt{y}\,z$, одержуємо

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\,d\xi = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\lambda)}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^{1/2-\lambda}}.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^{1/2-\lambda}} = \frac{1}{2}B\left(-\lambda, \frac{1}{2}\right),$$

де $B(-\lambda, 1/2)$ — функція Ейлера першого роду, то на основі відомого співвідношення

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

із останніх рівностей одержуємо (7).

Візьмемо тепер довільно мале число $\eta>0$ і виберемо $\varepsilon>0$ настільки малим, щоб при $|x-\xi|<\varepsilon$ коливання функції $f(\xi)$ не перевищували η. Тоді в околі D_ε маємо

$$f(\xi) = f(x) + \varphi(\xi), \text{ де } |\varphi(\xi)| < \eta.$$

Отже,

$$u(x, y) = \int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y) f(x)\,d\xi + \int\limits_{D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_{D/D_\varepsilon} G_\lambda(x-\xi, y) f(\xi)\,d\xi. \quad (8)$$

На основі (6) і (7), а також довільності η з останньої рівності випливає (3).

Друга крайова задача для рівняння (2) це задача з крайовою умовою

$$\lim_{y\to 0} y^{\lambda+1}\frac{\partial u}{\partial y} = f(x). \quad (9)$$

Аналогічно доводиться інша теорема.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна і абсолютно інтегровна на всій осі, то при $\lambda > -1/2$ розв'язок задачі (2), (9) існує у вигляді

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\lambda (x-\xi, y) f(\xi)\, d\xi, \tag{10}$$

де
$$\omega_\lambda (x-\xi, y) = \frac{-4^\lambda \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1)[(x-\xi)^2 + 4y]^{\lambda + 1/2}}. \tag{11}$$

Третю крайову задачу для рівняння (2) можна ставити з крайовою умовою

$$\lim_{y \to 0} \left(\lambda u + y \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x). \tag{12}$$

Для цієї задачі справедлива наступна теорема.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ неперервна і абсолютно інтегровна на всій осі, то при $\lambda < 0$ розв'язок задачі (2), (12) існує у вигляді

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_\lambda (x-\xi, y) f(\xi)\, d\xi, \tag{13}$$

де
$$N_\lambda (x-\xi, y) = \frac{-\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{(4y)^\lambda \sqrt{\pi}\Gamma(1-\lambda)[(x-\xi)^2 + 4y]^{1/2 - \lambda}}. \tag{14}$$

Як і в теоремі 1 доведення теореми 3 грунтується на властивостях

$$\lim_{y \to 0} \int_{D/D_\varepsilon} \left(\lambda N_\lambda + y \frac{\partial N_\lambda}{\partial y}\right) d\xi = 0, \quad (15) \qquad \lim_{y \to 0} \int_{D_\varepsilon} \left(\lambda N_\lambda + y \frac{\partial N_\lambda}{\partial y}\right) d\xi = 1. \quad (16)$$

При цьому

$$\lambda N_\lambda + y \frac{\partial N_\lambda}{\partial y} = \frac{(4y)^{1-\lambda} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\lambda)\,[(x-\xi)^2 + 4y]^{3/2 - \lambda}}. \tag{17}$$

Ми бачимо, що (17) одержується із (5), коли в (5) замість λ прийняти $\lambda - 1$. Таким чином, розв'язок третьої крайової задачі у півплощині $y > 0$ для рівняння (2) переходить у розв'язок першої крайової задачі для рівняння (1). Цей розв'язок існує при $\lambda < 1$.

На закінчення зазначимо, що для рівняння (2) можна ставити першу крайову задачу в півплощині $y>0$ з крайовою умовою

$$\lim_{y\to 0} y^{\lambda} u(x, y) = f(x). \tag{18}$$

При цьому справедлива наступна теорема.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ неперервна і абсолютно інтегровна на всій осі, то при $\lambda>1/2$ розв'язок задачі (2), (18) існує у вигляді

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} W_{\lambda}(x-\xi, y) f(\xi)\, d\ , \tag{19}$$

де

$$W_{\lambda}(x-\xi, y) = \frac{-4^{\lambda-1}\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)\left[(x-\xi)^2+4y\right]^{\lambda-1/2}}. \tag{20}$$

Знову бачимо, що (20) одержується із (11), коли в (11) замість λ прийняти $\lambda-1$. Це також свідчить про те, що у півплощині $y>0$ існує тісний зв'язок між розв'язком задачі (2), (18) і розв'язком другої крайової задачі для рівняння (1) з крайовою умовою

$$\lim_{y\to 0} y^{\lambda} \frac{\partial u}{\partial y} = f(x). \tag{21}$$

Розв'язок задачі (1), (21) існує, таким чином, при $\lambda>1/2$ і одержується шляхом диференціювання по y із (10), коли замість λ прийняти $\lambda-1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кароль И. Л. К теории уравнений специального типа. — ДАН СССР, 1953, 88, № 2.
2. Кароль И. Л. Краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. — ДАН СССР, 1955, 101, № 5.
3. Кароль И. Л. К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. — «Математический сборник», 1956, 38 (80), № 3.
4. Кароль И. Л. О краевых задачах для уравнения смешанного типа. — «Вестник Львов. ун-та, серия математическая, механическая и астрономическая», 1956, 1, № 1.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., «Наука», 1966.
6. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., «Наука», 1970.

УДК 517.946

І. М. КОЛОДІЙ

ТЕОРЕМА ТИПУ ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У статті розглядаються квазілінійні еліптичні рівняння з виродженням виду

$$\operatorname{div} A(x, u, u_x) = B(x, u, u_x),$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ u_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}),$$

$$A(x, u, u_x) = (A_1(x, u, u_x), \ldots, A_n(x, u, u_x)). \qquad (1)$$

Для узагальнених розв'язків рівняння (1) доведено теорему, аналогічну класичній теоремі Ліувілля для гармонійних функцій. Узагальнений розв'язок розуміється у сенсі інтегральної тотожності.

У цій роботі використовується методика, яка була запропонована Ю. Мозером у роботі [7]. Ця техніка розвивалася в дослідженнях С. М. Кружкова [4—6], Д. Серріна [8], Н. Трудінгера [9] та інших.

Результати цієї статті анонсовано в [1].

Нехай K_r куб $(x : |x_i| < r,\ i = 1, \ldots, n)$ в n-мірному евклідовому просторі E^n, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. $\mathring{W}_\beta^1(\bar{\mu}, K_r)$, $W_\beta^1(\bar{\mu}, K_r)$ — повні нормовані простори (означення цих просторів див. в [2]).

Розглянемо рівняння (1) в кубі K_{2r}. Припустимо, що функції $A(x, u, \bar{p})$, $B(x, u, \bar{p})$, $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, означені для всіх значень u, $\bar{p}$ і $x \in K_{2r}$, а також, що $A(x, u, u_x)$, $B(x, u, u_x)$ вимірні при довільній функції $u(x) \in W_1^1(K_{2r})$. Нехай для довільних u, $\bar{p}$ і $x \in K_{2r}$ виконуються нерівності

$$A(x, u, \bar{p})\bar{p} \geqslant a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |p_i|^\beta;\ |B(x, u, \bar{p})| \leqslant \sum_{i=1}^n c_i(x) |p_i|^{\beta-1},$$

$$|A(x, u, \bar{p})| \leqslant a_2 \sum_{i=1}^n \mu_i(x) |p_i|^{\beta-1},$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x) |A_i(x, u, \bar{p})|^{\frac{\beta}{\beta-1}} \leqslant a_3 \sum_{i=1}^n \mu_i(x) |p_i|^\beta, \qquad (2)$$

де a_1, a_2, a_3 — додатні константи; $\lambda_i(x) \leqslant \mu_i(x)$; $\lambda_i(x)$, $\mu_i(x)$, $c_i(x)$ — невід'ємні функції; $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(K_{2r})$, $t_i \geqslant 1$; $\mu_i(x)$, [illegible] $(x)\lambda_i^{1-\beta}(x)$ належать просторові $L_s(K_{2r})$, $s \geqslant 1$, причому числа s, t_i, β задовольняють нерівності

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}<\frac{\beta}{n},\quad n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}>\beta>1,\quad t_i^{-1}\leqslant\beta-1; \tag{3}$$

функція $c_i^{\beta}(x)\lambda_i^{1-\beta}(x)$ належить $L_p(K_{2r})$, $p \geqslant 1$ і

$$r^{\theta}\prod_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{K_{2r}}\lambda_i^{-t_i}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{n}}\left(\int\limits_{K_{2r}}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^{\beta}(x)\,\lambda_i^{1-\beta}(x)\right)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon,$$

де
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\leqslant\frac{\beta}{n},\quad \theta=\left(\frac{\beta}{n}-\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)n\geqslant 0,$$

$\varepsilon>0$ достатньо мале.

Зауваження. З доведення роботи [2] ясно, що узагальнений розв'язок у кубі K_{2r} при умовах (2), (3) буде обмеженим у K_r. Для цього інтеграл, що містить функцію $c_i(x)$, слід оцінити, скористувавшись п. 2 леми 1 роботи [3]. Тоді можна вважати, що в (2) $A(x, u, \bar{p})=A(x, \bar{p})$, $B(x, u, \bar{p})=B(x, \bar{p})$. Введемо також число $m>1$ і функцію $H(\rho)$ так як це зроблено у роботах [2, 3].

Лема. Для узагальненого розв'язку $u(x)$ у кубі K_{2r} справедлива оцінка

$$\operatorname{osc}(u, K_{\frac{r}{4}})\leqslant\xi\operatorname{osc}(u, K_r), \tag{4}$$

де $\xi=1-\frac{1}{2}\exp\left(-CH^{\frac{1}{\beta}\frac{m}{m-1}}(r)\right)<1.$

Доведення. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\underset{K_r}{\operatorname{vrai\,max}}(\pm u)=M$. Позначимо через $v(x)$ ту із функцій $1\pm\pm M^{-1}u(x)$, яка не менша одиниці на множині $N\subset K_r$, міра якої не менша $\frac{1}{2}$ $\operatorname{mes} K_r$. Легко бачити, що в кубі K_r функція $v(x)$ є узагальненим розв'язком рівняння (1) за умов (2), (3), причому в (1)—(3) функції A і B слід замінити на

$$\tilde{A}(x, v_x)=M^{1-\beta}(\pm A(x, \pm M v_x));\ \tilde{B}(x, v_x)=M^{1-\beta}(\pm B(x, \pm M v_x)).$$

Відомо [7, 4], що існує послідовність функцій $z_\nu(v)$ така, що $z_\nu(v)\to z(v+\varepsilon)=\max(-\ln(v+\varepsilon), 0)$, $\varepsilon>0$, при $\nu\to\infty$ і $z''_\nu(v)\geqslant\geqslant(z'_\nu(v))^2$. Покажемо, що мають місце такі нерівності:

$$\int\limits_{K_{\frac{r}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\,|z_{\nu x_i}|^{\beta}dx\leqslant Cr^{n-\beta}M(r), \tag{5}$$

і

$$\operatorname{vrai}\max_{K_{\frac{r}{4}}} z_\nu^\beta \leqslant C H^{\frac{1}{m-1}}(r)\left(r^{-n}\int_{K_{\frac{r}{2}}} z_\nu^{k\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{k}}, \tag{6}$$

де $\quad 1 < k \leqslant n\left(n-\beta+\sum_{i=1}^{n} t_i^{-1}\right)^{-1},\ m = k(1-s^{-1}) > 1.$

Припустимо, що оцінки (5), (6) доведено. Тому що $z=0$ на множині N, то із п. I леми I з роботи [3] випливає

$$\left(r^{-n}\int_{K_{\frac{r}{2}}} z^{k\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant CP(r)\,r^{-n+\beta}\int_{K_{\frac{r}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\,|z_{x_i}|^\beta\,dx. \tag{7}$$

Перейдемо до границі в (5), (6) при $\nu\to\infty$ і об'єднаємо одержані нерівності з (7); тоді одержимо

$$\operatorname{vrai}\max_{K_{\frac{r}{4}}} z^\beta \leqslant C H^{\frac{m}{m-1}}(r).$$

Звідси випливає [4, 6] оцінка (4).

Доведемо тепер оцінки (5), (6). Для цього в інтегральну тотожність $\int_{K_{2r}}(\tilde{A}\varphi_x+\tilde{B}\varphi)\,dx=0$ слід підставити функцію

$\varphi(x)=\psi(x)\cdot|z_\nu'(v)-\delta|^{\beta-1}\operatorname{sign} z_\nu'(v)$, де $0\leqslant\psi(x)\in\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\overline{\mu}, K_{2r})$, $\delta>0$, а потім δ спрямувати до нуля; в результаті одержимо

$$\int_{K_{2r}}\left(|z_\nu'(v)|^{\beta-1}\operatorname{sign} z_\nu'(v)\,\tilde{A}(x,v_x)\,\psi_x + |z_\nu'(v)|^{\beta-1}\operatorname{sign} z_\nu'(v)\,\tilde{B}(x,v_x)\,\psi + \right.$$

$$\left. + (\beta-1)\,\psi\,|z_\nu'(v)|^\beta\,\tilde{A}(x,v_x)\,v_x\right)dx \leqslant 0. \tag{8}$$

Підставимо в (8) $\psi(x)=\eta^\beta$, де $\eta=\prod_{i=1}^{n}\eta_{\frac{r}{2},\frac{r}{2}}(|x_i|)$ (означення функції $\eta_{\rho,\sigma}$ див. у [2]). Враховуючи у (8) нерівності (2) для функцій $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ та нерівність Юнга, одержуємо

$$\int_{K_r}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\,|\eta z_{\nu x_i}|^\beta\,dx \leqslant C\left[\int|\eta_x|^\beta\sum_{i=1}^{n}\mu_i^\beta(x)\,\lambda_i^{1-\beta}(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{K_r}\eta^\beta\sum_{i=1}^{n}c_i^\beta\cdot(x)\,\lambda_i^{1-\beta}(x)\,dx\right].$$

Якщо в правій частині цієї нерівності застосувати п. 2 леми I з роботи [3] і врахувати умову (3) та вибір функції η, то одержимо оцінку (5).

Зауважимо, що нерівність (8) лише підсилиться, якщо опустити член, який містить $\tilde{A}(x, v_x)v_x$. В одержану нерівність підставимо функцію $\psi(x) = \alpha^{\beta-1}\eta^{\beta}z_v^{\alpha}$, де $\alpha=\beta(q-1)+1$, $q\geqslant 1$, $\eta=\prod_{i=1}^{n} \eta_{\rho, \delta}(|x_i|)$, $\frac{r}{4}<\rho<\rho+\delta\leqslant\frac{r}{2}$. Метод, за допомогою якого одержано оцінку (6), подібний до відповідної техніки роботи [2] з тою лише різницею, що додаток, який містить функції $c_i(x)$ слід оцінити, скориставшись п. 2 леми I з роботи [3] та умовою (3).

Теорема. $u(x)$ — узагальнений розв'язок у всьому просторі, тобто інтегральна тотожність справедлива у будь-якому кубі K_r. Припустимо також, що

$$1)\ \frac{1}{p}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}=\frac{\beta}{n},\ \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{E^n}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\right)^{\frac{1}{t_i}}\left(\int_{E^n}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^{\beta}(x)\lambda_i^{1-\beta}(x)\right)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

де $\varepsilon>0$ достатньо мале;

2) $\overline{\lim_{\rho\to+\infty}} H(\rho)=\varkappa=\mathrm{const}<\infty$.

Тоді існує таке $\alpha_0=\alpha_0(n, s, t_i, p, \beta, a_1, a_2, \varkappa)\in(0,1)$, що з умови $\operatorname{vrai}\max_{K_r}|u|\leqslant Cr^{\alpha}$ при $r\geqslant R_0$ і $\alpha<\alpha_0$ випливає, що $u=\mathrm{const}$.

Доведення теореми аналогічне відповідному доведенню у $u=\mathrm{const}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Колодий И. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. — ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2, 268—270.

2. Колодій І. М. Оцінка максимума модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.

3. Колодій І. М. Локальна неперервність по Гельдеру узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.

4. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. — «Математический сборник», 1964, т. 65, № 4.

5. Кружков С. Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. — «Математический сборник», 1968, т. 77, № 3.

6. Кружков С. Н. Нелинейные уравнения с частными производными. ч. I. М., 1969.

7. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. — «Comm. Pure Appl. Math». 1960, v. 13, N 3.

8. S e r r i n J. Local behavior of solutions of quasilinear equations. — «Acta Math». 1964, v. 111, N 3, 4.
9. T r u d i n g e r N. Generalized solutions of quasilinear differential inequalities. — «Bull. of Amer. Math. Soc.» 1971, v. 77. N 4.

УДК 517.944:947

Марія Д. МАРТИНЕНКО

РОЗВ'ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ У МНОГОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ З ЩІЛИНАМИ

I. У тривимірному евклідовому просторі розглянемо область D, обмежену скінченим числом замкнених і незамкнених поверхонь типу Ляпунова, які не перетинаються між собою. Через $\Sigma = \bigcup_{k=0}^{n} \Sigma_k$ позначимо скінчену сукупність замкнених поверхонь Σ_k, а через $\delta = \bigcup_{i=1}^{N} \delta_i$ — скінчену сукупність незамкнених поверхонь, кожна з яких обмежена гладкою кривою Γ_i, сукупність яких позначимо через $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$. Припустимо для простоти, що поверхня Σ_0 містить у собі всі поверхні δ_i і $\Sigma_k (i=\overline{1, N},; \kappa=\overline{1, n})$, а останні не містяться одна в одній. Позначимо через D_0 внутрішність поверхні Σ_0, а через D_k — зовнішність поверхні $\Sigma_k (k=\overline{1, n})$, T_i — простір з розрізом $\delta_i (i=\overline{1, N})$. Нехай в області D задана еліптична система диференціальних рівнянь другого порядку варіаційного типу від додатно визначеного функціоналу

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \equiv \sum_{i, j=1}^{3} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + A(x) u(x) = 0, \quad (1)$$

де $A_{ij}(x) = A'_{ji}(x)$, $A(x) = A'(x)$ (штрих означає транспонування). Припустимо, що коефіцієнти $A_{ij}(x)$ задовольняють умову [1]

$$-\sum_{i, j=1}^{3} \tilde{A}_{ij} \nu_i \tau_j = \operatorname{Re}\left\{\left[\int_{+} A_0^{-1}(\beta\nu + \tau)\, d\beta\right]^{-1} \times \int_{+} \beta A_0^{-1}(\beta\nu + \tau)\, d\beta\right\} \sum_{i, j=1}^{3} A_{ij} \nu_i \nu_j, \quad (2)$$

де $2A_{ij}=\tilde{A}_{ij}+\tilde{A}_{ji}$, $\tilde{A}_{ij}=\tilde{A}'_{ji}$, ν і τ — одиничні вектори, $(\tau, \nu)=0$, $\int\limits_{+}(...)d\beta$ означає інтегрування по простому додатно орієнтованому замкненому контурі, що охоплює β — корені рівняння $\det A_0(\beta\nu+\tau)=0$ з додатними уявними частинами, $A_0(\alpha)=$ $=\sum\limits_{i,j=1}^{3} A_{ij}\alpha_i\alpha_j$, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Якщо систему (1) запишемо у вигляді

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\equiv A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)+A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0,$$

де $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — однорідний оператор другого порядку, $A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — оператор, який має всі інші похідні, $x=(x_1, x_2, x_3)$, $u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_p\end{pmatrix}$, то можна припустити, що коефіцієнти оператора $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовні три рази в E_3, коефіцієнти при похідних порядку j ($j=0; 1$) в операторі $A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовні j разів в E_3, причому коефіцієнти оператора $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ будуть порядку $O(F(x))$, похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та їх похідні до другого порядку ростуть не швидше, ніж $F(x)$ при $|x|\to\infty$, де $F(x)$ — така додатна в E_3 функція, що

$$\iiint\limits_{\infty}\frac{dx}{F(x)}<\infty \quad \text{і} \quad \frac{|\det(A_0(x, 2\pi i\alpha)-\lambda^2 I)|}{[F(x)]^p|\alpha|^{2p}+\lambda^{2p}}\geqslant\mu>0$$

для кожної точки $x\in E_3$ і для кожної дійсної точки $(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\neq 0$, λ — достатньо велике додатне число.

У цьому випадку існує як класична фундаментальна матриця системи (1) у всьому просторі, яку позначимо через $\omega(x, y)$, так і фундаментальна матриця системи (1) у рімановому просторі з гладкою лінією розгалуження, і у кожній з областей $D_0, D_1, \ldots, D_n, T_1, \ldots, T_N$ існує матриця Гріна, яка має тільки точкову особливість. Існування матриці Гріна для областей D_k, T_i ($k=\overline{0, n}$; $i=\overline{1, N}$) випливає із існування розв'язку задачі Діріхле для областей [1, 3].

2. Має місце наступна теорема.

Теорема. Будь-який розв'язок системи (1) неперервний і обмежений в області D і на її межі, перші похідні якого в околі лінії $\Gamma_i (i=\overline{1, N})$ ведуть себе як $O\left(\frac{1}{R_i^\alpha}\right)$ $(0 \leqslant \alpha < 1$, R_i — відстань до $\Gamma_i)$, зображується єдиним способом у вигляді суми розв'язків цієї системи в однозв'язних областях $D_0, D_1, \ldots, D_n, T_1, \ldots, T_N$, причому в необмежених областях $D_1, \ldots, D_n, T_1, \ldots, T_N$ відповідні розв'язки системи (1) є регулярними на безмежності.

Для доведення теореми відзначимо передусім, що такий розклад розв'язку системи (1) випливає негайно з інтегрального зображення розв'язків системи (1) у D через узагальнені потенціали простого та подвійного шару, ядра яких внаслідок умови (2) мають у розглядуваному випадку тільки точкову особливість

$$u(x)=\sum_{k=0}^{n}\iint_{\Sigma_k}\left\{\omega'(x, y)\, B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y)-\right.$$

$$\left.-\left[u'(y)\, B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(x, y)\right]'\right\} d_y S+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\iint_{\sigma_i}\left\{\omega'(x, y)\, B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y)-\right.$$

$$\left.-\left[u'(y)\, B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(x, y)\right]'\right\} d_y S, \tag{3}$$

де $$B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)=-2\left[\sum_{i, j=1}^{3} \tilde{A}_{ij}(y)\, \nu_i(y) \frac{\partial}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{3} A_i'(y)\, \nu_i(y)\right], \tag{4}$$

$\nu(y)=(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — орт внутрішньої нормалі до $S=\Sigma \cup \delta$, причому тут і далі інтегрування по незамкнених поверхнях δ_i розуміється як інтегрування по двосторонній поверхні, тобто
$$\iint_{\sigma_i} f(y)\, d_y S=\iint_{\sigma_i^+} f(y)\, d_y S=\iint_{\sigma_i^-} f(y)\, d_y S.$$

Таким чином,

$$u(x)=\sum_{k=0}^{n} V_k(x)+\sum_{i=1}^{N} W_i(x), \tag{5}$$

де $$V_k(x)=\iint_{\Sigma_k}\left\{\omega'(x, y)\, B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y)-\right.$$

$$\left.-\left[u'(y)\, B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(x, y)\right]'\right\} d_y S B(k=\overline{0, n}) \tag{6}$$

та

$$W_i(x) = \iint\limits_{\sigma_i} \left\{ \omega'(x, y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) - \right.$$

$$\left. - \left[u'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(x, y) \right]' \right\} d_y S \quad (i = \overline{1, N})$$

є відповідно розв'язки системи (1) в D_k і T_i $(k=\overline{0, n},\ i=\overline{1, N})$.

Єдиність стверджуваного в теоремі зображення розв'язку системи (1) доведемо від супротивного. Припустимо існування двох зображень одного і того ж розв'язку $u(x)$ системи (1):

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} V_k^{(1)}(x) + \sum_{i=1}^{N} W_i^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} V_k^{(2)}(x) + \sum_{i=1}^{N} W_i^{(2)}(x),$$

де $V_k^{(j)}(x)$, $W_i^{(j)}(x)$ $(j=1;\ 2)$ — розв'язки системи (1) в D_k і T_i відповідно $(k=\overline{0, n};\ i=\overline{1, N}$. Тоді, прийнявши $V_k^{(1)} - V_k^{(2)} = \overline{V}_k$, $W_i^{(1)} - W_i^{(2)} = \overline{W}_i$, одержимо в D таку рівність $\sum\limits_{k=0}^{n} \overline{V}_k(x) + \sum\limits_{i=1}^{N} \overline{W}_i(x) = 0$, яку можна зобразити у вигляді

$$\overline{V}_0(x) = -\sum_{k=1}^{n} \overline{V}_k(x) - \sum_{i=1}^{N} \overline{W}_i(x). \qquad (7)$$

З цієї рівності випливає, що вектор-функція $\overline{V}_0(x)$, визначена раніше як розв'язок системи (1) в D_0, виявляється регулярним розв'язком (1) у всьому просторі, оскільки $\overline{V}_k(x)$, $\overline{W}_i(x)$ $(k=\overline{1, n};\ i=\overline{1, N})$ визначені зовні D_0.

Скористаємося тепер наступною теоремою Ліувілля, доведеною Д. П. Мельник [2]:

Якщо $2s$ раз неперервно диференційований розв'язок еліптичної системи, що задовольняє умовам теореми існування (класичної) фундаментальної матриці, буде порядку $O(|x|^k)$ при $|x| \to \infty$, то він є тотожним нулем (тут k — будь-яке ціле число).

Оскільки система (1) і $\overline{V}_k(x)$, $\overline{W}_i(x)$ $(k=\overline{1, n},\ i=\overline{1, N})$ задовольняють умови цієї теореми, то із того, що $\overline{V}_0(x)$ є регулярним розв'язком системи (1) у всьому тривимірному просторі, випливає його тотожна рівність нулеві $\overline{V}_0(x) \equiv 0$.

Зовсім аналогічно доводиться, що $\overline{V}_k(x) \equiv 0$ $(k=\overline{1, n})$ і $\overline{W}_i(x) \equiv 0$ $(i=\overline{1, N})$.

Таким чином, $V_k^{(1)}(x) \equiv V_k^{(2)}(x)$ $(k=\overline{0, n})$, $W_i^{(1)}(x) \equiv W_i^{(2)}(x)$ $(i=\overline{1, N})$.

3. Доведена теорема обгрунтовує наступний метод розв'язування задачі Діріхле для системи (1) в області D. Позначимо

через $f_k(x)$ і $\varphi_i^{\pm}(x)$ шуканий розв'язок системи (1) відповідно на поверхнях Σ_k і $\sigma_i^{\pm}$, причому $\varphi_i^{+}|_{\Gamma_i}=\varphi_i^{-}|_{\Gamma_i}$, а через $G_k(x, y)$ і $G_i^*(x, y)$ — матриці Гріна системи (1) відповідно для областей D_k $(k=\overline{0, n})$ і T_i $(i=\overline{1, N})$. Зобразимо розв'язок задачі

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0 \quad (x \in D), \tag{8}$$

$$u(x)|_{\Sigma_k}=f_k(x), \quad u(x)|_{\sigma_i^{\pm}}=\varphi_i^{\pm}(x), \tag{9}$$

у вигляді *

$$u(x)=\sum_{k=0}^{n}\iint\limits_{\Sigma_k} u_k(y)\,B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x, y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\iint\limits_{\sigma_i} v_i(y)\,B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x, y)\,d_yS, \tag{10}$$

де $B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ визначено формулою (4), причому інтегрування по незамкнених поверхнях σ_i розуміється як інтегрування по двосторонній поверхні; $u_k(y)$, $v_i(y)$ — невідомі густини, для визначення яких одержимо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$u_l(x)+\sum_{k\neq l=0}^{n}\iint\limits_{\Sigma_k} u_k(y)\,B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x, y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\iint\limits_{\sigma_i} v_i(y)\,B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x, y)\,d_yS=f_l(x) \quad (l=\overline{0, n}), \tag{11}$$

$$v_j(x)+\sum_{k=0}^{n}\iint\limits_{\Sigma_k} u_k(y)\,B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x, y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{i\neq j=1}^{N}\iint\limits_{\sigma_i} v_i(y)\,B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x, y)\,d_yS=\varphi_j(x) \quad (j=\overline{1, N}).$$

Отримана система регулярних інтегральних рівнянь (11) може бути розв'язана за першою теоремою Фредгольма. Для доведення цього розглянемо відповідну однорідну систему і позначимо через $u_k^0(x)$ і $v_i^0(x)$ її розв'язок

---

* У цьому запису $v_i(x)$ означає вектор-функцію, яка збігається на σ_i^+ з $v_i^+(x)$, а на σ_i^- з $v_i^-(x)$.

$$u_l^0(x)+\sum_{k\neq l=0}^{n}\iint_{\Sigma_k} u_k^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x,y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\iint_{\sigma_i} v_i^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x,y)\,d_yS=0, \tag{12}$$

$$v_j^0(x)+\sum_{k=0}^{n}\iint_{\Sigma_k} u_k^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x,y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{i\neq j=1}^{N}\iint_{\sigma_i} v_i^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x,y)\,d_yS=0.$$

Нехай $V_k^0(x)$, $W_i^0(x)$ — розв'язки системи (1) в областях D_k і T_i відповідно, які приймають на Σ_k і σ_i відповідно значення $u_k^0(x)$ і $v_i^0(x)$, тобто

$$V_k^0(x)=\iint_{\Sigma_k} u_k^0(x)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x,y)\,d_yS,$$

$$W_i^0(x)=\iint_{\sigma_i} v_i^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x,y)\,d_yS. \tag{13}$$

Тоді вектор-функція

$$u^0(x)=\sum_{k=0}^{n}\iint_{\Sigma_k} u_k^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_k(x,y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\iint_{\sigma_i} v_i^0(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_i^*(x,y)\,d_yS\equiv\sum_{k=0}^{n}V_k^0(x)+\sum_{i=1}^{N}W_i^0(x)$$

є розв'язком системи (1) в області D, який набуває внаслідок (12) на її межі нульового значення і тому дорівнює тотожно нулеві скрізь у D

$$u^0(x)\equiv\sum_{k=0}^{n}V_k^0(x)+\sum_{i=1}^{N}W_i^0(x)\equiv 0. \tag{14}$$

Звідси, міркуючи так, як і при доведенні єдиності зображення розв'язку системи (1) у вищенаведеній теоремі, одержуємо

$$V_k^0(x)\equiv 0\ \ (x\in D_k),\quad W_i^0(x)\equiv 0\ \ (x\in T_i). \tag{15}$$

Оскільки $u_k^0(x)$ і $v_i^0(x)$ є значення $V_k^0(x)$ і $W_i^0(x)$ відповідно на поверхнях Σ_k і σ_i, то з (15) маємо $u_k^0(x)=0$, $v_i^0(x)=0$, тобто система (12) має тільки нульовий розв'язок, а тому система (11) має єдиний розв'язок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Волошина М. С. Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. — ДАН УРСР, 1958, № 10.

2. Мельник Д. П. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. — ДАН УРСР, 1958, № 6.

3. Марія Мартиненко. Деякі крайові задачі для еліптичних систем. — ДАН УРСР, 1968, серія А, № 8.

УДК 517.946

С. П. ЛАВРЕНЮК

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ МЕТАГАРМОНІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Приймемо такі позначення: E^3 — евклідовий простір; $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$ — точки цього простору;, $T\subset E^3$ — скінчена однозв'язна область з поверхнею S, r_{xy} — евклідова відстань між точками x і y.

Під зовнішнім метагармонійним потенціалом простого шару з одиничною густиною розумітимемо функцію

$$v(x; S) = \int\limits_S \frac{e^{-ar_{xy}}}{r_{xy}} d_y s, \quad x \in C\overline{T},$$

де $a=\text{const}>0$, $C\overline{T}=E^3\diagdown\overline{T}$.

Припустимо, що область T з поверхнею S лежить всередині сфери Σ_R з центром у точці O радіуса $R<1$. Нехай на деякій частині Ω_1 одиничної сфери Σ_1 з центром у точці O відомий метагармонійний потенціал простого шару $v(x; S)$, індукований поверхнею S. Потрібно за значеннями функції $v(x; S)$ на Ω_1 визначити поверхню S.

Розглянемо стійкість поставленої задачі. Для простоти обмежимося випадком, коли Ω_1 визначається нерівністю

$$|x_1| \geqslant A; \ |A| < 1.$$

Нехай області T_j з поверхнею $S_j (j=1,2)$ є зірковими відносно точки O і лежать всередині сфери Σ_R. Позначимо через S^e, S^i відповідно границі областей $T^e=T_1\cup T_2$, $T^i=T_1\cap T_2$. Нехай рівняння поверхонь S_j, S^e і S^i у сферичній системі координат ρ, φ, θ з центром у точці O мають вигляд

$$\rho = f_j(\varphi, \theta),\ \rho = f^e(\varphi, \theta),\ \rho = f^i(\varphi, \theta),\ (j = 1, 2). \tag{1}$$

Теорема. Нехай функції $f_j(\varphi, \theta)$ $(j=1,2)$ належать класу $H(2, B, \alpha)$ [1] і існує нерівність

$$|v(x; S_1) - v(x; S_2)| \leqslant \varepsilon,\ x \in \Omega_1. \tag{2}$$

Тоді справедлива оцінка

$$\operatorname{mes} S^e - \operatorname{mes} S^i \leqslant \frac{C_1}{n}, \tag{3}$$

де число n визначається зі співвідношень

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \leqslant C_2 |\ln \varepsilon|^{-C_3} \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{4}$$

а додатні сталі C_1, C_2, C_3 залежать від величин A, B, R. Наведемо допоміжну лему.

Лема. Якщо $f_j(\varphi, \theta) \in H(2, B, \alpha)$ і існує нерівність (2), то справедлива оцінка

$$|v(x)| + |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant C_4 |\ln \varepsilon|^{-C_5},\ x \in S^e, \tag{5}$$

де $v(x) = v(x; S_1) - v(x; S_2)$, а додатні сталі C_4, C_5 визначаются величинами A, B, R.

Перейдемо до доведення теореми. Позначимо через $S^e_{(h)}$ замкнену поверхню, що визначається рівнянням

$$\rho = f^e(\varphi, \theta) + h.$$

Нехай

$$S^{e+} = S^e \cap S_1,\ S^{e-} = S^e \setminus S^{e+},\ S^{i+} = S^i \cap S_2,\ S^{i-} = S^i \setminus S^{i+}.$$

Проведемо у точках перетину поверхонь S_1 і S_2 сфери радіуса t. Частини поверхонь S^{e+}, S^{e-}, які лежать всередині вказаних сфер, позначимо відповідно через S^{+e}_t, S^{+e}_t. Нехай далі

$$S^{e+}_t = S^{e+} \setminus S^{+e}_t,\ S^{e-}_t = S^{e-} \setminus S^{-e}_t,$$

$$S^{e+}_{t_1 t_2} = S^{+e}_{t_1} \setminus S^{+e}_{t_2},\ S^{e-}_{t_1 t_2} = S^{-e}_{t_1} \setminus S^{-e}_{t_2}\ (t_1 > t_2).$$

Частини поверхонь $S^e_{(h)}$, S^i, яким відповідають промені з точки O, що перетинають поверхні S^{e+}_t, S^{e-}_t, позначимо відповідно через $S^{e+}_{(h)t}$, $S^{e-}_{(h)t}$ і S^{i+}_t, S^{i-}_t. Крім того, нехай

$$S^{+i}_t = S^{i+} \setminus S^{i+}_t,\ S^{-i}_t = S^{i-} \setminus S^{i-}_t.$$

Через S_0 позначимо просту замкнену кусково-гладку поверхню, відстань від якої до поверхонь $S^{+e}_{t_2}$, $S^{-e}_{t_2}$ не менше числа $t_1 - t_2$ і таку, що $S^{e+}_{(h)t_1}$, $S^{e-}_{(h)t_1} \subset S_0$.

Нехай функція $u(x)$ задовольняє рівняння

$$\Delta u - a^2 u = 0 \tag{6}$$

в області T^e і має неперервні перші похідні на S^e. Тоді, як і для гармонійних функцій, маємо

$$\int_{S_1} u(x)\,ds - \int_{S_2} u(x)\,ds = \frac{1}{4\pi} \int_{S^e} \left[v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds. \tag{7}$$

Припустимо, що функція $u(x)$ є розв'язком рівняння (6) і набуває на S_0 такі крайові значення:

$$u(x) = 1, \; x \in S^{e+}_{(h)\frac{\delta}{2}}, \; u(x) = 0, \; x \in S_0 \setminus S^{e+}_{(h)\frac{\delta}{2}}. \tag{8}$$

Використовуючи внутрішні апріорні оцінки Шаудера [3] і умови теореми, праву частину в формулі (7) можна оцінити так:

$$\left| \int_{S^e} \left[v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds \right| \leqslant \frac{C_6}{h} |\ln \varepsilon|^{-C_5}. \tag{9}$$

Стала C_6 залежить від величин A, B, R.

Зобразимо ліву частину формули (7) як суму трьох виразів I_1, I_2, I_3 і оцінимо кожний з них.

$$I_1 = \int_{S^{e+}_{\delta}} u(x)\,ds - \int_{S^{ei+}_{\delta}} u(x)\,ds - \int_{S^{i+}_{h}} u(x)\,ds + \int_{S^{i-}_{h}} u(x)\,ds.$$

Беручи до уваги апріорні оцінки Шаудера [3] в областях, які містяться відповідно між поверхнями $S^{e+}_{(h)\delta}$, S^{e+}_{δ} і $S^{e-}_{(h)\delta}$, S^{e-}_{δ} і радіальними прямими, що їх обмежують, справедлива нерівність

$$|\operatorname{grad} u(x)| \leqslant \frac{C_7}{\delta}, \tag{10}$$

де стала C_7 залежить від величини B.

Використовуючи формулу скінчених приростів, а також (8) і (10), одержуємо

$$u(x) \geqslant 1 - \frac{C_7}{\delta} h, \; x \in S^{e+}_{\delta}, \; u(x) \leqslant \frac{C_7}{\delta} h, \; x \in S^{e-}_{\delta}. \tag{11}$$

З огляду на оцінки (11) маємо

$$I_1 \geqslant \operatorname{mes} S^{e+}_{\delta} - \operatorname{mes} S^{i+}_{h} - C_8 \frac{h}{\delta}. \tag{12}$$

Розглянемо

$$I_2 = \int_{S^{e+}_{h\delta}} u(x)\,ds - \int_{S^{e-}_{h\delta}} u(x)\,ds.$$

Використовуючи лему з [2] можна показати, що для довільних n знайдуться такі h і δ, що

$$|I_2| \leqslant \frac{C_9}{n}, \tag{13}$$

де стала C_9 залежить від величин R, B.

Розглянемо нарешті

$$I_3 = \int\limits_{S_h^{+e}} u(x)\,ds - \int\limits_{S_h^{-e}} u(x)\,ds - \int\limits_{S_h^{+i}} u(x)\,ds + \int\limits_{S_h^{-i}} u(x)\,ds.$$

З визначення поверхонь S_0, S^e, (8) і апріорних оцінок Шаудера [3] одержуємо, що у точках поверхонь S_h^{+e}, S_h^{-e}, S_h^{+i}, S_h^{-i} існує нерівність

$$|\operatorname{grad} u(x)| \leqslant \frac{C_{10}}{\delta}. \tag{14}$$

Позначимо через Π множину тих кутів φ, θ, які визначають промені, що перетинають поверхні S_h^{+e}, S_h^{-e}. Тоді з огляду на умови теореми і визначення поверхонь S_n^{+e}, S_h^{-e}, S_h^{+i}, S_h^{-i} маємо

$$|f^e(\varphi,\theta) - f^i(\varphi,\theta)| \leqslant C_{11} h, \ (\varphi,\theta) \in \Pi. \tag{15}$$

Стала C_{11} залежить від величин B, R.
Тоді, враховуючи оцінку з [3] і нерівності (14), (15), легко одержати нерівність

$$|I_3| \leqslant C_{12} \frac{\delta\sqrt{h} + h}{\delta}, \tag{16}$$

де стала C_{12} залежить від величин B, R.

Підставляючи (9), (12), (13), (15) в (7), одержуємо

$$\operatorname{mes} S^{e+} - \operatorname{mes} S^{i+} \leqslant \frac{C_9}{n} + C_{13}\left(\sqrt{h} + \frac{h}{\delta}\right) + \frac{C_6}{h}|\ln\varepsilon|^{-C_5}. \tag{17}$$

Приймемо $h = t^{k+1}$, $\delta = t^k$, $t = \frac{1}{n}$, $\left(t \leqslant \frac{1}{4}\right)$, де $1 \leqslant k < n$, а n виберемо так, щоб задовольнялись співвідношення (4). Тоді з (17) одержимо оцінку

$$\operatorname{mes} S^{e+} - \operatorname{mes} S^{i+} \leqslant \frac{C_{14}}{n}.$$

Аналогічно одержуємо оцінку для різниці $\operatorname{mes} S^{e-} - \operatorname{mes} S^{i-}$. Цим теорема доведена.

Наслідок. Якщо виконуються умови теореми і, крім того, поверхні $S_j\,(j=1,2)$ опуклі, то справедлива оцінка

$$|f_1(\varphi, \theta) - f_1(\varphi, \theta)| \leqslant \frac{C_{15}}{\sqrt[3]{n}},$$

де число n визначається зі співвідношень (4), а стала C_{15} залежить від величин A, B, R.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
2. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.
4. Прилепко А. И. Об устойчивости и единственности решения обратных задач обобщенных потенциалов простого слоя. — «Сибирский математический журнал», 1971, т. 12, № 4.

УДК 517.94

Б. Я. КОЛОДІЙ, Й. Г. ШІПКА

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглядається задача Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \int_a^b K(x, y) f(y, t, \varphi(y, t), \varphi'(y, t))\, dy, \qquad (1)$$

$$\varphi(x, 0) = 0, \qquad (2)$$

де ядро $K(x, y)$ — симетричне і інтегроване з квадратом; $f(x, t, \varphi, \varphi')$ — неперервна функція по всіх аргументах і задовольняє умову Ліпшиця по φ і φ'.

Нехай $\{\lambda_k\}$ — система власних значень і $\{\varphi_k(x)\}$ — повна ортонормована система власних функцій ядра $K(x, y)$.

Справедлива **теорема:** якщо ядро $K(x, y)$ і функція $f(x, t, \varphi, \varphi')$ задовольняють названі умови, то інтегро-диференціальне рівняння (1) має розв'язок $\varphi(x, t)$, що задовольняє початкову умову (2) і записується

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) z_i(t). \qquad (3)$$

Функції $z_i(t)$ задовольняють нескінченну систему рівнянь

$$\frac{dz_i}{dt} = \Phi_i(z_0, z_1, \ldots, z_1', z_2', \ldots), \qquad z_i(0) = 0, \qquad (4)$$

де

$$\Phi_1(z_0, z_1, \ldots, z_1', z_2', \ldots) = \frac{1}{\lambda_i}\int\limits_a^b f\left(y, t, \sum_{k=1}^{\infty} z_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} z_k' \varphi_k\right)\varphi_i(y)\,dy.$$

При цьому повинна виконуватись умова

$$\int\limits_a^b \left[f\left(y, t, \sum_{k=1}^{\infty} z_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} z_k' \varphi_k\right)\right]^2 dy \leqslant B^2.$$

Доведення. Припускаємо, що всі власні значення впорядковані таким чином:

$$0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots$$

Для доведення існування розв'язку системи використовуємо метод стиснутих відображень

$$|\Phi_i(z) - \Phi_i(\overline{z})| \leqslant \frac{A\rho(z, \overline{z})}{|\lambda_i|},$$

де A — константа Ліпшиця для функції f;

$$\rho(z, \overline{z}) \leqslant AK\rho(z, \overline{z})(t+1),$$

де

$$K = \int\limits_a^b |K(x, x)|\,dx.$$

Отже, при $O < t < \dfrac{1-AK}{AK}$ система (4) матиме єдиний розв'язок. Позначимо

$$D = \left\{a \leqslant x \leqslant b,\ 0 < t < \frac{1-AK}{AK}\right\}.$$

Для доведення збіжності ряду (3) припустимо спочатку, що ядро $K(x, y)$ має тільки скінченне число власних значень. Тоді

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\varphi_k(y) \cdot \frac{1}{\lambda_k}.$$

Функція

$$\varphi_m(x, t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x) z_i(t)$$

є розв'язком задачі (1—2).

Тепер припускаємо, що ядро $K(x, y)$ має нескінченну кількість власних значень. Покажемо, що

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\, z_i(t) = \varphi(x,t) \qquad (5)$$

існує і що

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\frac{dz_i(t)}{dt} = \lim_{m\to\infty}\frac{d\varphi_m}{dt}. \qquad (6)$$

Застосувавши до системи (4) нерівність Бесселя, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 [z_i'(t)]^2 \leqslant \int_a^b \left[f\left(y, t, \sum_{k=1}^{\infty} z_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} z_k' \varphi_k\right)\right]^2 dy < B^2.$$

Звідси, зважаючи на нерівність Коші,

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |\varphi_i(x)\, z_i(t)| \leqslant \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \varphi_i^2(x)\frac{1}{\lambda_i^2}\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i^2 [z_i'(t)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant BM,$$

де M^2 — точна верхня грань виразу в дужках при $a \leqslant x$, $y \leqslant b$.

Отже, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\, z_i'(t)$$

є рівномірно збіжний і може бути почленно інтегрований по t.

Таким чином, існування $\varphi(x, t)$ і рівності (5), (6) доведені.

Розклавши ядро $K(x, y)$ в ряд, можна легко показати, що $\varphi(x, t)$ є розв'язком рівняння (1).

Доведемо єдиність розв'язку.

Припустимо, що існують два розв'язки задачі (1)—(2): $\varphi(x, t)$ і $\bar{\varphi}(x,t)$.

Використовуючи умови, які задовольняє функція f і метод індукції, одержуємо

$$|\varphi(x,t) - \bar{\varphi}(x,t)| \leqslant A^n G K^n \frac{t^n}{n!},$$

де

$$G = G_1 + G_2; \quad G_1 = \sup_D |\varphi(x,t) - \bar{\varphi}(x,t)|;$$

$$G_2 = \sup_D |\varphi'(x,t) - \bar{\varphi}'(x,t)|.$$

Спрямувавши n до нескінченності, маємо $\varphi(x,t) \equiv \bar{\varphi}(x,t)$. Єдиність доведена.

Окремі випадки рівняння (1) розглядались у роботах [1, 2].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Melvin L. Heard. On a non-linear integrodifferential equation. — «Journal of mathematical analysis and applications», 1969, 26.

2. Shin-Hsun Chang. A class of integrodifferential. — «American journal mathematic». 1949, 71.

УДК 512.4

О. Л. ГОРБАЧУК, М. Я. КОМАРНИЦЬКИЙ

ПРО S-КРУЧЕННЯ В МОДУЛЯХ

У цій статті досліджується питання про розщеплюваність всіх S-кручень над кільцем, в якому кожний правий ідеал двосторонній. Кожне кільце, яке ми будемо розглядати, припускається асоціативним кільцем з одиницею, а кожний модуль правим і унітарним. Через $\mathfrak{M}_A$ позначатимемо категорію правих модулів над кільцем A. Якщо σ кручення в категорії $\mathfrak{M}_A$, то через $E\sigma$ позначаємо радикальний фільтр правих ідеалів кільця A, який відповідає крученню σ. Нагадаємо, що кручення σ розщеплюється, коли для кожного правого A-модуля M його підмодуль $\sigma(M)$ виділяється прямим додатком. Якщо $\sigma(M)=M$, або $\sigma(M)=0$ для кожного $M\in\mathfrak{M}_A$, то кручення σ називається тривіальним. Кручення, радикальний фільтр якого володіє найменшим ідеалом, називається радикально-напівпростим.

Всі означення, зв'язані з крученням, можна знайти у роботах [5, 6].

Нехай φ: $A_1\to A_2$ накладення кілець (тобто гомоморфізм на) і в категорії $\mathfrak{M}_{A_1}$ задано кручення σ, якому відповідає радикальний фільтр E_1. У роботі [2] показано, що $\varphi(E_1)=\{\varphi(I)\,|\,I\in E_1\}$ радикальний фільтр кільця A_2 і, якщо σ розщеплюється, то кручення $\varphi(\sigma)$, яке відповідає фільтрові $\varphi(E_1)$, також розщеплюється.

Нехай S — правий ідеал кільця A і система правих ідеалів $E_S=\{T\,|\,T$ — правий ідеал; $S+T=A\}$ є радикальним фільтром кільця A. Тоді радикальний фільтр E_S називається радикальним S-фільтром кільця A, а кручення σ_S, яке відповідає радикальному S-фільтрові E_S, називається S-крученням.

Лема 1. Нехай A кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній. Тоді кожний ідеал кільця A визначає S-кручення в категорії $\mathfrak{M}_A$.

Доведення. Нехай S ідеал кільця A і E_S сукупність таких правих ідеалів T кільця A, що $S+T=A$. Перевіримо, що E_S задовольняє умови G.1—G.3 із [5]. Умова G.1 виконується очевидним чином, а умова G.2 випливає із включення $I\subseteq(I:a)$, де $I\in E_S$, $a\in A$. Нехай $I\subseteq J$, $J\in E_S$ і $(I:j)\in E_S$ для кожного $j\in J$, де I, J — ідеали кільця A. Тоді $S+J=A$, тобто існують такі елементи $s\in S$, $j\in J$, що $s+j=1$. За припущенням $(I:j)\in E_S$. Отже, $S+(J:j)=A$, тобто $s_1+j_1=1$ для деяких $s_1\in S$, $j_1\in(J:j)$. Тепер $1=(s+j)(s_1+j_1)=s'+jj_1$, де $s'=ss_1+js_1+sj_1\in S$. Умова $j_1\in(J:j)$ показує, що $jj_1\in J$. Таким чином, $S+J=A$, або $J\in E_S$. Ми показали, що умова G.3 також виконується, отже, E_S є радикальним фільтром. Лема доведена.

Зауваження 1. Нехай σ_S S-кручення визначене ідеалом S кільця A. Тоді $\sigma_S(A)\subseteq S$. Справді, якщо $r\in\sigma_S(A)$, то $rT=0$ для деякого $T\in E_S$. Умова $S+T=A$ показує, що існують такі

$s \in S$, $t \in T$, що $s+t=1$. Тоді $r=rs+rt=rs \in S$ (тому що S — двосторонній ідеал).

Лема 2. Нехай A — кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній, I — ідеал кільця A і $\varphi : A \to B = A/I$ канонічний гомоморфізм. Якщо E_2 радикальний S_2-фільтр кільця B, визначений ідеалом S_2, то існує такий радикальний S_1-фільтр кільця A, що $\varphi(E_1) = E_2$.

Доведення. Нехай $S_1 = \varphi^{-1}(S_2)$ — повний прообраз ідеала S_2 відносно гомоморфізму φ. Позначимо через E_1 радикальний S_1-фільтр, визначений ідеалом S_1, існування якого забезпечується лемою 1. Безпосередня перевірка показує, що $\varphi(E_1) = E_2$. Лема доведена.

Сформулюємо теорему 3′, яка є узагальненням теореми 3 із роботи [3], доведення якої зберігається; треба лише до умов а), б), в) і г) додати ще умову д): $\Lambda\lambda_\beta \subseteq \lambda_\beta\Lambda$, а елементи p_α зафіксувати і вважати рівними λ_α для кожного $\alpha < \Omega$ (див. [3], с. 686—687, або [1] с. 83).

Теорема 3′. Нехай σ не радикально-напівпросте кручення і для кожного $I \in E\sigma$ існує $\lambda_I \in I$ такий, що $r(\lambda_I) = 0$, $A\lambda_I \subseteq \subseteq \lambda_I A \in E\sigma$. Тоді кручення σ не розщеплюється.

Нагадаємо, що кільце A називається регулярним в сенсі Неймана, якщо для кожного елемента $a \in A$ існує такий елемент $x \in A$, що $axa = a$.

Теорема 1. Нехай A кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній і $J(A)$ його радикал Джекобсона. Якщо над кільцем A всі S-кручення розщеплюються, то кільце $B = A/J(A)$ є регулярним в сенсі Неймана.

Доведення. Нехай $\varphi : A \to B$ канонічний гомоморфізм. За лемою 1 кожний правий ідеал S_2-кільця B визначає S_2-кручення в $\mathfrak{M}_B$, а згідно з лемою 2 існує S_1-фільтр E_1 кільця A такий, що $\varphi(E_1) = E_2$. Тому що за умовою теореми кручення, яке відповідає фільтрові E_1, розщеплюється, то кручення, яке відповідає фільтрові E_2, також розщеплюється. Отже, над кільцем B всі S-кручення розщеплюються. Нехай $b \neq 0$ необоротний справа елемент кільця B, $S = bB$ і E_S радикальний S-фільтр кільця B, визначений ідеалом S.

Розглянемо три можливих випадки:

а) σ_S радикально-напівпросте кручення в $\mathfrak{M}_B$. Тоді в E_S міститься найменший ідеал T. Тому що кожний максимальний правий ідеал кільця B, який не містить ідеала S, належить до E_S, то кожний такий максимальний ідеал містить ідеал T. Таким чином, $S \cap T \subseteq J(B) = 0$, тобто $S \oplus T = bB \oplus T = A$ (кільцева пряма сума).

б) $\sigma_S(B) = 0$ і σ_S не радикально-напівпросте. Покажемо, що σ_S задовольняє умови теореми 3′. Нехай $T \in E_S$, тоді $S+T=B$, тобто $s+t=1$ для деяких $s \in S$, $t \in T$. Оскільки із $xt=0$ випливає $x(tB) = 0$, або, що те саме, $x \in \sigma_S(B) = 0$, то лівий анулятор $l(t)$ елемента t нульовий. Нехай $ta=0$. Позначимо через S_x ідеал $(1-ax)B$, де $x \in B$ довільний, а через E_x радикальний

S_x-фільтр, визначений ідеалом S_x. Нехай σ_x кручення, яке відповідає фільтрові E_x. Тоді $B=\sigma_x(B)\oplus K_x$, де K_x деякий ідеал кільця B. Цей розклад показує, що $r+k=1$ для деяких $r\in\in\sigma_x(B)$, $k\in K_x$. Тому що $t\in\sigma_x(B)$, то $t=rt+kt=rt$, тобто $(r-1)t=0$. Із умови $l(t)=0$ випливає, що $r=1$. Але $r\in\sigma_x(B)$, і згідно зауваження 1 $r=(1-ax)z$, $z\in B$. Це означає, що $(1-ax)$ оборотний справа для кожного $x\in B$. Таким чином, $a\in J(B)=0$. Отже, $r(t)=0$. Решта умов теореми $3'$ очевидна. За теоремою $3'$ кручення σ_S не розщеплюється, а це суперечить припущенням доводжуваної теореми. Отже, випадок б) не можливий.

в) $\sigma_S(B)=0$, σ_S не радикально-напівпросте. Цей випадок зводиться до випадку б) за допомогою канонічного гомоморфізму $\psi: B\to B/\sigma_S(B)$.

Ми показали, що кожний головний правий ідеал кільця B виділяється прямим доданком, а це означає, що B регулярне в сенсі Неймана кільце ([4] с. 111). Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай A регулярне в сенсі Неймана кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній. Тоді, якщо над кільцем A всі S-кручення розщеплюються, то A є прямою сумою скінченного числа тіл.

Доведення. Нехай S — довільний ідеал кільця A. За лемою 1 S визначає S-кручення σ_S. Із умов теореми випливає, що S-кручення σ_S розщеплюється, а тому $\sigma_S(A)\oplus K=A$. Покажемо, що $\sigma_S(A)=S$. Включення $\sigma_S(A)\subseteq S$ має місце завдяки зауваженню 1. Навпаки, якщо $s\in S$, то з регулярності кільця A випливає, що $sA\oplus K_S=A$, де $K_S\in E_S$. Оскільки $sK_S\subseteq sA\cap K_S=0$, то $s\in\sigma_S(A)$. Отже, $\sigma_S(A)\supseteq S$. Ми показали, що кожний правий ідеал кільця A виділяється прямим доданком. Тепер із умов теореми і з ([4] с. 108 Пропозиція 6) випливає, що A є прямою сумою скінченного числа тіл. Теорема доведена.

Наслідок. Нехай A кільце, в якому кожний правий ідеал двосторонній. Якщо над кільцем A всі S-кручення розщеплюються, то кільце $B=A/J(A)$ є прямою сумою скінченного числа тіл.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Горбачук Е. Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. — «Математические исследования», 1972, VII: 2 (24).
2. Горбачук Е. Л. Радикалы в модулях над разными кольцами. — «Математические исследования», 1972, VII: I (23).
3. Горбачук Е. Л., Расщепляемость кручения и предкручения в категории Λ-модулей. — «Математические заметки», 1967, 2, № 6.
4. Ламбек И. Кольца и модули. М., «Мир», 1971.
5. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. М., «Наука», 1969.
6. Stenström B. Rings and modules of quotiens. — «Lecture Notes in Math», 237, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

УДК 517.91/943

Л. М. ЛІСЕВИЧ, Л. І. БЛАВАЦЬКА

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ КВАЗІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо квазілінійну систему

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \varphi_i(x), \tag{1}$$

у якої $f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — монотонні по кожній змінній функції, що мають неперервні частинні похідні, $\varphi_i(x)$ — майже періодичні функції, $i=1, 2, \ldots, n$. Вважатимемо, що система (1) допускає розв'язок $y=y^*(x)=\{y_1^*(x), y_2^*(x), \ldots, y_n^*(x)\}$, визначений і обмежений на всій дійсній осі $(-\infty<x<+\infty)$, тобто існує $M>0$, що

$$\|y^*(x)\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i^*(x)| < M. \tag{2}$$

Лема. Якщо векторна функція $g(x)=\{g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\}$ неперервна і обмежена в $(x_0, +\infty)$ (або в $(-\infty, x_0)$), то для будь-якого числа τ існує послідовність значень $x_n \to +\infty$ (або $x_n \to -\infty$) таких, що

$$\lim_{n\to\infty} \|g(x_n+\tau) - g(x_n)\| = 0. \tag{3}$$

Для скалярної функції ця лема була доведена Б. П. Демидовичем [2].

Теорема. Нехай

1) функції $f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — неперервні і мають неперервні частинні похідні у деякій опуклій по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ області, причому $\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \geqslant 0$, $i, k=1, 2, \ldots, n$,

2) векторна функція $\varphi(x)=\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ є неперервною майже періодичною з обмеженим неозначеним інтегралом

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt. \tag{4}$$

Тоді будь-який обмежений розв'язок системи (1) є майже періодичним.

Доведення. На основі теореми про неозначений інтеграл від майже періодичної функції функція $\Phi(x)$ є майже періодичною. Нехай $\tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ — майже період функції $\Phi(x)$, тобто

$$\|\Phi(x+\tau) - \Phi(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

для $-\infty < x < +\infty$. Позначимо через $y^*(x)$ обмежений на всій дійсній осі розв'язок системи (1), для якого виконується умова (2) і приймемо

$$\Delta_i(x) = y_i^*(x+\tau) - y_i^*(x), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Тоді з системи (1), застосовуючи при цьому відому лему Адамара [3], одержуємо лінійну систему

$$\frac{d\Delta_i(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(x)\,\Delta_j(x) + \varphi_i(x+\tau) - \varphi_i(x), \tag{7}$$

де $K_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ є неперервні функції.

Приймемо $\Delta(x) = \{\Delta_1(x), \ldots, \Delta_n(x)\}$,

$$\Psi_\tau(x) = \{\varphi_1(x+\tau) - \varphi_1(x); \ldots; \varphi_n(x+\tau) - \varphi_n(x)\},$$

$K(x) = [K_{ij}(x)]$ — матриця виміру $n \times n$ і запишемо систему (7) у вигляді векторного рівняння

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = K(x)\,\Delta(x) + \Psi_\tau(x). \tag{8}$$

Нехай тепер x фіксоване. На основі леми виберемо $x_0 > x$ так, щоб

$$\|\Delta(x_0)\| = \|y^*(x_0+\tau) - y^*(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Як відомо, розв'язок рівняння (8) запишеться

$$\Delta(x) = \Omega_{x_0}^{x}(K)\,\Delta x_0 + \int_{x_0}^{x} \Omega_t^x K(t)\,\Psi_\tau(t)\,dt, \tag{10}$$

де $\Omega_{x_0}^{x}(K)$ — матриціант, який є рівномірно збіжний рядом. Елементи матриці $K(x) = [K_{ij}(x)]$ — невід'ємні та неперервні функції. Якщо прийняти, що $g(x) = \max K_{ij}(x)$ і розглянути матрицю $G(x) = [g(x)]$ виміру $n \times n$, то, як відомо [1],

$$\Omega_{x_0}^{x}(K) \leqslant \Omega_{x_0}^{x}(G) \leqslant e^{-n\int_x^{x_0} g(t)dt} \cdot I, \tag{11}$$

де I — матриця виміру $n \times n$, всі елементи якої одиниці. Нехай $M = \sup\limits_x \|\Omega_{x_0}^{x}(K)\|$. Враховуючи тепер (5), (9) і (11) і поступаючи майже так, як в роботі [1], одержуємо

$$\|\Delta(x)\| = \|y^*(x+\tau) - y^*(x)\| < M \cdot \varepsilon$$

для $-\infty < x < +\infty$, тобто векторна функція $y^*(x)$ майже періодична.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, М., Гостехиздат, 1954.
2. Демидович Б. П. Об одном случае почти периодичности решения обыкновенного дифференциального уравнения. УМН, 1953, т. VIII, вып. 6 (58).
3. Петровский Г. И. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.

УДК 517.946

В. М. ЦИМБАЛ

ВИРОДЖЕННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ЗВИЧАЙНЕ

У змінній смузі $V_T : \{0 \leqslant t \leqslant T, \ -\infty < x_i < +\infty\}$ $(i=1, \ldots, n)$ розглядається задача Коші для лінійного рівняння у частинних похідних другого порядку з малим параметром $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\,u = f(x,t), \quad (1)$$

$$u(x,0) = g(x) \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = h(x). \quad (2)$$

Припускаємо, що в області V_T виконуються такі умови:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x); \ \nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j < \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \ \nu < 0,$$

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ — довільні дійсні числа, тобто рівняння (1) є гіперболічне; $b(x, t) > 0$; всі задані функції вважаються достатньо гладкими для проведення подальших викладок.

Методом М. І. Вішика—Л. А. Люстерніка [1] побудуємо асимптотичний розклад розв'язку задачі Коші (1)—(2) за степенями малого параметру ε.

Розв'язок задачі (1)—(2) шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\,\overline{u}_i(x,t) + \varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\,v_i(x,\eta) + \varepsilon^{N+1}Z_N, \quad (3)$$

де функції $\overline{u}_i(x,t)$, $v_i(x,\eta)$ $\left(\eta = \frac{t}{\varepsilon}\right)$ визначаються відповідно з першого та другого ітераційних процесів [1], наведених нижче; Z_N — нев'язка; N — наперед задане додатне ціле число. $\overline{u}_q(x, t)$ $(q=0, \ldots, N)$ визначаються як розв'язки задач:

$$b(x,t)\frac{\partial \overline{u}_q}{\partial t} + a(x,t)\,\overline{u}_q = f_q(x,t) \ (q = 0, \ldots, N), \quad (4)$$

де $f_0(x,t) = f(x,t)$, $f_q(x,t) = -\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_{q-1}}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \bar{u}_{q-1}}{\partial x_i}\right)\right)$

$$(q = 1, \ldots, N);$$

$$\bar{u}_q(x, 0) = g_q(x) \quad (q = 0, \ldots, N), \tag{5}$$

де $g_0(x) \equiv g(x)$, $g_q(x) = -v_{q-1}(x, 0)$ $(q = 1, \ldots, N)$; $v_p(x, \eta)$ $(p = 0, \ldots, N)$ визначаються як розв'язки задач:

$$\frac{\partial^2 v_p}{\partial \eta^2} + b(x, 0)\frac{\partial v_p}{\partial \eta} = F_p(x, \eta) \quad (p = 0, \ldots, N), \tag{6}$$

де
$$F_0(x, \eta) \equiv 0, \; F_p(x, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v_{p-2}}{\partial x_j}\right) -$$

$$-\sum_{q=1}^{p} \frac{\eta^q}{q!} b^{(q)}(x, 0)\frac{\partial v_{p-q}}{\partial \eta} - \sum_{q=0}^{p-1} \frac{\eta^q}{q!} a^{(q)}(x, 0)\, v_{p-q-1}$$

$$(p = 1, \ldots, N), \; v_{-1} \equiv 0;$$

$$\frac{\partial v_q(x, 0)}{\partial \eta} = h_q(x) \quad (q = 0, \ldots, N), \tag{7}$$

де $h_0(x) = -\frac{\partial \bar{u}_0(x, 0)}{\partial t} + h(x)$, $h_q(x) = -\frac{\partial \bar{u}_q(x, 0)}{\partial t}$ $(q = 1, \ldots, N)$,

за умови, що $v_p(x, \eta) \underset{\eta \to \infty}{\to} 0$ $(p = 0, \ldots, N)$.

Рівняння (4) одержані при підстановці першого з рядів (3) в (1) і зрівнюванні коефіцієнтів при однакових степенях ε. Рівняння (6) одержані таким чином: в однорідному рівнянні, яке відповідає (1), робимо регуляризуюче перетворення $\eta = \frac{t}{\varepsilon}$, розкладаємо коефіцієнти $b(x, \varepsilon\eta)$, $a(x, \varepsilon\eta)$ за степенями $t = \varepsilon\eta$, замість u підставляємо другий з рядів (3) і зрівнюємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Умови (5), (7) знайдені зрівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях ε і підстановці (3) у (2). Як бачимо, функції $\bar{u}_q(x, t)$ визначаються як розв'язки задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами, $v_p(x, \eta)$ визначаються зі звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами ($x_1, \ldots, x_n$ — грають роль параметрів), виконуються умови регулярності виродження [1], тому $v_p(x, \eta)$ $(p = 0, \ldots, N)$ є функціями типу примежового шару. Перший і другий ітераційні процеси треба вести одночасно.

Нев'язка Z_N є розв'язок такої задачі:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 Z_N}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial Z_N}{\partial x_i}\right)\right) + b(x, t)\frac{\partial Z_N}{\partial t} +$$

$$+ a(x, t) Z_N = G(x, t); \tag{8}$$

$$Z_N(x, 0) = -v_N(x, 0), \qquad \frac{\partial Z_N(x, 0)}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

де $G(x, t)$ — відома функція.

Для доведення асимптотичної коректності розкладу (3) необхідно одержати оцінку Z_N в деякій нормі у кожній компактній підобласті області V_T. Шукаємо Z_N у вигляді $Z_N = Z_N^{(1)} + Z_N^{(2)}$, де $Z_N^{(1)}$ задовольняє умови (9) і має обмежені похідні до другого порядку [2]. Тоді $Z_N^{(2)}$ є розв'язок задачі, аналогічної до (8)—(9), але умови (9) однорідні, а в правій частині (8) маємо $G^1(x, t)$, яка просто виражається через $G(x, t)$ і $Z_N^{(1)}$.

Для $Z_N^{(2)}$ методом інтегралів енергії [3] одержана оцінка

$$\int_{D_\tau} (Z_N^{(2)})^2 \, dx \, dt \leqslant C,$$

де C — константа, яка не залежить від ε; D_τ — частина характеристичного конуса між гіперплощинами $t = \tau$ і $t = 0$. Звідси випливає асимптотична коректність розкладу (3).

Зауважимо, що результат роботи узагальнює [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. — УМН, 1957, № 5.
2. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехтеориздат, 1953.
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., Наука. 1973.
4. Smith R. R., Palmer J. T. On the behavior of the solution of the telegraphist's equation for large absorption. — «Arch. Ration. Mech and Analysis», 1970, vol. 39, N 2.

УДК 517.535.4

О. Н. ФРІДМАН

ОЦІНКИ ІНДИКАТОРІВ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛОГО ПОРЯДКУ З ДОДАТНИМИ НУЛЯМИ ТА ПОЛЮСАМИ

Нехай ρ — деяке ціле число, $\rho \geqslant 0$, $\rho(r)$ уточнений порядок (див., наприклад, [7] с. 47), $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$. Уточнений порядок $\rho(r)$ належить до класу збіжності ($\rho(r) \in C$) або класу розбіжності ($\rho(r)\in D$) залежно від того, збігається чи розбігається інтеграл

$$\int_1^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt.$$

Позначимо через $\rho_1(r)$ функцію

$$\rho_1(r)=\rho+\frac{\ln\int_1^r t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt}{\ln r}\quad (r>1),$$

якщо $\rho(r)\in D$, через $\rho_2(r)$ функцію

$$\rho_2(r)=\rho+\frac{\ln\int_r^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt}{\ln r}\quad (r>1),$$

якщо $\rho(r)\in C$ і через $\rho_3(r)$ функцію $\rho_3(r)\equiv\rho$.

У цій статті розглядається клас $F(\rho(r),\ \delta_1,\ \delta_2)$ мероморфних функцій $f(z)$ цілого порядку з додатними нулями та полюсами, таких, що $-\infty<\delta_1\leqslant\delta_1(f)\leqslant\delta_2(f)\leqslant\delta_2<\infty$,

де
$$\delta_1(f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{r^{\rho(r)}},\quad \delta_2(f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{r^{\rho(r)}};\tag{1}$$

$\nu(r)$ — різниця кількості нулів і полюсів функції $f(z)$ у крузі $\{|z|\leqslant r\}$. Знаходяться точні оцінки для індикаторів функції $f(z)$:

$$h_j(\varphi,f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_j(r)}},\quad 0<\varphi<2\pi,\ j=1,2,3.$$

Наша стаття доповнює роботу [8], де розглядається випадок мероморфних функцій нецілого порядку. Для класу цілих функцій цілого порядку аналогічні задачі розв'язувалися А. А. Гольдбергом [1, 2] і А. А. Кондратюком [3—6].

При $\rho(r)\in C$ мероморфну функцію $f(z)$ можна записати у вигляді

$$f(z)=\exp\{\alpha(f)\,z^\rho+P(z)\}\prod_{k=1}^\infty E\left(\frac{z}{c_k},\ \rho-1\right)^{\varepsilon_k},$$

де $P(z)$ — многочлен степеня не вище $\rho-1$; $E(z,\ \rho-1)$ — первісний множник Вейєрштрасса роду $\rho-1$; c_k — послідовність, яка складається з нулів та полюсів функції $f(z)$, $1\leqslant c_1\leqslant c_2\leqslant\leqslant\ldots$, $\varepsilon_k=1$, якщо c_k — нуль, $\varepsilon_k=-1$, коли c_k — полюс $f(z)$.

Теорема. Нехай δ_1 і δ_2 — деякі дійсні числа, $-\infty<\delta_1\leqslant\leqslant\delta_2<\infty$ і верхня та нижня щільності $\nu(r)$ (див. (1)) мероморфної функції $f(z)\in F(\rho(r),\ \delta_1,\ \delta_2)$, виміряні відносно $r^{\rho(r)}$, дорівнюють відповідно $\delta_2(f)$ і $\delta_1(f)$, $-\infty<\delta_1\leqslant\delta_1(f)\geqslant\delta_2(f)\leqslant\leqslant\delta_2<\infty$. Тоді, якщо $\rho(r)\in D$, то

$$\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|\leqslant h_1(\varphi,f)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|.$$

Коли $\rho(r)\in C$ і $\alpha(f)=0$, то

$$-\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|\leqslant h_2(\varphi,f)\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|.$$

Якщо $\rho(r)\in C$ і $\alpha=\alpha(f)\neq0$, то

$$h_3(\varphi,f)=|\alpha|\cos(\rho\varphi+\arg\alpha).$$

Існує мероморфна функція $f(z)\in F(\rho(r),\ \delta_1,\ \delta_2)$, з $\delta_2(f)=\delta_2$ і $\delta_1(f)=\delta_1$ така, що при $\rho(r)\in D$

$$h_1(\varphi,f)\equiv\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|,$$

а при $\rho(r)\in C$ і $\alpha(f)=0$ така, що

$$h_2(\varphi,f)\equiv-\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|.$$

Для фіксованого φ, $0<\varphi<2\pi$ можна вказати мероморфну функцію $f(z)\in F(\rho(r),\ \delta_1,\ \delta_2)$, $\delta_1\leqslant\delta_1(f)\leqslant\delta_2(f)\leqslant\delta_2$ таку, що при $\rho(r)\in D$

$$h_1(\varphi,f)=\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|,$$

а при $\rho(r)\in C$ і $\alpha(f)=0$

$$h_2(\varphi,f)=-\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\,|\cos\rho\varphi|.$$

Доведення теореми з незначними змінами проводиться методом, вказаним А. А. Гольдбергом [2] при доведенні відповідної теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, II. — «Математический сборник», 1963, т. 61, № 3.
2. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, III. — «Математический сборник», 1964, т. 65, № 3.
3. Кондратюк А. А. Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1968, вып. 7.
4. Кондратюк А. А. Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями. — «Сибирский математический журнал», 1970, т. 11, № 5.
5. Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями. — «Литовский математический сборник», 1967, вып. 7, № 1.
6. Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями, II. — «Литовский математический сборник», 1968, вып. 8, № 1.
7. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.
8. Фрідман О. Н. Оцінки індикаторів мероморфних функційного порядку з додатними нулями і полюсами. — «Доповіді АН УРСР», 1972, № 7.

УДК 517.917

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Л. М. ЛІСЕВИЧ

КОМПАКТНІСТЬ І НОРМАЛЬНІСТЬ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

1. **Компактність сім'ї S^p-майже періодичних матриць.** О. С. Кованько [2] знайшов умови компактності сім'ї $\{f(x)\}$ S^p-майже періодичних функцій. У цій роботі вивчається аналогічне питання для сім'ї $\{F(x)\}$ S^p-майже періодичних матриць.

Означення. Сім'я $\{F(x)\}$ $(-\infty<x<+\infty)$ S^p-майже періодичних матриць називається S^p-компактною, якщо з довільної її послідовності $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\nu(x), \ldots$ можна виділити збіжну за S^p-нормою підпослідовність $F_{\nu_1}(x), F_{\nu_2}(x), \ldots, F_{\nu_n}(x), \ldots$

Лема 1.1. Сім'я $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ S^p-майже періодичних матриць є S^p-компактною тоді і тільки тоді, коли S^p-компактні множини $\{f_{jk}(x)\}$ S^p-майже періодичних функцій.

Доведення. Необхідність. Необхідність умови очевидна. Справді, користуючись поняттям збіжності за S^p-нормою послідовності S^p-майже періодичних матриць [4], із S^p-компактності сім'ї матриць $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ одержуємо S^p-компактність множин функцій $\{f_{jk}(x)\}$ для всіх j, k і $x\in(-\infty, +\infty)$.

Достатність. Допускаємо, що в сім'ї матриць $\{F(x)\}=$ $=\{[f_{jk}(x)]\}$ множини функцій $\{f_{jk}(x)\}$ є S^p-компактні для всіх j, k і $x \in (-\infty, +\infty)$. Виділимо з нашої сім'ї матриць довільну послідовність

$$\{F_\nu(x)\} = \{[f_{jk}^{(\nu)}(x)]\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Оскільки всі множини функцій $\{f_{jk}(x)\}$ є S^p-компактні, то з послідовності $\{f_{11}^{(\nu)}(x)\}$ можна виділити збіжну за S^p-нормою підпослідовність $\{f_{11}^{(\nu)_{11}}(x)\}$.

Далі, з послідовності $\{f_{12}^{(\nu)_{11}}(x)\}$ виділяємо збіжну за S^p-нормою підпослідовність $\{f_{12}^{(\nu)_{12}}(x)\}$. Зрозуміло, що підпослідовність $\{f_{11}^{(\nu)_{12}}(x)\}$ також збігається за S^p-нормою. Якщо матриці такої сім'ї мають вимір $r \times l$, то, продовжуючи цей процес виділення збіжних за S^p-нормою підпослідовностей для всіх інших послідовностей $\{f_{jk}^{(\nu)}(x)\}$, ми в кінцевому результаті одержуємо підпослідовність $\nu_* = \nu_{rl}$, для якої всі підпослідовності $\{f_{jk}^{(\nu_*)}(x)\}$ збігаються за S^p-нормою, тобто існує гранична функція $g_{jk}(x)$ (S^p-майже періодична [3]), що

$$\lim_{\nu_* \to \infty} \| f_{jk}^{(\nu_* \to \infty)}(x) - g_{jk}(x) \|_{S^p} = 0$$

для всіх j, k і $x \in (-\infty, +\infty)$.

Таким чином, існує гранична S^p-майже періодична матриця $G(x) = [g_{jk}(x)]$ така, що

$$\lim_{\nu_* \to \infty} \| F_{\nu_*}(x) - G(x) \|_{S^p} = 0$$

для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Отже, сім'я матриць $\{F(x)\}$ є S^p-компактна.

Розглянемо тепер для нашої сім'ї матриць $\{F(x)\} = \{[f_{jk}(x)]\}$ при фіксованому $h > 0$ множину матриць вигляду

$$F_h(x) = [f_{jk}(x, h)], \text{ де } f_{jk}(x, h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f_{jk}(t)\, dt$$

функції Стеклова. Оскільки $f_{jk}(x, h)$ є майже періодичними функціями Бора [3], то $F_h(x)$, за означенням, є майже періодичною матрицею Бора.

Теорема 1. І. Для того, щоб сім'я $\{F(x)\} = \{[f_{jk}(x)]\}$ S^p-майже періодичних матриць була S^p-компактна, необхідно та достатньо, щоб виконувалися такі умови:

1) Для сім'ї матриць $\{F(x)\}$ при будь-якому $h > 0$ множина майже періодичних матриць Бора $\{F_h(x)\}$ компактна у розумінні рівномірної збіжності на всій дійсній осі;

2) $$\lim_{h \to 0} \| F(x) - F_h(x) \|_{S^p} = 0$$

рівномірно відносно $x \in (-\infty, +\infty)$.

Доведення. Необхідність. Допускаємо, що сім'я матриць $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ S^p-компактна, а отже, за лемою 1.1 множини функцій $\{f_{jk}(x)\}$ також S^p-компактні. На основі теореми компактності О. С. Ковапька [2] робимо висновок, що множини $\{f_{jk}(x, h)\}$ майже періодичних функцій Бора компактні у розумінні рівномірної збіжності на всій дійсній осі і

$$\lim_{h\to 0}\| f_{jk}(x)-f_{jk}(x,h)\|_{S^p}=0,$$

для всіх j, k. Тоді з леми 1.1. випливає, що множина $\{F_h(x)\}$ майже періодичних матриць Бора компактна в розумінні рівномірної збіжності на всій дійсній осі.

Необхідність другої умови випливає з співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\| F(x)-F_h(x)\|_{S^p}\leqslant\lim_{h\to 0}\sum_{j,k}\| f_{jk}(x)-f_{jk}(x,h)\|_{S^p}=0.$$

Достатність. Якщо множина $\{F_h(x)\}=\{[f_{jk}(x, h)]\}$ майже періодичних матриць Бора компактна у розумінні рівномірної збіжності на всій дійсній осі, то із леми 1. 1. випливає, що й множини функцій $\{f_{jk}(x, h)\}$ також компактні у розумінні рівномірної збіжності.

Разом з тим із співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\| f_{jk}(x)-f_{jk}(x,h)\|_{S^p}\leqslant\lim_{h\to 0}\| F(x)-F_h(x)_{S^p}=0$$

отримуємо

$$\lim_{h\to 0}\| f_{jk}(x)-f_{jk}(x,h)\|_{S^p}=0.$$

Тепер знову на основі теореми О. С. Ковапька робимо висновок, що множини функцій $\{f_{jk}(x)\}$ S^p-компактні, а отже, за лемою 1.1 і сім'я матриць $\{F(x)\}=\{[f_{jk}(x)]\}$ також S^p-компактна.

2. **Нормальність S^p-майже періодичних матриць.** Користуючись поняттям нормальності функції, Бохнер дав інше означення майже періодичності функції Бора, яке пізніше було узагальнено на майже періодичні матриці Бора. Доведено також еквівалентність обох означень [3]. Ми розглянемо ці питання для S^p-майже періодичних матриць.

Означення. Сумовна разом із своїм p-м ($p\geqslant 1$) степенем у кожному скінченному інтервалі матриця $F(x)$ називається S^p-нормальною, якщо сім'я матриць $\{F(x+h)\}$ $(-\infty<x<+\infty)$ є S^p-компактною.

Лема 2.1. Матриця $F(x)=[f_{jk}(x)]$ є S^p-нормальною тоді і тільки тоді, коли всі її елементи $f_{jk}(x)$ є S^p-нормальні функції.

Це твердження доводиться на основі леми 1.1.

Теорема 2.1. Для того щоб матриця $F(x)$ була S^p-майже періодичною, необхідно і достатньо, щоб вона була S^p-нормальною.

Доведення. 1) Нехай матриця $F(x)=[f_{jk}(x)]$ є S^p-майже періодична, тобто всі її елементи $f_{jk}(x)$, за означенням, є S^p-майже періодичними функціями. На основі теореми Бохнера робимо висновок, що всі функції $f_{jk}(x)$ S^p-нормальні, отже, за лемою 2.1. і матриця $F(x)=[f_{jk}(x)]$ S^p-нормальна.

2) Якщо матриця $F(x)=[f_{jk}(x)]$ S^p-нормальна, то всі її елементи $f_{jk}(x)$ за лемою 2.1 також S^p-нормальні функції. Тепер знову на основі теореми Бохнера робимо висновок, що $f_{jk}(x)$ S^p-майже періодичні функції, а отже, і матриця $F(x)=$ $=[f_{jk}(x)]$, за означенням, S^p-майже періодична.

Зауваження. Тому що S^p-нормальність матриці є необхідною та достатньою умовою її S^p-майже періодичності, то цю властивість можна прийняти за означення S^p-майже періодичності матриці. Отже, S^p-нормальну матрицю $F(x)$ називатимемо S^p-майже періодичною.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
2. Ковапько А. С. О компактности систем обобщенных почти периодических функций Степанова. — ДАН СССР, т. 26, 3 (1940).
3. Левитан Б. М. Почти периодические функции, М., ГИТТЛ, 1953.
4. Лісевич Л. М., Ковальчук Б. В. S^p-майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^p-майже періодичною правою частиною. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1973, вип. 8.

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

І. Д. КВІТ

ДВОПАРАМЕТРИЧНА СІМ'Я СИНГУЛЯРНИХ РОЗПОДІЛІВ

1. Розглянемо гру двох осіб A та B. Нехай кожна партія гри складається з необмеженого числа незалежних кидань однорідної симетричної монети. Якщо при k-му киданні монети випаде герб, то гравцеві A за рахунок гравця B нараховується ac^{k-1} монетних одиниць, $a>0$, $0<c<\frac{1}{2}$; якщо ж випаде число, то гравцеві B за рахунок гравця A нараховується ac^{k-1} монетних одиниць, тобто гравцеві A нараховується $-ac^{k-1}$ монетних одиниць. Результат k-го кидання монети описується випадковою змінною ξ_k, що з половинною ймовірністю набуває значення -1 або $+1$ залежно від того, чи випаде число чи герб. Виграш гравця A в результаті проведеної партії дорівнює

$$\xi(a, c)=\sum_{k=1}^{\infty} ac^{k-1}\xi_k, \quad \left(a>0,\ 0<c<\frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Оскільки сподівання випадкової змінної ξ_k дорівнює нулю, то сподіваний виграш гравця A в одній партії також дорівнює нулю, $E\xi(a, c)=0$. Таким чином, задана гра справедлива. Очевидно, що найменше та найбільше значення випадкової змінної (1) відповідно дорівнює

$$\sum_{k=1}^{\infty} ac^{k-1}\cdot(-1)=-\frac{a}{1-c}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} ac^{k-1}\cdot(+1)=\frac{a}{1-c}.$$

Звідси випливає, що випадкова змінна (1) може набувати свої значення лише на відрізку

$$I=\left[-\frac{a}{1-c}, \frac{a}{1-c}\right], \quad \left(a>0,\ 0<c<\frac{1}{2}\right), \tag{2}$$

і отже, її функція розподілу $F(x;\ a,\ c)$ дорівнює 0 при $x<-\frac{a}{1-c}$ та 1 при $x\geqslant\frac{a}{1-c}$. Покажемо, що функція розподілу випадкової змінної (1) сингулярна. Справді, якщо при першому киданні монети випаде число, то гравець A виграє не більше, ніж

$$-a+\sum_{k=2}^{\infty} ac^{k-1}\cdot(+1)=-\frac{a(1-2c)}{1-c}; \tag{3}$$

якщо ж випаде герб, то не менше, ніж

$$a + \sum_{k=2}^{\infty} ac^{k-1} \cdot (-1) = \frac{a(1-2c)}{1-c}. \tag{4}$$

Отже, випадкова змінна (1) не може набувати значень між (3) і (4),

$$P\left\{-\frac{a(1-2c)}{1-c} < \xi(a, c) < \frac{a(1-2c)}{1-c}\right\} = 0;$$

на доповненні до відрізка (2) маємо

$$P\left\{-\frac{a}{1-c} \leqslant \xi(a, c) \leqslant -\frac{a(1-2c)}{1-c}\right\} = \frac{1}{2},$$

$$P\left\{\frac{a(1-2c)}{1-c} \leqslant \xi(a, c) \leqslant \frac{a}{1-c}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$F(x; a, c) = \frac{1}{2}, \quad -\frac{a(1-2c)}{1-c} \leqslant x < \frac{a(1-2c)}{1-c},$$

і отже, стрибок функції розподілу випадкової змінної (1) не може бути більший від половини.

Якщо при перших двох киданнях монети випаде число, то гравець A виграє не більше, ніж

$$-a - ac + \sum_{k=3}^{\infty} ac^{k-1} \cdot (+1) = -\frac{a(1-2c^2)}{1-c}; \tag{5}$$

якщо при першому киданні монети випаде число, а при другому герб, то гравець A виграє не менше, ніж

$$-a + ac + \sum_{k=3}^{\infty} ac^{k-1} \cdot (-1) = -\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}. \tag{6}$$

Отже, випадкова змінна (1) не може набувати значень між (5) і (6),

$$P\left\{-\frac{a(1-2c^2)}{1-c} < \xi(a, c) < -\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}\right\} = 0;$$

і далі

$$P\left\{-\frac{a}{1-c} \leqslant \xi(a, c) \leqslant -\frac{a(1-2c^2)}{1-c}\right\} = \frac{1}{4},$$

$$P\left\{-\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c} \leqslant \xi(a, c) \leqslant -\frac{a(1-2c)}{1-c}\right\} = \frac{1}{4}.$$

Звідси випливає, що

$$F(x; a, c) = \frac{1}{4}, \quad -\frac{a(1-2c^2)}{1-c} \leqslant x < -\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}.$$

Якщо при першому киданні монети випаде герб, а при другому число, то гравець A виграє не більше, ніж

$$a - ac + \sum_{k=3}^{\infty} ac^{k-1} \cdot (+1) = \frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}; \qquad (7)$$

якщо ж при перших двох киданнях монети випаде герб, то гравець A виграє не менше, ніж

$$a + ac + \sum_{k=3}^{\infty} ac^{k-1} \cdot (-1) = \frac{a(1-2c^2)}{1-c}. \qquad (8)$$

Таким чином, випадкова змінна (1) не може набувати значень між (7) і (8),

$$P\left\{\frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c} < \xi(a, c) < \frac{a(1-2c^2)}{1-c}\right\} = 0;$$

і далі

$$P\left\{\frac{a(1-2c)}{1-c} \leqslant \xi(a, c) \leqslant \frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c}\right\} = \frac{1}{4},$$

$$P\left\{\frac{a(1-2c^2)}{1-c} \leqslant \xi(a, c) \leqslant \frac{a}{1-c}\right\} = \frac{1}{4}.$$

Звідси випливає, що

$$F(x; a, c) = \frac{3}{4}, \quad \frac{a[1-2c(1-c)]}{1-c} \leqslant x < \frac{a(1-2c^2)}{1-c},$$

і отже, стрибок функції розподілу випадкової змінної (1) не може бути більший від $\frac{1}{4}$.

Після n кидань монети стає ясним, що стрибок функції розподілу випадкової змінної (1) не може бути більший від $\frac{1}{2^n}$. Оскільки випадкова змінна (1) визначається безмежним числом кидань монети, то її функція розподілу $F(x;\ a,\ c)$ неперервна. Вона набуває сталих значень на інтервалах зі сумарною мірою на відрізку (2)

$$\frac{2a(1-2c)}{1-c} + 2 \cdot \frac{2a(1-2c)}{1-c} \cdot c + 2^2 \cdot \frac{2a(1-2c)}{1-c} \cdot c^2 + \cdots = \frac{2a}{1-c},$$

тобто рівною довжині самого відрізка (2). Похідна неперервної функції розподілу $F(x;\ a,\ c)$ всередині інтервалів сталості дорівнює нулю. Отже, $F(x;\ a,\ c)$ росте від 0 до 1 на множині міри нуль з відрізка (2). Ця множина потужності континууму (порівн. [1], с. 53—56). Таким чином, функція розподілу $F(x;\ a,\ c)$ випадкової змінної (1) сингулярна.

2. Характеристична функція $f(s;\ a,\ c)$ суми (1) незалежних випадкових змінних $ac^{k-1}\xi_k$ дорівнює добуткові характеристичних функцій доданків

$$f(s; a, c) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos ac^{k-1} s, \ \left(a > 0,\ 0 < c < \frac{1}{2}\right), \ -\infty < s < \infty. \quad (9)$$

Очевидно, що характеристична функція (9) задовольняє функціональне співвідношення

$$f\left(\frac{s}{c}; a, c\right) = \cos \frac{a}{c} s f(s; a, c). \quad (10)$$

Залежно від параметра c функція (9) досить по-різному поводиться на нескінченності. Для виявлення цього розглядаємо геометричну прогресію з першим членом $s_0 > 0$ і знаменником $\frac{1}{c}$

$$s_0,\ s_1 = \frac{s_0}{c},\ \ s_2 = \frac{s_0}{c^2}, \ldots, \ \left(0 < c < \frac{1}{2}\right). \quad (11)$$

Застосовуючи співвідношення (10) до послідовності (11) при $s_0 = \frac{\pi}{an}$, $c = \frac{1}{n}$, $(n = 3,\ 4, \ldots)$, можна довести нерівність

$$1 - \frac{\pi^2}{2(n^2-1)} < \max_{|s|>N} |f(s; a, c)| < 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + \frac{\pi^4}{24n^4}, \ \ (n = 3, 4, \ldots), \quad (12)$$

де N — довільно велике додатне число, а при $s_0 = \dfrac{\pi}{\left(2 + \frac{1}{2^n}\right)a}$, $c = \dfrac{2^n}{2^{n+1}+1}$, $(n = 1,\ 2, \ldots)$, можна довести нерівність

$$\max_{|s|>N} |f(s; a, c)| < \cos \frac{\pi}{2 + \frac{1}{2^n}}, \quad (13)$$

(порівн. [2], с. 135—140). Таким чином, максимум модуля характеристичної функції (9) сингулярної випадкової змінної (1) при далеких s може бути довільним числом L, $0 < L < 1$ при відповідному виборі параметра c, $0 < c < \frac{1}{2}$.

3. Відзначимо, що при $c=0$ випадкова змінна (1) стає дискретною, яка з половинною ймовірністю набуває значень $-a$ та $+a$; при $c=\frac{1}{2}$ випадкова змінна (1) стає рівномірною на відрізку $[-2a, 2a]$; при $a=0$ випадкова змінна (1) стає невластивою з єдиним значенням нуль. Таким чином, двопараметрична сім'я сингулярних випадкових змінних (1) має граничними змінними невластиву, дискретну та абсолютно неперервну. Навпаки, можемо уявити собі, що одинична маса, розміщена у точці нуль числової осі, роздвоїлася: половина з неї перемістилася в точку $-a$, та половина в точку $+a$. Далі кожна з половинних мас може рівномірно розсіятися від центрів розсіяння $-a$ і $+a$ вліво та вправо зі силою розсіяння, характеризованою параметром c, $0<c\leqslant\frac{1}{2}$, утворюючи при $0<c<\frac{1}{2}$ сингулярний розподіл на відрізку $\left[-\frac{a}{1-c}, \frac{a}{1-c}\right]$, або при $c=\frac{1}{2}$ абсолютно неперервний рівномірний розподіл на відрізку $[-2a, 2a]$. Зауважимо, що при $a=1-c$ половинні маси розсіваються від точки -1 вправо та від точки $+1$ вліво, утворюючи сингулярний розподіл або абсолютно неперервний рівномірний розподіл на тому самому відрізку $[-1, 1]$. При додатних значеннях a ближчих до нуля сингулярна змінна (1) подібніша до невластивої, при значеннях c ближчих до нуля вона подібніша до дискретної, а при c ближчих до половини подібніша до абсолютно неперервної рівномірно розподіленої змінної. Це підтверджується поведінкою характеристичної функції (9) випадкової змінної (1) в околі нескінченності. Справді, характеристична функція (9) неперервно залежить від параметрів a та c, і

$$f(s;0,c)=1;\ f(s;a,0)=\cos as,\ a>0;\ f\left(s;a,\frac{1}{2}\right)=\frac{\sin 2as}{2as},\ a>0.$$

Звідси,

$$\left|f\left(\frac{\pi k}{a};a,0\right)\right|=1,\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots);\ \lim_{|s|\to\infty} f\left(s;a,\frac{1}{2}\right)=0.$$

Останні співвідношення, що характеризують дискретну й абсолютно неперервну змінну, можна також одержати відповідно з нерівностей (12) і (13) при $n\to\infty$.

Розсіяння випадкової змінної (1) оцінюється дисперсією. Дисперсія суми (1) незалежних випадкових змінних $ac^{k-1}\xi_k$ дорівнює сумі дисперсій доданків

$$D\xi(a,c)=\frac{a^2}{1-c^2},\ \left(a>0,\ 0<c<\frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

Як бачимо, дисперсія зростає від нуля для невластивої змінної й a^2 для двозначної дискретної змінної до $\frac{4}{3}a^2$ для абсолютно неперервної рівномірно розподіленої випадкової змінної.

4. Якщо на початку п. 1 вважати, що в разі випадання числа гравець B нічого не одержує за рахунок гравця A, то прийдемо до двопараметричної випадкової змінної, розподіленої на відрізку $\left[0, \frac{a}{1-c}\right]$ замість (2). Зокрема, при $a=1-c$ матимемо однопараметричну сім'ю сингулярних розподілів, використану в [3]. Один із таких сингулярних розподілів при $c=\frac{1}{4}$ маємо в [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Київ, «Вища школа», 1974.
2. Квіт І. Д. Характеристичні функції. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972.
3. Квіт І. Д. Сингулярні стратегії. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М., «Мир», 1967.

УДК 518:512.36

О. М. КОСТОВСЬКИЙ, Г. Г. ЦЕГЕЛИК

ВИЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ НУЛІВ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

В [1] за допомогою параметрів визначається нижня границя для модулів нулів степеневих рядів. Використовуючи параметри, у [2] наводяться формули для визначення правої границі нулів рядів Діріхле з дійсними показниками. У нашій роботі ці результати узагальнюються на ряди Діріхле з комплексними показниками.

Розглянемо абсолютно збіжний у деякій області D ряд [3]

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, e^{-\lambda_n z}\ (A_0\neq 0,\ \lambda_0=0), \tag{1}$$

де $z=x+iy$, A_n, λ_n — комплексні числа; $0<\arg\lambda_n<\frac{\pi}{2}$ $(n=1, 2, \ldots)$, $0<|\lambda_1|<|\lambda_2|<\ldots, \lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$.

Нехай $a_n=|A_n|$, $\lambda_n=\beta_n+i\gamma_n$ і $\{\alpha_n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — довільний набір додатних чисел (параметрів), який задовольняє умову

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leqslant \alpha_0. \qquad (2)$$

Приймемо

$$R_1 = \inf_{n>0} \left(\frac{a_0\,\alpha_n}{a_n\,\alpha_0}\right)^{\frac{\tau}{\beta_n}}, \quad R_2 = \inf_{n>0} \left(\frac{a_0\,\alpha_n}{a_n\,\alpha_0}\right)^{\frac{1-\tau}{\gamma_n}}, \qquad (3)$$

де $\tau (0<\tau<1)$ — довільне.

Теорема. Для будь-якого набору параметрів $\{\alpha_n\}$ ($n=0, 1, \ldots$), який задовольняє умову (2), ряд Діріхле (1) не перетворюється в нуль в області

$$\{x > -\ln R_1, \ y < \ln R_2\}. \qquad (4)$$

Доведення. Із формул (3) випливає така нерівність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, R_1^{\beta_n} R_2^{\gamma_n} \leqslant \frac{a_0}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

Використовуючи умову (2), з останньої нерівності одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, R_1^{\beta_n} R_2^{\gamma_n} \leqslant a_0.$$

Легко бачити, що для будь-яких x і y, які задовольняють умову $x>-\ln R_1$, $y<\ln R_2$, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\beta_n x+\gamma_n y} < a_0. \qquad (5)$$

Покажемо, що ряд (1) не перетворюється в нуль у області (4). Дійсно, припустимо, що $f(z)=0$, де $x>-\ln R_1$, $y<\ln R_2$. Тоді

$$-A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-\lambda_n z},$$

або

$$a_0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\beta_n x+\gamma_n y},$$

що суперечить (5).

Таким чином, припущення невірне, теорема доведена.

Приклад. Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n}\, e^{-\frac{n}{2}(1+i)z}.$$

Приймемо $\alpha_0=1$, $\alpha_n=2^{-n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, тоді $R_1=3^{2\tau}$, $R_2=3^{2(1-\tau)}$ і $f(z)$ не перетворюється в нуль в області

$$\{x > -2\tau \ln 3,\ y < 2(1-\tau)\ln 3\}.$$

Зокрема, при $\tau=\frac{1}{2}$ одержуємо область:

$$\{x > -\ln 3,\ y < \ln 3\}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Витенько И. В., Костовский А. Н. К теореме Фуживара о нижней границе для модулей нулей степенных рядов. — «Вычислительная и прикладная математика», 1967, вып. 4.
2. Цегелик Г. Г. Виділення смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле не перетворюються в нуль. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1972, вип. 7.
3. Лунц Г. Л. О некоторых обобщениях рядов Дирихле. — «Математический сборник», 1942, т. 10, № 1, 2.

УДК 539.3

Л. Й. ОЩИПКО, К. С. ІВАНКІВ, Т. В. ЮДІНА

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ДЕЯКИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРОВАКУУМНИХ ПРИЛАДІВ

Ставиться задача оптимального проектування електровакуумних приладів. За цільову функцію вибирається вага конструкції. Мінімум цільової функції шукається на допустимому підпросторі, що визначається обмеженнями, накладеними на максимальні розтягуючі напруження.

Розглядається конструкція, що складається з круглої пластинки радіуса R і товщини h_1, яка спряжена з циліндричною оболонкою довжини l_1 і товщини h_2, що в свою чергу спряжена з конічною оболонкою довжини l_2, товщини h_3 і кутом конусності α_k. Конструкція виготовляється зі скла і перебуває під рівномірним зовнішнім тиском інтенсивності q (рис. 1).

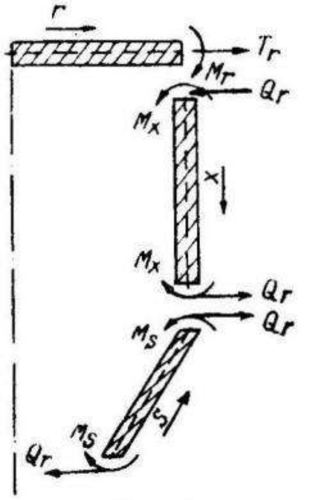


Рис. 1.

Напружений стан пластинки складається з плоского напруженого стану і напруженого стану, що виникає внаслідок згину пластинки. Плоский напружений стан пластинки характеризується радіальним зусиллям T_r і радіальним переміщенням ΔR.

$$T_r = -qh_2 Q_2;\ \Delta R = -\frac{qR(1-\nu)}{E} \cdot \frac{h_2}{h_1} Q_2,$$

Q_2 — безрозмірна перерізуюча сила у циліндричній оболонці при $x=0$.

Прогин шарнірно опертої по контуру пластинки, що перебуває під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності q і згинних моментів по контуру $m=qh_2^2 M_2$, має вигляд

$$w_1 = \frac{qR^4}{64\, D_1 (1+\nu)} \left[5 + \nu + \frac{32\, h_2^2}{R^2} M_2 - (1+\nu)\frac{r^2}{R^2}\right]\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right);$$

M_2 — безрозмірний згинний момент у циліндричній оболонці $x=0$; $D_1 = \dfrac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)}$ — циліндрична жорсткість пластинки; E — модуль Юнга; ν — коефіцієнт Пуассона матеріалу.

Напружені стани оболонок складаються з безмоментного напруженого стану, що визначається заданим осесиметричним навантаженням, і крайового ефекту, який записується через функції Крилова K_0, K_1, K_2, K_3 [3]:

$$w_2(x) = -\frac{2-\nu}{2}\cdot\frac{qR^2}{Eh_2} + C_1 K_0(\beta_1) - C_2 K_1(\beta_1) - C_3 K_2(\beta_1) - C_4 K_3(\beta_1);$$

$$\vartheta(x) = b_2\left[4C_1 K_3(\beta_1) + C_2 K_0(\beta_1) + C_3 K_1(\beta_1) + C_4 K_2(\beta_1)\right];$$

$$M_x(x) = D_2 b_2^2\left[4C_1 K_2(\beta_1) - 4C_2 K_3(\beta_1) + C_3 K_0(\beta_1) + C_4 K_1(\beta_1)\right];$$

$$Q_r(x) = D_2 b_2^3\left[4C_1 K_1(\beta_1) - 4C_2 K_2(\beta_1) - 4C_3 K_3(\beta_1) + C_4 K_0(\beta_1)\right];$$

$$\beta_1 = b_2 x;\ b_2 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh_2}};\ D_2 = \frac{Eh_2^3}{12(1-\nu^2)},$$

де w_2, $\vartheta(x)$, M_x, Q_r — прогин, кут повороту, згинний момент та перерізуюча сила, що виникають у циліндричній оболонці.

Аналогічно для конічної оболонки

$$u_r(s) = -\frac{q\sin^2\alpha_k}{2Eh_3\cos\alpha_k}\left[(2-\nu)s^2 + \nu(s_1^2 - s_2^2)\right] + \cos\alpha_k\cdot\frac{s}{s_1}\times$$
$$\times\left[C_5 K_0(\beta_2) - C_6 K_1(\beta_2) - C_7 K_2(\beta_2) - C_8 K_3(\beta_2)\right];$$

$$\vartheta(s) = \frac{q\,\mathrm{tg}^2\alpha_k}{2Eh_3} s\left(3 + \frac{s_1^2 - s_2^2}{s^2}\right) + b_3\Big[4C_5 K_3(\beta_2) + C_6 K_0(\beta_2) +$$
$$+ C_7 K_1(\beta_2) + C_8 K_2(\beta_2)\Big]\cdot\sqrt{\frac{s}{s_1}};$$

$$M_s(s) = D_3 b_3^2\left[4C_5 K_2(\beta_2) - 4C_6 K_3(\beta_2) + C_7 K_0(\beta_2) + C_8 K_1(\beta_2)\right];$$

$$Q_r(s) = -\frac{q\sin^2\alpha_k}{2\cos\alpha_k}\cdot\frac{s^2 - s_1^2 + s_2^2}{s} + \frac{D_3 b_3^3}{\cos\alpha_k}\sqrt{\frac{s_1}{s}}\Big[4C_5 K_1(\beta_2) -$$
$$- 4C_6 K_2(\beta_2) - 4C_7 K_3(\beta_2) + C_8 K_0(\beta_2)\Big];$$

$$\beta_2 = 2 \cdot \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s_1}}{\sqrt{h_3 \operatorname{tg} \alpha_k}}; \quad b_2 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{h_3 s_1 \operatorname{tg} \alpha_k}};$$

$$D_3 = \frac{E h_3^3}{12(1-\nu^2)};$$

U_r, $\vartheta(s)$, M_s, Q_r — радіальне переміщення, кут повороту, згинний момент та перерізуюча сила, що виникають у конічній оболонці.

Умови спряження елементів конструкції і шарнірного опирання конічної оболонки мають вигляд

$$\begin{aligned}
&M_r|_{r=R} = -M_x|_{x=0}; && T_r|_{r=R} = Q_r|_{x=0};\\
&\Delta R|_{r=R} = w_2|_{x=0}; && \vartheta|_{r=R} = -\vartheta|_{x=0};\\
&M_x|_{x=l_1} = M_s|_{s=s_2}; && Q_r|_{x=l_1} = -Q_r|_{s=s_2};\\
&w_1|_{x=l_1} = u_r|_{s=s_2}; && \vartheta|_{x=l_1} = -\vartheta|_{s=s_2};\\
&M_s|_{s=s_1} = 0; && u_r|_{s=s_1} = 0.
\end{aligned}$$

На алгоритмічній мові «Алгол-60» складена програма, що визначає постійні M_2, Q_2, C_i $(i=\overline{1,8})$ і аналізує напружений стан конструкції.

Тоді задача оптимального проектування зводиться до знаходження мінімуму

$$V = \pi\left[R^2 h_1 + \frac{1}{4} h_1^2 h_2^2 + 2Rl_1 h_2 + l_2(2R - l_2 \sin\alpha_k) h_3\right] \quad (1)$$

при обмеженнях

$$\sigma_x^{\max} \leqslant [\sigma]; \quad \sigma_r^{\max} \leqslant [\sigma], \quad (2)$$

$[\sigma]$ — допустиме напруження.

Регульованими параметрами будуть товщини елементів конструкції. Аналогічно [2] задачу зводимо до задачі геометричного програмування, пряма задача якого формулюється так:

мінімізувати

$$g_0(\overline{h}) = c_1 h_1 + c_2 h_2^2 h_1 + c_3 h_2 + c_4 h_3, \quad (3)$$

при обмеженнях вимушених

$$g_1(\overline{h}) = c_5 h_1^{a_{51}} h_2^{a_{52}} h_3^{a_{53}} \leqslant 1; \quad g_2(\overline{h}) = c_6 h_1^{a_{61}} h_2^{a_{62}} h_3^{a_{63}} \leqslant 1 \quad (4)$$

і натуральних

$$h_i > 0; \ i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

При фіксованих значеннях нерегульованих параметрів

$$E = 6240 \ кГ/мм^2; \ \nu = 0{,}2; \ [\sigma] = 0{,}9 \ кГ/мм^2; \ q = 0{,}01 \ кГ/мм^2;$$
$$l_1 = 25 \ мм; \ l_2 = 18{,}9 \ мм; \ R = 19{,}45 \ мм; \ s_2 = 38{,}9 \ мм;$$
$$s_1 = 20 \ мм; \ \alpha_k = \pi/6 \quad (6)$$

постійні в (3), (4) рівні

$$c_1 = 0{,}378302 \cdot 10^3; \qquad a_{51} = -0{,}237168 \cdot 10^1;$$
$$c_2 = 0{,}250000 \cdot 10^0; \qquad a_{52} = 0{,}282358 \cdot 10^0;$$
$$c_3 = 0{,}972500 \cdot 10^3; \qquad a_{53} = -0{,}169740 \cdot 10^{-3};$$
$$c_4 = 0{,}422710 \cdot 10^3; \qquad a_{61} = -0{,}316260 \cdot 10^0;$$
$$c_5 = 0{,}270109 \cdot 10^1; \qquad a_{62} = -0{,}179805 \cdot 10^1;$$
$$c_6 = 0{,}270583 \cdot 10^1; \qquad a_{63} = -0{,}961983 \cdot 10^{-4}.$$

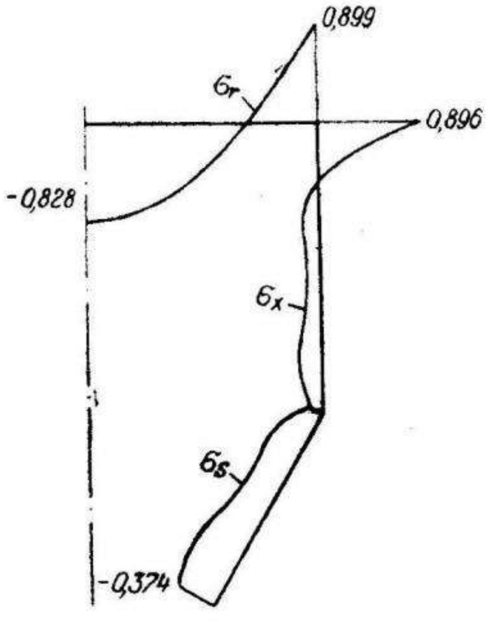


Рис. 2.

Ступінь важкості даної задачі дорівнює двом, а тому двоїсті змінні δ_i $(i = \overline{1,6})$ відповідної двоїстої задачі записуються через компоненти вектора нормалізації і векторів нев'язки у вигляді

$$\delta_i = b_i^0 + r_1 b_i^1 + r_2 b_i^2; \quad i = \overline{1,6}. \quad (7)$$

Компоненти вектора нормалізації і векторів нев'язки визначаються за допомогою систематичних процедур з матриці експонент прямої задачі a_{ij}. Базисні змінні r_k $(k = 1,2)$ знаходяться з системи трансцендентних рівнянь [1]

$$\prod_{i=1}^{6} c_i^{b_i^j} = \prod_{i=1}^{6} (b_i^0 + r_1 b_i^1 + r_2 b_i^2)^{b_i^j} \times \prod_{i=5}^{6} (b_i^0 + r_1 b_i^1 + r_2 b_i^2)^{b_i^j}. \quad (8)$$

Записавши двоїсті змінні на основі (7) і визначивши двоїсту функцію

$$v(\delta) = \left[\prod_{i=1}^{6} c_i^{b_i^0}\right] \times \left[\prod_{i=1}^{6} \delta_i^{-b_i^0}\right] \times \left[\prod_{i=5}^{6} \delta_i^{b_i^0}\right],$$

з першої теореми двоїстості визначаємо мінімізуючу точку прямої програми.

Для фіксованих значень нерегульованих параметрів (6) одержано оптимальні товщини $h_1 = 1{,}6215$ *мм*; $h_2 = 1{,}6289$ *мм*; $h_3 = 0{,}4904$ *мм*.

На рис. 2 показано розподіл напружень у конструкції при оптимальних товщинах. З точністю проведених обчислень максимальні напруження дорівнюють допустимим.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., «Мир», 1972.
2. Ощипко Л. Й., Іванків К. С. Застосування геометричного програмування до оптимізації по вазі тонкостінних конструкцій. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1976, вип. 11.
3. Прочность, упругость, колебания. Справочник. Т. 1. М., «Машиностроение», 1968.

УДК 518:517.948

Ю. М. ЩЕРБИНА

ОДИН КЛАС ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

У роботі [9] (с. 188—197) запропоновано клас ітераційних методів високого порядку збіжності для розв'язування нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Тому що обчислювальні схеми всіх методів з цього класу використовують лише першу похідну, значення якої на кожному кроці обчислюється лише в одній точці, то цікавим є узагальнення методів з [9] для розв'язування операторних рівнянь у банаховому просторі.

Нехай задано рівняння

$$P(x)=0, \tag{1}$$

де P — достатньо гладкий нелінійний оператор, що діє з банахового простору X у банахів простір Y. Розглянемо клас ітераційних методів для розв'язування задачі (1)

$$x_{n+1}=x_n-\sum_{k=1}^{m-1} a_k^{(m)} F_k^{(m)}(x_n), \tag{2}$$

де $F_k^{(m)}(x)=\Gamma(x)\,P\left[x+\sum\limits_{j=1}^{k-1} b_{k,j}^{(m)} F_j^{(m)}(x)\right]$, $\Gamma(x)=[P'(x)]^{-1}$,

$F_1^{(m)}(x)=\Gamma(x)\,P(x)$, $\sum\limits_{j=1}^{0}=0$, $a_k^{(m)}, b_{k,j}^{(m)}$ — дійсні коефіцієнти.

Для вибору конкретного методу з класу (2) величина m фіксується наперед. Коефіцієнти $a_k^{(m)}$, $b_{k,j}^{(m)}$ обчислюються з умов забезпечення порядку збіжності не нижче m, а також найбільшої ефективності [2] для розв'язування певного класу задач. Це здійснюється таким чином. Виділимо з класу (2), наприклад, наступний алгоритм ($m=3$)

$$x_{n+1}=\Phi(x_n), \tag{3}$$

де $\Phi(x) = x - a_1^{(3)} F_1^{(3)}(x) - a_2^{(3)} F_2^{(3)}(x)$, $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$,

$$F_1^{(3)}(x) = \Gamma(x) P(x),\ F_2^{(3)}(x) = \Gamma(x) P[x + b_{2,1}^{(3)} F_1^{(3)}(x)].$$

Після нескладних перетворень з використанням формули Тейлора [4] одержимо

$$\Phi(x) = x - [a_1^{(3)} + a_2^{(3)}(1 + b_{2,1}^{(3)})]\Gamma(x) P(x) -$$

$$-\frac{1}{2} a_2^{(3)} (b_{2,1}^{(3)})^2 \Gamma(x) P''(x)(\Gamma(x) P(x)^2 -$$

$$-\frac{1}{2} a_2^{(3)} (b_{2,1}^{(3)})^3 \Gamma(x) \int_0^1 P'''(x + \tau b_{2,1}^{(3)} \Gamma(x) P(x))(1-\tau)^2 d\tau\, (\Gamma(x) P(x))^3.$$

Відомо [8], що оператор

$$\Psi(x) = x - \Gamma(x) P(x) - \frac{1}{2}\Gamma(x) P''(x)(\Gamma(x) P(x))^2$$

породжує ітераційний процес Чебишева

$$x_{n+1} = \Psi(x_n).$$

Порядок збіжності цього процесу дорівнює трьом.

Розглянемо різницю

$$\Phi(x) - \Psi(x).$$

Використовуючи теорему 5 з [7], приходимо до висновку, що алгоритм (3) має третій порядок збіжності, якщо коефіцієнти $a_1^{(3)}$, $a_2^{(3)}$, $b_{2,1}^{(3)}$ задовольняють умови

$$a_1^{(3)} + a_2^{(3)}(1 + b_{2,1}^{(3)}) = 1, \quad a_2^{(3)} \cdot (b_{2,1}^{(3)})^2 = 1. \tag{4}$$

Таким чином, співвідношення (3)—(4) визначають однопараметричну сім'ю методів третього порядку збіжності.

Цікаво дослідити деякі конкретні значення коефіцієнтів [9]. Зокрема, при $a_1^{(3)} = 0$ $(b_{2,1}^{(3)})^2 = 1 + b_{2,1}^{(3)}$, звідки $b_{2,1}^{(3)} = c = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx$ $\approx -0{,}62$. Тоді одержимо процес

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{c^2}\Gamma_n P(x_n + c\Gamma_n P(x_n)),$$

де $\Gamma_n = \Gamma(x_n)$. При $a_1^{(3)} = a_2^{(3)} = 1$, $b_{2,1}^{(3)} = -1$ дістаємо метод, розглянутий в [6].

Для формулювання теореми типу Л. В. Канторовича [3], яка дає достатні умови збіжності процесу (3)—(4), скористаємося загальними результатами з [1]. Перетворимо процес (3)—(4) до вигляду

$$x_{n+1} = x_n - U_n^{-1}\Gamma_n P(x_n),$$

де
$$U_n^{-1} = I + \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n) +$$

$$+\frac{1}{2}b_{2,1}^{(3)}\Gamma_n\int_0^1 P'''(x_n+\tau b_{2,1}^{(3)}\Gamma_n P(x_n))(1-\tau)^2\,d\tau\,(\Gamma_n P(x_n))^2,$$

$$\Gamma_n = \Gamma(x_n) = [P'(x_n)]^{-1}.$$

Теорема. Нехай виконуються умови:

1) для початкового наближення $x_0 \in X$ існує оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, причому $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$;

2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

3) $\|P''(x)\| \leqslant M$, $\|P'''(x)\| \leqslant N$ в області
$$\Omega_0 = \{x\colon \|x - x_0\| \leqslant g(h_0)\eta_0/(1-w_0)\},$$
де
$$w_0 = Kh_0^2/(1-h_0 g(h_0)),\ g(h_0) = 1 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{|b_{2,1}^{(3)}|}{6}\cdot\frac{N}{B_0 M^2}h_0^2,\ h_0 = B_0 M\eta_0,$$

$$K = \left(\frac{1}{4} + \frac{|b_{2,1}^{(3)}|}{12}\cdot\frac{N}{M^2}\eta_0\right)g(h_0) + \frac{N}{6B_0M^2}g(h_0)(g^2(h_0) + |b_{2,1}^{(3)}|) + \frac{1}{1-v_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{|b_{2,1}^{(3)}|}{6}\cdot\frac{N}{M}\eta_0\right)^2 g(h_0),$$

$$v_0 = \frac{1}{2}h_0 + \frac{|b_{2,1}^{(3)}|}{6}\cdot\frac{N}{B_0M^2}h_0^2 < 1;$$

4) $h_0 g(h_0) < 1$;

5) $s_0^2 = \dfrac{w_0}{1-h_0 g(h_0)} < 1$.

Тоді рівняння (1) має розв'язок $x^* \in \Omega_0$, до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за (3)—(4), причому
$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{g(h_0)}{1-w_0}(1-h_0 g(h_0))^n s_0^{3^n-1}\eta_0.$$

Доведення полягає в елементарній перевірці, що при сформульованих припущеннях виконуються умови 1)—6) теореми 1 з [1]. При цьому використовується представлення оператора, оберненого до U_n^{-1}, за допомогою ряда́ Неймана [5].

Аналогічно до попереднього досліджуються й інші методи з класу (2). Фіксуємо m і, використовуючи результати теореми 5 з роботи [7], підбираємо коефіцієнти $a_k^{(m)}$, $b_{k,j}^{(m)}$. Далі, користуючись загальними результатами з [1], формулюємо відповідну теорему з умовами типу Л. В. Канторовича, яка дає достатні умови збіжності алгоритму. Для цього потрібно лише підрахувати необхідні константи.

Виявляється [9], що відповідним вибором коефіцієнтів $a_k^{(m)}$, $b_{k,j}^{(m)}$ порядок збіжності деяких алгоритмів з класу (2) можна зробити більшим від m.

Наприклад, метод $(m=4)$.

$$x_{n+1} = \Xi(x_n)$$

при

$$\Xi(x) = x - \frac{1}{c^2}\Gamma(x)P(x + c\Gamma(x)P(x)) -$$

$$-\Gamma(x)P\left(x - \frac{1}{c^2}\Gamma(x)P(x + c\Gamma(x)P(x))\right),$$

де $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$ має четвертий порядок збіжності, а при

$$\Xi(x) = x - \Gamma(x)P(x) - \frac{9}{5}\Gamma(x)P[x - \Gamma(x)P(x)] -$$

$$-\frac{1}{5}\Gamma(x)P\{x - \Gamma(x)P(x) - 5\Gamma(x)P[x - \Gamma(x)P(x)]\} -$$

п'ятий. Системи рівнянь для обчислення коефіцієнтів $a_k^{(m)}$, $b_{k,j}^{(m)}$ збігаються з наведеними в [9].

Дещо інший підхід до вивчення методів високого порядку збіжності, обчислювальні схеми яких використовують лише перші похідні, розглянуто в [6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бартиш М. Я. О методах типа Ньютона—Канторовича. — ВИНИТИ, № 5653—73 Деп.
2. Бартіш М. Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь. — «ДАН УРСР, серія А», 1968, № 5.
3. Канторович Л. В. О методе Ньютона. — «Труды математического ин-та АН СССР», 1949, вып. 28.
4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., «Мир», 1971.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
6. Лика Д. К. Некоторые теоремы о сходимости многоточечных итерационных процессов в суперметрических пространствах. — «Известия АН Молдавской ССР, серия физико-технических и математических наук», 1972, № 2.
7. Чернышенко В. М. Общая теория итерационных методов решения нелинейных функциональных уравнений. Автореф. докт. дис., Днепропетровск, 1974.
8. Шафиев Р. А. О некоторых итерационных процессах. — «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1964, т. 4, № 1.
9. Traub J. F. Iterative Methods for the Solution of Equations. Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

УДК 518:517.948

П. С. СЕНЬО

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МАЖОРАНТ ДО ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ТИПУ РУНГЕ

Нехай задано нелінійне операторне рівняння

$$P(x)=0, \tag{1}$$

де P діє з простору X в простір Y; простори X, Y узагальнено нормовані лінійними напівупорядкованими просторами відповідно Z та W [2].

Для розв'язування рівняння (1) застосуємо методи типу Рунге

$$x_{n+1}=x_n-U_n^{-1}P(x_n)\,(n=0,1,2,\cdots), \tag{2}$$

де $U_n=\left[(1-\beta)\,P'(x_n)+\beta P'\left(x_n-\frac{1}{2\beta}\Gamma_n P(x_n)\right)\right]$, $\Gamma_n=[P'(x_n)]^{-1}$,

β — довільне дійсне число, що не дорівнює нулю.

В [1] методи (2) розглянуті для випадку, коли простори X, Y банахові. Тут розглянемо ширший клас рівнянь, а саме рівняння, означені в узагальнено нормованих просторах. Для їх дослідження застосуємо принцип мажорант, розроблений в [3], [4]. При цьому ряд оцінок з [1] суттєво уточнено.

Поряд з рівнянням (1) розглянемо

$$Q(z)=0, \tag{3}$$

де оператор Q діє з Z в W; $|P'(x)|\leqslant Q'(z)$ для $x\longleftrightarrow z$. Рівняння (3) розв'язуватимемо аналогічно (2).

Достатні умови збіжності послідовності $\{x_n\}$, побудованої за (2), до розв'язку рівняння (1) і існування цього розв'язку x^* дає наступна теорема.

Теорема 1. Нехай P і Q неперервні і тричі диференційовні відповідно по шляхах $x_0, x_1, \cdots$ і $z_0, z_1, \cdots$ та виконуються умови:

1) для початкового наближення x_0 існують оператори $\Gamma_0=[P'(x_0)]^{-1}$, $\Delta_0=[Q'(z_0)]^{-1}$, причому Δ_0 — неперервний для $x\longleftrightarrow z$ і $|\Gamma_0|\leqslant-\Delta_0$;

2) $|\Gamma_0 P(x_0)|\leqslant-\Delta_0 Q(z_0)$;

3) $|\Gamma_0 P''(x)|\leqslant-\Delta_0 Q''(z)$;

4) $|\Gamma_0 P'''(x)|\leqslant-\Delta_0 Q'''(z)$; для $x\longleftrightarrow z$.

Тоді зі збіжності процесу типу Рунге для рівняння (3) випливає існування розв'язку x^* і збіжність процесу (2) для рівняння (1), причому $|x^*-x_n|\leqslant z^*-z_n$.

Доведення. На першому кроці (2) можна розглядати як процес послідовних наближень для рівняння $x=U(x)$, де $U(x)=x-U_0^{-1}P(x)$.

Тоді з теореми 1 [3] випливає $|x_1-x_0|\leqslant z_1-z_0$. Тепер на основі умов теореми одержуємо

$$|\Gamma_0 P(x_1)|\leqslant -\Delta_0 Q(z_1).$$

Оператор $I-(I-\Delta_0 Q'(z_1))$ має обернений рівний $[Q'(z_1)]^{-1}Q(z_0)$. Оскільки $|I-\Gamma_0 P'(x_1)|=|-\int\limits_{x_0}^{x_1}\Gamma_0 P''(x)\,dx|\leqslant$ $\leqslant -\Delta_0\int\limits_{z_0}^{z_1}Q''(z)\,dz=I-\Delta_0 Q'(z_0)$, то існує оператор $\Gamma_1=[P'(x_1)]^{-1}$ і при цьому $|\Gamma_1|\leqslant -[Q'(z_1)]^{-1}=-\Delta_1$. Легко перевірити, що при заміні точок x_0 і z_0 на x_1 і z_1 умови теореми будуть виконуватися, а тому аналогічний процес може бути продовжений.

Методом математичної індукції легко виявити, що

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant z_{n+1}-z_n. \tag{4}$$

Тому що процес типу Рунге для рівняння (3) збігається, то з (4) випливає збіжність послідовності $\{x_n\}$, одержаної за (2), а з того, що $Q'(z)$ мажорує $P'(x)$, випливає існування розв'язку (1) $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Теорема доведена.

Границі області єдиності кореня рівняння (1) дає теорема 2.

Теорема 2. Нехай P і Q неперервні тричі диференційовні в

$$|x-x_0|\leqslant z-z_0<z'-z_0 \tag{5}$$

і виконуються умови:

1) для початкового наближення x_0 умови 1), 2) теореми 1;
2) умови 3), 4) теореми 1 в області (5);
3) $Q(z')\leqslant 0$;
4) рівняння (3) має єдиний корінь z^* в інтервалі $z_0\leqslant z\leqslant z'$.

Тоді рівняння (1) має єдиний корінь в області (5), причому кожну точку з (5) можна брати за початкове наближення для (2).

Доведення. $Q(z')\leqslant 0\leqslant z'$ і $z_1=Q(z_0)\geqslant z_0$, бо $z_1=z_0-$ $-V_0^{-1}Q(z_0)$, де $V_0=(1-\beta)Q'(z_0)+\beta Q'\left(z_0-\frac{1}{2\beta}\Delta_0 Q(z_0)\right)=$

$$=Q'(z_0)+\beta Q''(z_0)\left(-\frac{1}{2\beta}\Delta_0 Q(z_0)\right)+\beta\int\limits_0^1 Q'''\left(z_0+t\left(-\frac{1}{2\beta}\Delta_0 Q(z_0)\right)\right)\times$$

$$\times(1-t)\,dt\left(-\frac{1}{2\beta}\Delta_0 Q(z_0)\right)^2.$$

Тепер легко переконатися, що виконуються умови леми і теорем 1, 2 з [4], а це і доводить нашу теорему.

Наслідок (нормований випадок). Нехай X і Y-нормовані простори і

1) $\|\Gamma_0\|\leqslant B_0$;

2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

3) $\|P''(x)\| \leqslant M$, $\|P'''(x)\| \leqslant K$ в області, яка містить точки $x_0, x_1, \ldots$ (досить при $\|x - x_0\| \leqslant z^*$);

4) константи B_0, η_0, M, K такі, що рівняння

$$Q(z) = \frac{\beta}{6} K z^3 + \frac{1}{2} M z^2 - \frac{1}{B_0} z + \frac{\eta_0}{B_0} = 0 \qquad (6)$$

має три дійсні корені.

Тоді ітераційний процес (2) збігається і $\|x^* - x_0\| \leqslant z^*$ (z^* - менший корінь рівняння (6)).

Швидкість збіжності характеризується нерівністю $\|x_n - x^*\| \leqslant z^* - z_n$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бартіш М. Я., Сеньо П. С. Про методи типу Рунге для розв'язування нелінійних операторних рівнянь. — «ДАН УРСР, серія А», 1972, № 9.
2. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., «Гостехиздат», 1950.
3. Канторович Л. В. Принцип мажорант и метод Ньютона. — «ДАН СССР, серия А», 1951, т. 76, № 1.
4. Канторович Л. В. Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант. — «ДАН СССР, серия А», 1951, т. 80, № 6.

УДК 518:519.3

Я. Г. САВУЛА, Г. А. ШИНКАРЕНКО, В. Н. ВОВК

АПОСТЕРІОРНА ОЦІНКА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ, ОДЕРЖАНОГО МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, У ЗАДАЧІ КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ

Метод скінченних елементів (МСЕ) у задачі кручення стержнів [4]

$$-\Delta u = 2, \quad (1) \qquad u|_S = 0, \quad (2)$$

перетин яких займає скінченну однозв'язну область Ω з границею S, як узагальнення методу Рітца, дає наближений розв'язок, який збігається знизу до точного. У зв'язку з цим цікаво одержати наближення зверху та апостеріорну оцінку розв'язку МСЕ. Для цього використаємо метод ортогональних проекцій (МОП) [2].

Застосовуючи відому формулу $-\operatorname{grad} u = \bar{v}$ з рівняння (1) одержимо

$$\operatorname{div} \bar{v} = 2. \qquad (3)$$

Для задачі кручення стержнів, де шуканими величинами є жорсткість стержня на кручення та значення похідних функції $u(x, y)$ в області Ω, достатньо розв'язати задачу (3), (2), тобто знайти такий вектор $\bar{v}$, що задовольняє рівняння (3) і є градієнтом деякої скалярної функції, рівної нулеві на границі S.

Її розв'язок запишемо у вигляді

$$\bar{v} = \bar{V} - \bar{w}, \tag{4}$$

де $\bar{V}$ — довільний вектор, що задовольняє рівняння (3), а вектор $\bar{w}$ задовольняє умову $\operatorname{div} \bar{w} = 0$. Вектор $\bar{w}$ будуємо у вигляді суми

$$\bar{w} = \sum_{i,k} a_{ik} \bar{w}_{ik} \tag{5}$$

за координатними функціями $\bar{w}_{ik}$.
Коефіцієнти a_{ik} визначаються з умови

$$\| \bar{V} - \bar{w} \|^2 = \min.$$

Остання приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i,k} (\bar{w}_{ik}, \bar{w}_{rs})\, a_{ik} = (\bar{V}, \bar{w}_{rs}),\ r, s = 0, 1, 2 \ldots \tag{6}$$

Скалярні добутки $(\bar{w}_{ik}, \bar{w}_{rs})$ і $(\bar{V}, \bar{w}_{rs})$ є інтегралами

$$\int_\Omega \bar{w}_{ik}^T \bar{w}_{rs}\, d\Omega,\ \int_\Omega \bar{V}^T \bar{w}_{rs}\, d\Omega. \tag{7}$$

Систему координатних функцій, що задовольняють умову $\operatorname{div} \bar{w}_{ik} = 0$, можна одержати, вибираючи $\bar{w}_{ik}$ так, щоб їх складові мали вигляд добутків степенів x та y

$$\bar{w}_{ik} = \left\{ \begin{array}{c} kx^i y^{k-1} \\ -ix^{i-1} y^k \end{array} \right\},\ \underset{i+k>0}{i, k = 0, 1, 2, \ldots} \tag{8}$$

(замість x^{-1} та y^{-1} слід підставити нуль).

У випадку, якщо область Ω має дві осі симетрії Ox та Oy, то у формулі (8) досить прийняти $i = 2m+1$ і $k = 2n+1$; одну вісь симетрії Oy, то $i = 2m+1$, $k = 2(n+1)$; одну вісь симетрії Ox, то $i = 2(m+1)$, $k = 2n+1$ $(m, n = 0, 1, 2 \ldots)$.

Маючи розв'язок, побудований МОП, можна дати апостеріорну оцінку енергетичної норми різниці розв'язку u_n, побудованого МСЕ, і u_0 — узагальненого розв'язку задачі (1), (2) [2].

$$\| u_n - u_0 \| < (F(u_n) - \delta)^{1/2}.$$

Величина δ визначається за МОП

$$\delta = \int_\Omega \left\{ \bar{V}^T \left(\sum_{i,k} a_{ik} \bar{w}_{ik} - \bar{V} \right) \right\} dx\, dy.$$

Для обчислення інтегралів типу (7), які для вибраної системи координатних функцій (8) мають вигляд

$$\dot{I} = \int\limits_{\Omega} x^m y^n \, dx \, dy \tag{9}$$

зобразимо область Ω у вигляді об'єднання підобластей T_e трикутного вигляду, $e=1, 2, \ldots, t$. Тут може бути використане роз-

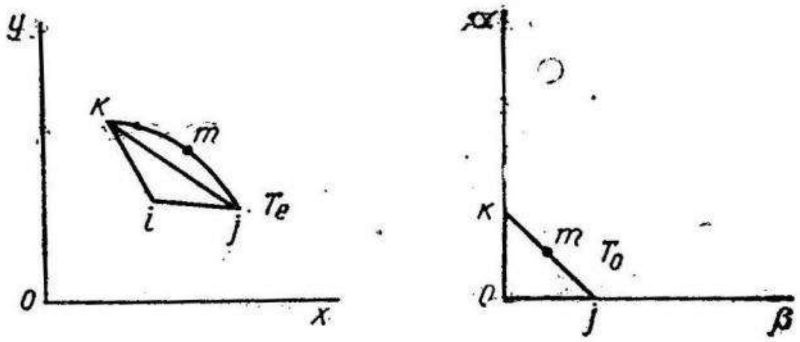


Рис 1.

биття області Ω на елементи таке ж, як і в МСЕ [3]. Виконуючи інтегрування на кожному трикутнику T_e і підсумовуючи по всій області, одержимо

$$\dot{I} = 2\sum_{e=1}^{t} \Delta_e \sum_{r=0}^{m} \sum_{p=0}^{n} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{p} \tag{10}$$

$$\frac{m!\, n!\, (m+n-r-p)!\, (r+p-s-q)!\, (s+q)!}{(m+n+2)!\, (m-r)!\, (r-s)!\, (n-p)!\, (p-q)!\, s!\, q!} x_{rs}^{m} y_{pq}^{n},$$

де Δ_e — площа трикутника з номером e,

$$x_{rs}^{m} = x_i^{m-r} x_j^{r-s} x_k^{s}, \quad y_{pq}^{n} = y_i^{n-p} y_j^{p-q} y_k^{q},$$

(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k) — координати вершин; i, j, k — номери вершин, що входять у трикутник з номером e; t — кількість трикутників у розбитті області Ω.

Інтеграли (9) можна обчислювати також за формулою наближеного інтегрування Родона [1], яка точна для поліномів п'ятого степеня.

У випадку області з криволінійною границею інтегрування будемо виконувати по трикутниках T_e з однією криволінійною стороною. Для цього відобразимо кожний такий трикутник на трикутник T_0 з вершинами (0,0), (1,0), (0,1) (рис. 1), за формулами

$$x(\alpha, \beta) = x_i + c_k \alpha - c_j \beta + (c_k z^* - c_j t^*) \alpha\beta,$$

$$y(\alpha, \beta) = y_i - b_k \alpha + b_j \beta + (b_j t^* - b_k z^*) \alpha\beta, \tag{A}$$

де $z^* = 4z_m - 2$; $t^* = 4t_m - 2$; $z_m = \frac{1}{\Delta}[b_j(x_m - x_i) + c_j(y_m - y_i)]$;

$t_m = \frac{1}{\Delta}[b_k(x_m - x_i) + c_k(y_m - y_i)]$; $\Delta = c_k b_j - b_k c_j$; $c_k = x_j - x_i$,

$c_j = x_i - x_k$, $b_j = y_k - y_i$, $b_k = y_i - y_j$; (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k) — координати вершин трикутника; (x_m, y_m) — координати середини криволінійної сторони. Заміною змінних (А) в інтегралі (9) одержуємо

$$I = \int_{T_e} x^m y^n \, dx \, dy = \Delta_e \int_{T_0} [x(\alpha, \beta)]^m [y(\alpha, \beta)]^n L d\alpha \, d\beta,$$

де

$$L = 1 + z^* \beta + t^* \alpha.$$

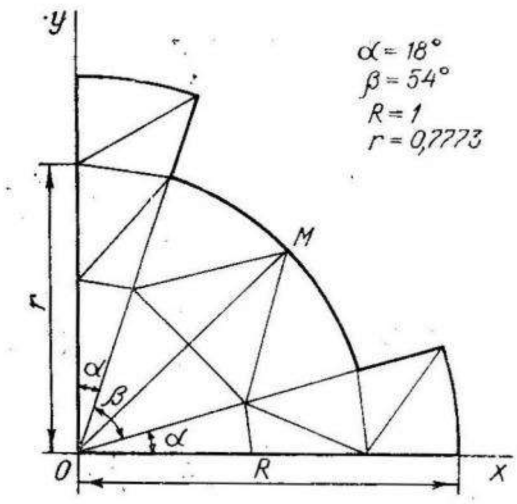


Рис. 2.

Результати обчислень для областей Ω, що мають квадратний зі стороною довжини a і еліптичний із півосями a та b $\left(\frac{a}{b} = 2\right)$ перетини для різного числа координатних функцій і різного розбиття областей на трикутні елементи, наведені в табл. 1, 2. Оцінки розв'язку, одержаного МСЕ для квадратного та еліптичного перетинів, наведені у табл. 3.

Оскільки точність обчислень для квадратного перетину мало залежить від розбиття області на елементи, то вона збільшується з ростом кількості коорди-

Таблиця 1

Значення жорсткості на кручення і максимального дотичного напруження для стержня квадратного перетину

Кількість елементів	Кількість координатних функцій	C/Ga^4	$\tau_{max}/G\theta a$
2	4	0,14074	0,6947
2	9	0,14071	0,6944
8	4	0,14074	0,6944
8	6	0,14065	0,6724
8	7	0,14061	0,6724
8	9	0,14058	0,6710
Точне значення		0,14058	0,6756

натних функцій в апроксимації вектора $\bar{w}$. Для досягнення точності у п'ятому знаку мантиси жорсткості стержня на кручення достатньо взяти 8 або 9 координатних функцій.

Таблиця 2

Значення жорсткості на кручення та максимального дотичного напруження для еліптичного перетину

Кількість елементів	Кількість координатних функцій	Апроксимація області Ω			
		трикутниками		криволінійними трикутниками	
		C/Ga^4	$\tau_{max}/G\Theta a$	C/Ga^4	$\tau_{max}/G\Theta a$
3	4	0,25655	0,8241	0,31392	0,8028
11	4	0,29902	0,7999	0,31405	0,7983
11	9	—	—	0,31404	0,8009
Точне значення		0,31415	0,8	0,31415	0,8

Для еліптичного перетину апроксимація області криволінійними трикутниками значно поліпшує результати. Задовільної точності (у другому знаку мантиси) для жорсткості стержня на кручення можна вже досягнути при розбитті області на три елементи, два з яких криволінійні, і при чотирьох координатних функціях.

Таблиця 3

Оцінка точності наближеного розв'язку

Метод розв'язування	Поперечний перетин стержня			
	квадратний		еліптичний	
	C/Ga^4	$\tau_{max}/G\Theta a$	C/Ga^4	$\tau_{max}/G\Theta a$
МСЕ	0,14057	0,6751	0,30875	0,7683
МОП	0,14058	0,6724	0,31405	0,7983
Точний	0,14058	0,6756	0,31415	0,8
Відносна похибка $\frac{\|u_n-u_0\|}{\|u_n\|}$ в %	2,3	—	17	—

Описана методика використовувалася для одержання двосторонніх наближень максимальних напружень і жорсткості стержня складного поперечного перетину, четверта частина якого разом з вибраним розбиттям на елементи, зображена на рис. 2. Максимальне напруження досягається у точці M перетину і лежить у межах

$$0{,}9898\, G\Theta \leqslant \tau_{max} \leqslant 1{,}2270\, G\Theta.$$

Для жорсткості стержня на кручення одержана така оцінка

$$0{,}7008\, G \leqslant C \leqslant 0{,}7919\, G.$$

Нижні границі у наведених нерівностях одержані МСЕ з використанням апроксимації функцій напружень поліномами Ерміта третього порядку на трикутних елементах [3]. Верхні границі одержані МОП з використанням дев'яти координатних функцій.

Значення жорсткості на кручення для розглянутого стержня, наведене у роботі [4], дорівнює 0,593 G. Воно теж, як і МСЕ, дає оцінку знизу для точного значення, проте менш точну.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1967.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
3. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А. Метод скінченних елементів. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1976.
4. Скоробагатько А. А., Мамуня Л. А. Решение задачи о кручении шлицевого вала. — «Вычислительная и прикладная математика», 1971, вып. 14.

УДК 517

У. А. МИШКОВЕЦЬ

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ ПЛОЩ ДОТИЧНИХ ТРАПЕЦІЙ І НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована у кожній внутрішній точці відрізка. Назвемо дотичною трапецію, яка обмежена прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$ і дотичною до кривої $f(x)$ у довільній точці $(\xi; f(\xi))$, $a<\xi<b$. Як відомо, при цих умовах існує точка $(c; f(c))$, дотична в якій паралельна хорді (теорема Лагранжа). Коли, крім того, друга похідна функції не змінює знаку, то площа дотичної трапеції з дотиком у точці $(c; f(c))$ дає ліпше наближення означеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ порівняно з площею вписаної трапеції.

У зв'язку з цим виникає питання: площа якої дотичної трапеції дає найліпше наближення означеного інтеграла?

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, двічі диференційована в кожній внутрішній точці відрізка і друга похідна знаковизначена. Тоді площа дотичної трапеції у точці дотику $\left(\frac{a+b}{2};\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ дає найліпше наближення означеного інтеграла порівняно з площами інших дотичних трапецій і площею вписаної трапеції.

Доведення. Проведемо дотичну до кривої $f(x)$ в точці $M(\xi; f(\xi))$, $a<\xi<b$, і запишемо її рівняння

$$y = f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi). \tag{1}$$

Функцію відхилення кривої $f(x)$ від дотичної (1) позначимо через

$$R_f(x, \xi) = f(x) - f'(\xi)(x-\xi) - f(x). \tag{2}$$

Зауважимо, що $R_f(x, \xi) \geqslant 0$, коли $f''(x) > 0$ і $R_f(x, \xi) \leqslant 0$, якщо $f''(x) < 0$.

Розглянемо тепер площі дотичних трапецій. Найліпше наближення до площі криволінійної трапеції $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ буде давати та площа дотичної трапеції, для якої площа функції відхилення (2) набирає найменше значення за абсолютною величиною

$$S_f(\xi) = \int\limits_a^b R_f(x, \xi)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b f'(\xi)(x-\xi)\,dx -$$

$$- \int\limits_a^b f(\xi)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - f'(\xi)\frac{b^2-a^2}{2} +$$

$$+ f'(\xi)(b-a)\xi - f(\xi)(b-a).$$

Оскільки $f''(x) \neq 0$, то умова

$$S'_f(\xi) = f''(\xi)(b-a)\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right) = 0 \tag{3}$$

виконується у точці $\xi = \dfrac{a+b}{2}$.

Тому що

$$S''_f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f''\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),$$

то при $f''(x) > 0$ функція (3) у точці $\dfrac{a+b}{2}$ має мінімум, а при $f''(x) < 0$ — максимум.

З формули (3) при $\xi = \dfrac{a+b}{2}$ одержуємо найкраще наближення означеного інтеграла за допомогою площ дотичних трапецій

$$S_f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int\limits_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \tag{4}$$

Доведемо другу частину теореми.

Нехай точка c така, що $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

З доведеного вище маємо

$$\left| S_f(c) \right| \geqslant \left| S_f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|. \quad (5)$$

Знак рівності буде, коли $c = \frac{a+b}{2}$.

Похила сторона дотичної трапеції у точці дотику $(c;\ f(c))$ паралельна похилій стороні вписаної трапеції. Як було пояснено раніше,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| > \left| S_f(c) \right|. \quad (6)$$

З нерівностей (6), (5) і рівності (4) одержуємо

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| > \left| \int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \quad (7)$$

Теорема доведена.

Нерівність (7), яка вказує на перевагу формули прямокутників над формулою трапецій, відома з підручників математичного аналізу. Тут цей факт доводиться дещо простіше і є частиною нашої теореми, яка в певному розумінні дає більше інформації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Коровкин П. П. Математический анализ, ч. 1, М., «Просвещение», 1972.

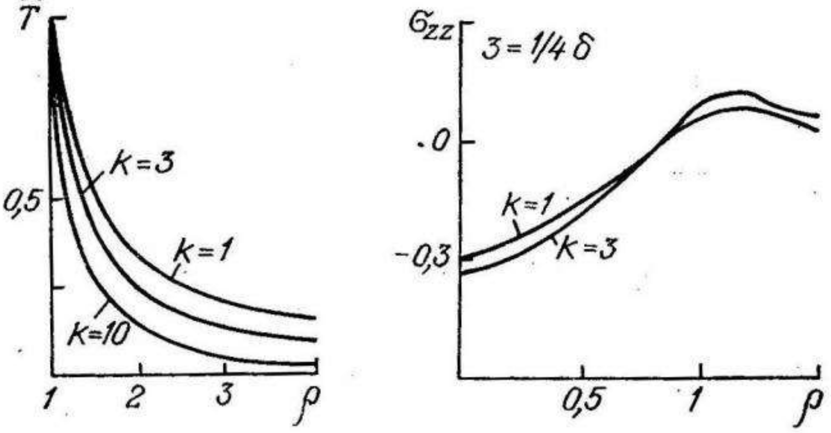
МЕХАНІКА

УДК 539.3

В. П. БАРАН

НЕСТАЦІОНАРНА ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ОСНОВИ

1. Розглядається плоскопаралельний трансверсально-ізотропний шар, спаяний з трансверсально-ізотропним півпростором. Площини ізотропії перпендикулярні до осі oz циліндрич-



ної системи координат r, φ, z. Початок координат розмістимо на верхній границі шару в центрі круга радіуса a, де підтримується температура $T_0(r, \tau)$, а вісь oz спрямуємо всередину шару. Зовні круга проходить теплообмін з зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Вважається, що тепловий контакт між шаром і півпростором неідеальний. Скористаємось умовами неідеального теплового контакту [2], які виведені з припущення, що між контактуючими тілами знаходиться тонкий проміжковий шар, наділений своїми теплофізичними характеристиками. Важливість такого типу задач з технічної точки зору описана в роботах [1, 6].

Отже, потрібно визначити температурне поле і температурні напруження при таких крайових умовах:

$$T^{(1)}(r, z, \tau) = T_0(r, \tau), \ z = 0, \ 0 \leqslant r < a;$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = k T^{(1)}, \ z = 0, \ a < r < \infty; \tag{1.1}$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(1)} = 0, \ z = 0, \ 0 < r < \infty; \tag{1.2}$$

$$\lambda\Delta\left(T^{(1)} + T^{(2)}\right) + 2\left(\lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} - \lambda_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z}\right) = c\,\frac{\partial\left(T^{(1)} + T^{(2)}\right)}{\partial \tau},$$

$$\lambda\Delta\left(T^{(1)}-T^{(2)}\right)+6\left(\lambda_1\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z}\right)-12\,h\left(T^{(1)}-T^{(2)}\right)=$$

$$=c\,\frac{\partial\left(T^{(1)}-T^{(2)}\right)}{\partial\tau},\quad z=H,\ 0\leqslant r<\infty, \tag{1.3}$$

$$u^{(1)}=u^{(2)};\ w^{(1)}=w^{(2)};\ \sigma_{zz}^{(1)}=\sigma_{zz}^{(2)};\ \sigma_{rz}^{(1)}=\sigma_{rz}^{(2)},\ \underset{0\leqslant r<\infty}{z=H}, \tag{1.4}$$

$$T^{(1)}=T^{(2)}=0\ \text{при}\ \tau=0. \tag{1.5}$$

Величини, позначені індексом (1), належать до шару, індексом (2) до півпростору. Для трансверсально-ізотропних тіл відомі такі співвідношення [1]:

$$\sigma_{zz}=\beta A_{33}\,A_{44}\,\nabla^2\left(d\nabla^2+e\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi,$$

$$\sigma_{rz}=-\,\beta A_{33}\,A_{44}\,\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(d\nabla^2+e\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi,$$

$$w=\beta A_{44}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(b\nabla^2+e\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi;\ u=\beta A_{44}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2+a\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi; \tag{1.6}$$

$$T=A_{33}\,A_{44}\left(\mu_1^2\,\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\,\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi.$$

Функція ψ задовольняє у випадку відсутності джерел тепла таке рівняння:

$$\left(\mu_1^2\,\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\,\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_5^2\,\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\sigma^2\,\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi=0. \tag{1.7}$$

2. Застосовуючи інтегральне перетворення Лапласа до (1.1)—(1.7), маючи на увазі (1.5), одержимо ці співвідношення у просторі зображень Лапласа, які позначимо відповідно (2.1)—(2.7).

Застосовуючи перетворення Ханкеля до (2.7), одержимо звичайне диференціальне рівняння, розв'язок якого має вигляд:

$$\tilde{\bar{\psi}}^{(i)}=\sum_{i=1,3}\left[C_j\,e^{\mu_j^{(i)}\,\xi(z-H)}\,\delta_1^i+D_j^{(i)}e^{\mu_j^{(i)}\,\xi(H-z)}\right]+$$

$$+\,C_5\,e^{\sqrt{\mu_5^{(i)^2}\xi^2+\sigma_{(i)}^2 p}\,(z-H)}\,\delta_1^i+D_5^{(i)}\,e^{\sqrt{\mu_5^{(i)^2}\xi^2+\sigma_{(i)}^2 p}\,(H-z)}. \tag{2.8}$$

Застосовуючи перетворення Ханкеля до (2.6), використовуючи формулу обернення і задовольняючи граничним умовам (2.1) і (2.3), одержимо співвідношення

$$D_5^{(1)}(\alpha,\,p)=Q(\alpha,\,p)\,C_5(\alpha,\,p);\ D_5^{(2)}(\alpha,\,p)=G(\alpha,\,p)\,C_5(\alpha,\,p) \tag{2.9}$$

(вирази для Q і G не наводимо внаслідок їх громіздкості) і парні інтегральні рівняння для визначення $C_5(\alpha,\ p)$

$$\int_0^\infty E(\alpha, p) J_0(\alpha\rho)\, d\alpha = \frac{a\overline{T}_0(\rho, p)}{A'_{33} A'_{44}}, \quad 0 < \rho < 1;$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha E(\alpha, p)}{1 - g(\alpha, p)} J_0(\alpha\rho) d\alpha = 0, \quad 1 < \rho < \infty, \tag{2.10}$$

при таких позначеннях:

$$g(\alpha, p) = 1 - \frac{\mu'_5 \alpha \left[e^{-S_1 \delta} + Q(\alpha, p) e^{S_1 \delta}\right]}{Q(\alpha, p) e^{S_1 \delta}(S_1 + ka) - e^{-S_1 \delta}(S_1 - ka)};$$

$$E(\alpha, p) = \frac{1}{a} \vartheta\alpha \left[e^{-s_1 \delta} + Q(\alpha, p) e^{S_1 \delta}\right] C_5(\alpha, p);$$

$$\vartheta = \frac{1}{a^4}\left[\alpha^2 (\mu_5^{(1)^2} - \mu_1^{(1)^2}) + \sigma_{(1)}^2 a^2 p\right]\left[\alpha^2 (\mu_5^{(1)^2} - \mu_3^{(1)^2}) + \sigma_{(1)}^2 a^2 p\right];$$

$$S_{(i)} = \sqrt{\mu_5^{(1)^2} \alpha^2 + \sigma_{(i)}^2 a^2 p}; \quad r = a\rho; \; \xi = \frac{\alpha}{a}; \; \zeta = \frac{z}{a}; \; \delta = \frac{H}{a}.$$

Шукаючи розв'язок рівнянь (2.10) у вигляді [5]

$$E_k(\alpha) = [1 - g_k(\alpha)] \int_0^1 \varphi_k(t) \cos \alpha t\, dt, \tag{2.11}$$

одержимо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi_k(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi_k(t) K_k(x, t)\, dt = F_k(x), \tag{2.12}$$

де

$$F_k(x) = \frac{2a}{\pi A_{33}^{(1)} A_{44}^{(1)}}\left[\overline{T}_{0k}(0) + x\int_0^{\pi/2} \overline{T}'_{0k}(x \sin\Theta)\, d\Theta\right];$$

$$K_k(x, t) = \int_0^\infty [1 - g_k(\alpha)] \cos \alpha t \cos \alpha x\, d\alpha;$$

$$E_k(\alpha) = E(\alpha, p_k); \; \overline{T}_0(\rho, p_k) = \overline{T}_{0k}(\rho);$$
$$g(\alpha, p_k) = g_k(\alpha), \; k = 1, 2, \ldots$$

Після визначення $\varphi_k(t)$ з інтегрального рівняння (2.12), з формули (2.11) знайдемо $C_5(\alpha, p_k)$ і згідно (2.9) — $D_5^{(i)}(\alpha p_k)$ $(i=1,2)$. Для визначення $C_j^{(i)}(\alpha, p_k)$ і $D_j^{(i)}(\alpha, p_k)$ $(i=1,2;\ j=1,3)$ використовуємо умови (2.2) і (2.4). Таким чином, всі коефіцієнти функції $\tilde{\tilde{\psi}}(\alpha, p)$ знайдені. Підставивши $\tilde{\tilde{\psi}}(\alpha, p_k)$ у співвідношення (2.6), одержуємо вирази для визначення температурного поля і температурних у просторі зображень Лапласа в ряді точок p_k.

3. Залишається перейти до оригіналів за деякою кількістю числових результатів. У роботі [4] показано, що оригінали можна записати у вигляді

$$r(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(\tau), \qquad (3.1)$$

де $\varphi_k(\tau)$ деяка повна система ортогональних функцій. Використаємо тригонометричні функції $\sin(2k+1)\Theta$. Тоді

$$r(\tau) = r\left(-\frac{1}{\sigma}\ln\cos\Theta\right) = \Phi(\Theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(2k+1)\Theta, \qquad (3.2)$$

де c_k визначаються з трикутної нескінченної системи рівнянь

$$\left[\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}\right] c_0 + \ldots + \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1}\right] c_{n-k} + \ldots +$$

$$+ c_n = \frac{4^{n+1}}{\pi} \sigma r\left[(2n+1)\sigma\right], \; n = 1, 2, 3, \ldots, \; \sigma = \text{const}. \qquad (3.3)$$

При цьому вважається, що зображення $\bar{r}(p)$ існує при $\mathrm{Re}\, p > 0$ і $r(+0) = 0$. Однак ці припущення не зменшують загальності методу, оскільки замість зображення $\bar{r}(p)$ можна розглянути зображення $\bar{r}(p+a)$, що рівносильно множенню $r(\tau)$ на $e^{-a\tau}$. Якщо $r(+0) \neq 0$, то його слід визначити, користуючись теоремою про граничні значення, і відняти від $r(\tau)$, що рівносильно заміні зображення на $\bar{r}(p) - \frac{r(+0)}{p}$.

Коли потрібно знайти оригінал $r(\tau)$ для деяких значень τ, то слід визначити $\Phi(\Theta)$ для значень $\Theta = \arccos e^{-\sigma\tau}$ (3.2) можна записати у виразі часу

$$r(\tau) = (1 - e^{-2\sigma\tau})^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k U_{2k}(e^{-\sigma\tau}), \qquad (3.4)$$

де $U_n(x)$ поліном Чебишева другого роду.

4. Числовий приклад розглянемо для трансверсально-ізотропного магнію (шар) і пісковика (півпростір). Температура всередині круга змінюється за законом

$$T_0(r, \tau) = T_0(1 - e^{-\frac{\tau}{\gamma}}).$$

Використовуючи теорему про граничні значення, визначимо шукані величини при $\tau \to \infty$.

На рисунку показані деякі графіки температури і напружень: інтегральне рівняння розв'язували зведенням до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи квадратурну формулу Гауса.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

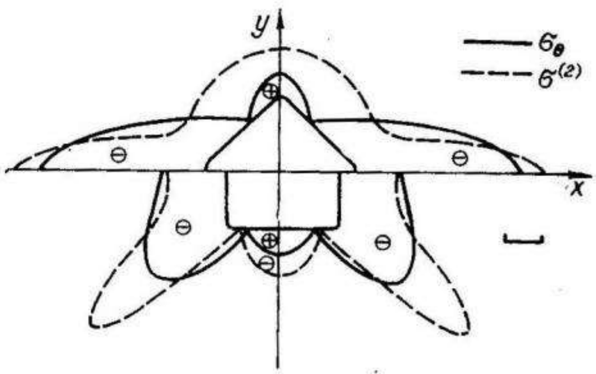
1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. АН СССР, 1962.
2. Подстригач Я. С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью промежуточного слоя. — ИФЖ, 1966, № 10.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., АН СССР, 1967.
4. Papulis A. The new Method Laplas transforms. Quart. Appl. Math. 1957, N 14.
5. Noble B. The solution of Bessel function dual integral equations bu multipling factor metod. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol. 59, № 2, 1963.
6. Padovan Joseph. Thermoelasticity of an elastic anisotropik half space «CANSAM 73, c. r. 4 eme congr. can. néc. appl. Montréal, 1973». Montreal, 1973.

УДК 539.3

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, М. К. ЗВАРИЧ, В. С. ЩУКІН

ВПРЕСОВКА ПРУЖНОГО СТЕРЖНЯ У КРИВОЛІНІЙНИЙ ОТВІР ВАГОМОГО СЕРЕДОВИЩА

Розглянемо однорідний ізотропний гірничий масив, в якому на глибині H від земної поверхні пройдена горизонтальна виробка сталого перерізу. Нехай для запобігання обвалів у виробку вставили з натягом підземну конструкцію (обробку), розрахунок якої будемо проводити за теорією криволінійних стержнів. Тертям на поверхні контакту нехтуємо.



Як відомо з [1, 2], задача про наближене визначення напруженого стану такого масиву зводиться до плоскої задачі теорії пружності для нескінченної області з криволінійним отвором, коли у віддалених від отвору ($H \geqslant 50\,a$, a — найбільший розмір отвору) частинах середовища діють стискаючі зусилля $\sigma_y^{\infty} = -\gamma H$ і $\sigma_x^{\infty} = -\lambda\gamma H$, де γ — об'ємна вага породи; $\gamma = \nu/(1-\nu)$ — коефіцієнт бічного розпору; ν — коефіцієнт Пуассона. Систему декартових координат розмістимо так, як це показано на рисунку.

Нехай функція

$$z = \omega(\zeta) = R\left[\zeta + \frac{m}{s-1}\zeta^{1-s}\right], \ |m| < 1, \ s \neq 1 \qquad (1)$$

конформно відображає зовнішність одиничного кола γ на зовнішність контура отвору L.

У перетвореній області (1) граничні умови такої задачі при відсутності навантаження на стержень набирають вигляду [3] $(r_1 > r_0)$:

$$\int_\gamma F'(\sigma)\,\mathrm{Re}\,U d\sigma = 2\mu \int_\gamma F'(\sigma)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma|\omega'(\sigma)|}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + i\Theta_b + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(r_1 - r_0)\, i\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d\Theta_b}{d\sigma}\right]\omega'(\sigma)\,d\sigma\right\} d\sigma + 2\mu\int_\gamma \varepsilon^* F'(\sigma)\,d\sigma, \qquad (2)$$

$$\int_\gamma V\overline{F'(\sigma)}\,d\bar{\sigma} = g\int_\gamma\left[\frac{e_0}{r_1} - \frac{\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{r_1\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{de_0}{d\sigma}\right)\right]\overline{F(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma,$$

$$\int_\gamma VF'(\sigma)\,d\sigma = g\int_\gamma\left[\frac{e_0}{r_1} - \frac{\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{r_1\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{de_0}{d\sigma}\right)\right]F(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma,$$

де

$$U = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\zeta|\omega'(\zeta)|}\left[\varkappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}\right],$$

$$V = \varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}, \qquad (3)$$

де $F(\zeta) = F_1[\omega(\zeta)]$ — довільна функція, голоморфна в перетвореній області; $\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$ і $\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)]$ — комплексні потенціали, які визначають напружений стан масиву; $g = E^*F$ — жорсткість стержня на розтяг; r_0 і r_1 — відповідно радіуси кривизн нейтрального (для чистого згину) L_0 волокна стержня і крайнього L_1, що контактує з масивом; e_0 — відносне подовження волокна L_0; Θ_b — кут повороту нормального перерізу стержня; $\sigma = e^{i\Theta}$ — афікс точки контура γ.

Функції $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ та $F(\zeta)$, голоморфні зовні кола γ, допускають розклади вигляду

$$\varphi(\zeta) = \Gamma\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k}; \ \psi(\zeta) = \Gamma'\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k};$$

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}. \tag{4}$$

Постійні Γ і Γ' визначаються через компоненти напружень на нескінченності за відомими формулами [5].

Компоненти деформації стержня e_0 і Θ_b подаємо на γ у формі комплексних рядів Фур'є

$$e_0 = \alpha_0 + 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k;$$

$$\Theta_b = \beta_0 + 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k. \tag{5}$$

У випадку повної симетрії задачі відносно осей координат коефіцієнти розкладів (4) з парними, а (5) з непарними індексами дорівнюють нулеві, і a_k, b_k, α_k — дійсні, а β_k — уявні величини.

Підставимо вирази (1), (3)—(5) у граничні умови (2) і виконаємо інтегрування вздовж контура γ. Використовуючи належним чином довільність вибору функції $F(\zeta)$, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів α_k, β_k, a_k і b_k.

Нормальне напруження σ у поперечному перерізі стержня і внутрішні зусилля в ньому визначаються залежностями вигляду [4]

$$\sigma = E^* \left[\frac{r_0}{r} e_0 + (r - r_0)\, i \frac{d\Theta_b}{dt} \right],$$

$$V_\tau = g e_0, \ L_b = g \eta_c r_1 i \frac{d\Theta_b}{dt}. \tag{6}$$

Напруження, які виникають у масиві, визначаються за відомими формулами [5]

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\right],$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \left[\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)\right]. \tag{7}$$

Для ілюстрації розв'язку задачі розглянемо однорідний ізотропний масив, в якому на відстані H від денної поверхні пройдена горизонтальна виробка квадратного перерізу ($s = 4$). У цьому випадку коефіцієнти системи виражаються через інтеграли типу

$$I_{\frac{|n-1|}{2}} = \frac{1}{4i}\int\limits_{\gamma} \frac{\sigma^n\,d\sigma}{\sqrt{(\sigma^4 - m)(1 - m\sigma^4)}} =$$

$$= \begin{cases} m^{\frac{|n-1|}{4}} \int\limits_0^1 \frac{x^{\frac{|n-1|}{2}}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}, & \frac{|n-1|}{2} \text{ — парне}, \\ 0, & \frac{|n-1|}{2} \text{ — непарне}, \end{cases} \tag{8}$$

для яких при великих n справедлива оцінка

$$I_n(m) < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\, m^{\frac{n}{2}},\ n > 0. \tag{9}$$

Нормальні напруження (6) у перерізі стержня з врахуванням (1) і (5) обчислюються за формулою

$$\sigma = E^*\left[\frac{r_0}{r}\alpha^0 + 2\sum_{k=2,4\ldots}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\alpha_k - \frac{k(r-r_0)\beta_k}{R\sqrt{1+m^2-2m\cos 4\Theta}}\right)\cos k\Theta\right], \tag{10}$$

де $r_2 \leqslant r \leqslant r_1$.

Для числових розрахунків, проведених на ЕОМ «Минск-32», вибрані гірничий масив із сланцю і стальна обробка з такими пружними та геометричними характеристиками: $E^* = 2{,}06 \times 10^{11}$ $н/м^2$; $\mu = 5{,}07 \cdot 10^9$ $н/м^2$; $\nu = 0{,}16$; $\varkappa = 2{,}36$; $\lambda = 0{,}1905$; $\delta = 0{,}1$.

Розглянуто два випадки розташування отворів у масиві, яким відповідають: $m = 1/3$ — вершини квадрату лежать на координатних осях і $m = -1/3$ — сторони квадрату паралельні координатним осям.

На рисунку показані графіки розподілу кільцевих напружень σ_Θ вздовж контура отвору і нормальних напружень $\sigma(r = r_2)$ у поперечному перерізі стержня від заданого однорідного напруженого стану на нескінченності $\sigma_x^\infty = -\lambda\gamma H$, $\sigma_y^\infty = -\gamma H$, $\varepsilon^* = 0$ (в частках $9{,}81 \cdot 10^4\,\gamma H$).

Для інших видів отворів задача розв'язується аналогічно.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Динник А. Н., Моргаевский А. Б., Савин Г. Н. Распределение напряжений вокруг подземных выработок. — В кн.: Совещания по управлению горным давлением. М., Изд-во АН СССР, 1938.

2. Лехницкий С. Г. Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения. — В кн.: Сборник трудов по сдвижению горных пород, горному давлению и методике маркшейдерских работ. ВНИМИ, т. XL, 1962.

3. Мартынович Т. Л., Зварич М. К. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки. — «Прикладная механика», 1974, т. 10, вып. 9.

4. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис., Львов, 1970.

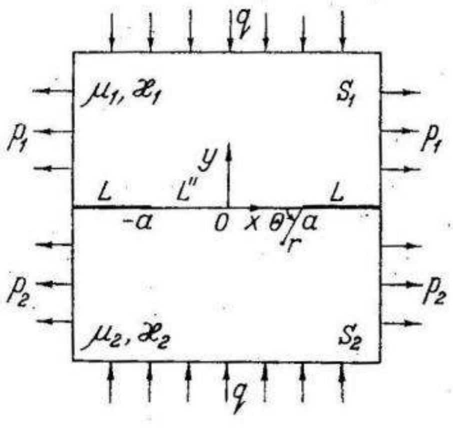
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 539.311

В. К. ОПАНАСОВИЧ

СТИСК КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З ДВОМА НАПІВБЕЗМЕЖНИМИ РОЗРІЗАМИ НА ЛІНІЇ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Дослідимо напружений стан у пластинці, яка складається з двох спаяних між собою ізотропних півплощин з двома напівбезмежними розрізами на лінії розділу матеріалів. На безмежності пластинка стискається рівномірно розподіленим навантаженням q, перпендикулярним лінії спаю, і розтягується рівномірно розподіленим навантаженням p_j ($j=1$, 2), паралельним лінії розподілу матеріалів. Припускається, що під дією даного напруженого стану береги щілин вступають у гладкий контакт по всій своїй довжині.



Для розв'язання задачі виберемо початок декартової системи координат посередині лінії спаю, яку позначимо через L''. Вісь Ox направимо вздовж лінії розрізів, яку позначимо через L (див. рисунок). Все, що належить до верхньої півплощини, будемо позначати індексами «1» або «+», до нижньої — індексами «2» або «—». Довжину лінії спаю позначимо через $2a$.

Згідно з постановкою задачі на дійсній осі виконуються такі співвідношення:

$$Y_y^+ = Y_y^-,\ X_y^+ = X_y^- = 0,\ v^+ - v^- = 0 \text{ на } L,$$

$$(Y_y - iX_y)^+ = (Y_y - iX_y)^-,\ (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L''. \quad (1)$$

Зауважимо, що надалі індекс j приймає лише два значення 1 і 2.

Для розв'язання поставленої проблеми введемо функції Колосова—Мусхелішвілі $\Phi_j(z)$ і $\Psi_j(z)$. Аналітично продовживши функцію $\Phi_j(z)$ із області S_j в область S_{3-j}, як це зроблено в

[2], одержуємо формули (2), статті [1]. Введемо функцію $\Phi_0(z)$ (формула (3) роботи [1]); для її визначення з граничних умов (1) дістаємо крайову задачу

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = 0 \quad x \in L'', \qquad \Phi_0^+(x) - \overline{\Phi_0^+(x)} = 0 \quad x \in L,$$

$$\Phi_0^-(x) - \overline{\Phi_0^-(x)} = 0 \quad x \in L,$$

яка за допомогою простих перетворень зводиться до таких задач лінійного спряження:

$$[\Phi_0(x) + \bar{\Phi}_0(x)]^+ - [\Phi_0(x) + \bar{\Phi}_0(x)]^- = 0 \quad x \in L'' + L,$$

$$[\Phi_0(x) - \bar{\Phi}_0(x)]^+ + [\Phi_0(x) - \bar{\Phi}_0(x)]^- = 0 \quad x \in L,$$

$$[\Phi_0(x) - \bar{\Phi}_0(x)]^+ - [\Phi_0(x) - \bar{\Phi}_0(x)]^- = 0 \quad x \in L''.$$

Розв'язуючи останні, знаходимо

$$\Phi_0(z) = D + (-1)^{j+1} \frac{C_1 z + C_0}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad z \in S_j, \tag{2}$$

де D, C_0, C_1 — дійсні невідомі постійні.

Виходячи з умов задачі, функцію $\Phi_0(z)$ при великих $|z|$ можемо записати у вигляді

$$\Phi_0(z) = K_j + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad z \in S_j, \tag{3}$$

де
$$K_j = \frac{1}{4}[D_j p_j - R_{3-j} p_{3-j} - (3R_{3-j} + D_j) q],$$

вирази для D_j і R_j даються формулами (4′) у роботі [1].

Надалі будемо вибирати таку вітку функції $\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}$, яка в околі нескінченно віддаленої точки має розклад

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{z} + 0\left(\frac{1}{z}\right). \tag{4}$$

Беручи до уваги (3), (4), (2), одержуємо

$$D = \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \quad C_1 = \frac{1}{2}(K_1 - K_2).$$

Сталу C_0 знайдемо з умови симетрії задачі відносно осі Oy, наприклад, що $Y_y(x) = Y_y(-x)$ $x \in L$, але з другого боку

$$Y_y = \frac{1 - g}{A_1} D + \frac{(1 + g)(C_1 x + C_0)}{\sqrt{x^2 - a^2}} \operatorname{sign} x \quad x \in L,$$

звідки випливає, що $C_0 = 0$.

У попередній формулі введено позначення

$$A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\varkappa_j, \quad g = -A_1/A_2.$$

Маючи визначені всі постійні, можемо знайти розподіл напружень на лінії розподілу матеріалів

$$|x| > a$$

$$Y_y = -q + \frac{1+g}{A_1}C_1\frac{|x| - \sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}, \; X_y = 0, \tag{5}$$

$$X_x^+ = p_1 + \frac{3-g}{1+g}(Y_y+q), \; X_x^- = p_2 - \frac{1-3g}{1+g}(Y_y+q),$$

$$|x| < a$$

$$Y_y = -q - \frac{1+g}{A_1}C_1, \quad X_y = \frac{1-g}{A_1}C_1\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$X_x^+ = p_1 - \frac{3-g}{A_1}C_1, \quad X_x^- = p_2 + \frac{1-3g}{A_1}C_1.$$

Як випливає з (5), напруження в околі кінця тріщини не будуть мати коливного характеру.

Цікаво відзначити такий факт. Коли позначити через $n = \mu_1/\mu_2$ і

$$\begin{matrix} n_1 = \min \\ n_2 = \max \end{matrix}\left\{\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_2 - 1}, \frac{p_1(1+\varkappa_1)+(3-\varkappa_1)q}{p_2(1+\varkappa_2)+(3-\varkappa_2)q}\right\},$$

то для $n > n_2$ або $n < n_1$ контактні напруження Y_y в малому околі кінця тріщини будуть від'ємними і необмеженими з внутрішньої сторони тріщини, тоді як для $n_1 < n < n_2$ Y_y — додатні та необмежені, тобто розтягуючі, отже, без додаткових припущень поставлена вище задача фізично нереальна. Крім того, при $n = n_1$ або $n = n_2$ з (5) знаходимо

$$Y_y = -q, \; X_x^+ = p_1, \; X_x^- = p_2, \; X_y = 0 \; (-\infty < x < +\infty),$$

тобто у цьому випадку тріщина не впливає на розподіл напружень у пластинці вздовж дійсної осі.

А тепер детальніше дослідимо поведінку напружень в околі кінців тріщини при різних значеннях n. Для цього запишемо формули розподілу напружень в околі тріщини при $y > 0$

$$\sigma_\theta = -\frac{k_{2m}}{2\sqrt{2r}}\left[e^{-\kappa\beta}\left(\sin\frac{\Theta}{2} + \sin\Theta\cos\frac{\Theta}{2}\right) + \sin\frac{3\Theta}{2}e^{\kappa\beta}\right], \tag{6}$$

$$\sigma_r = -\frac{k_{2m}}{2\sqrt{2r}}\left[e^{-\kappa\beta}\left(3\sin\frac{\Theta}{2} - \sin\Theta\cos\frac{\Theta}{2}\right) - \sin\frac{3\Theta}{2}e^{\kappa\beta}\right],$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{k_{2m}}{2\sqrt{2r}}\left[e^{-\pi\beta}\cos\Theta\cos\frac{\Theta}{2} + \cos\frac{3\Theta}{2}e^{\pi\beta}\right],$$

де k_{2m} — коефіцієнт інтенсивності напружень, який визначається рівністю

$$k_{2m} = (-1)^{m+1}\frac{\sqrt{a}\,e^{\pi\beta}}{A_1}C_1, \tag{7}$$

$$m = \begin{cases} 1 \text{ для кінця } a \\ 2 \text{ для кінця } -a, \end{cases} \qquad \beta = \frac{1}{2\pi}\ln(-g).$$

Виходячи з (7), переконуємося, що тільки при

$$n = \frac{p_1(1+\varkappa_1) + (3-\varkappa_1)q}{p_2(1+\varkappa_2) + (3-\varkappa_2)q},$$

$k_{2m}=0$ і, як випливає з (6), напруження в околі кінців тріщини тільки при цьому значенні n обмежені, а при інших значеннях — необмежені.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Грилицький Д. В., Опанасович В. К. Стиск кусково-однорідної пластинки з фізичною щілиною на лінії розділу матеріалів. У цьому ж Віснику.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 539.375

М. А. РУДЬ, М. П. САВРУК, О. П. ДАЦИШИН

ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА КРАЙОВИХ ТРІЩИН У ПІВПЛОЩИНІ

Нехай пружна ізотропна півплощина послаблена періодичною системою крайових розрізів (тріщин). Довжина тріщин — l, кути між лініями тріщин і краєм півплощини — $\alpha\left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, відстань між вершинами сусідніх тріщин — d. Якщо на нескінченності і на границі півплощини навантаження відсутнє, а вздовж берегів усіх тріщин діють довільні самозрівноважені зусилля

$$p(x) = N^+ - iT^+ = N^- - iT^-,\ 0 \leqslant x < l,$$

то розв'язування такої плоскої задачі теорії пружності зводиться [1] до сингулярного інтегрального рівняння

$$\int_0^l [g'(t)M(t,x) + \overline{g'(t)}N(t,x)]\,dt = \pi p(x),\ 0 \leqslant x < l \tag{1}$$

з ядрами

$$M(t,x)=\frac{\pi}{2d}\left\{e^{-i\alpha}\operatorname{ctg}\left(e^{-i\alpha}\pi\frac{t-x}{d}\right)+e^{i\alpha}\operatorname{ctg}\left(e^{i\alpha}\pi\frac{t-x}{d}\right)+\right.$$

$$+e^{-i\alpha}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\bar{\omega}}{d}\right)+e^{i\alpha}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)+\frac{2\pi ite^{-i\alpha}}{d}\sin\alpha\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)\times$$

$$\left.\times\left[1-e^{2i\alpha}+\frac{4\pi ixe^{2i\alpha}}{d}\sin\alpha\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)\right]\right\};$$

$$N(t,x)=\frac{\pi e^{i\alpha}}{2d}\left\{(1-e^{2i\alpha})\left[\operatorname{ctg}\left(e^{i\alpha}\pi\frac{t-x}{d}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{e^{i\alpha}\pi(t-x)}{d}\operatorname{cosec}^2\left(e^{i\alpha}\pi\frac{t-x}{d}\right)\right]-\frac{2\pi it}{d}\sin\alpha\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi\bar{\omega}}{d}\right)+$$

$$\left.+(1-e^{2i\alpha})\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)+\frac{2\pi ixe^{2i\alpha}}{d}\sin\alpha\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi\omega}{d}\right)\right\},$$

$$\omega=xe^{i\alpha}-te^{-i\alpha}.$$

Для знаходження чисельного розв'язку рівняння (1) скористуємося методом механічних квадратур [5], узагальнивши його на випадок крайових тріщин. Після заміни змінних $t=l(\xi+1)/2$, $x=l(\eta+1)/2$ рівняння (1) запишемо так:

$$\int_{-1}^{1}[\varphi(\xi)K(\xi,\eta)+\overline{\varphi(\xi)}L(\xi,\eta)]\,d\xi=q(\eta),\ |\eta|<1, \qquad (2)$$

де

$$K(\xi,\eta)=\frac{\lambda}{2}M\left(\frac{\xi+1}{2}l,\ \frac{\eta+1}{2}l\right),\ \ L(\xi,\eta)=\frac{\lambda}{2}N\left(\frac{\xi+1}{2}l,\frac{\eta+1}{2}l\right),$$

$$\varphi(\xi)=g'\left(\frac{\xi+1}{2}l\right),\ \ q(\eta)=p\left(\frac{\eta+1}{2}l\right),\ \ \lambda=\frac{l}{d}.$$

Зобразимо функцію $\varphi(\xi)$ у вигляді

$$\varphi(\xi)=\frac{w(\xi)}{s\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (3)$$

і будемо шукати $\omega(\xi)$ у формі інтерполяційного полінома Лагранжа

$$w(\eta)=\frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}w(\xi_m)\sum_{r=0}^{M-1}T_r(\xi_m)T_r(\eta)-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}w(\xi_m) \qquad (4)$$

по чебишовських вузлах (M — натуральне число)

$$\xi_m=\cos\left(\pi\frac{2m-1}{M}\right).$$

У формулах (3) і (4) s — силовий фактор, до якого віднесена вся система зовнішніх навантажень, $T_r(\xi)$ — поліном Чебишова першого роду.

Використовуючи квадратурну формулу Гаусса—Чебишова і її аналог для сингулярного інтеграла, від рівняння (2) прийдемо до системи $M-1$ алгебраїчних рівнянь [5]

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(w_m\alpha_{mk}+\overline{w}_m\beta_{mk})=f_k \quad (k=1,2,\ldots,M-1) \tag{5}$$

для визначення M невідомих $w_m=w(\xi_m)$. Тут

$$\alpha_{mk}=K(\xi_m,\eta_k),\ \beta_{mk}=L(\xi_m,\eta_k),\ f_k=q(\eta_k)/s,\ \eta_k=\cos\left(\frac{k\pi}{M}\right).$$

Систему (5) необхідно доповнити ще одним рівнянням. Оскільки функція $\varphi(\xi)$ в точці виходу тріщини на границю півплощини ($\xi=-1$ або $x=0$) має особливість меншого порядку, ніж $1/\sqrt{1+\xi}$, то приймемо, що

$$w(-1)=0. \tag{6}$$

На основі формул (4) і (6) одержимо останнє рівняння системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{M-m}w_m\,\mathrm{tg}\left(\pi\frac{2m-1}{4M}\right)=0.$$

Для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень k_1 і k_2 матимемо співвідношення [2]

$$k_1-ik_2=-\sqrt{\frac{l}{2}}\,sw(1)=-\sqrt{\frac{l}{2}}\frac{s}{M}\sum_{m=1}^{M}w_m(-1)^m\,\mathrm{ctg}\left(\pi\frac{2m-1}{4M}\right).$$

На машині «Минск-22» були проведені обчислення у випадку перпендикулярних тріщин ($\alpha=\pi/2$), коли на їх берегах діють сталі нормальні (σ) і дотичні (τ) зусилля: $p(x)=-s=-(\sigma-i\tau)$. Нижче для різних значень λ наведені коефіцієнти інтенсивності напружень k_1 і k_2, які одержані при розв'язуванні системи 40 рівнянь ($M=40$).

λ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$k_1/\sigma\sqrt{l}$	1,1214	0,8720	0,6253	0,5104	0,4446	0,3987
$k_2/\tau\sqrt{l}$	1,1214	1,1320	1,2072	1,3291	1,4575	1,5797
λ	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0
$k_1/\sigma\sqrt{l}$	0,3641	0,3372	0,3154	0,2973	0,2821	0,2303
$k_2/\tau\sqrt{l}$	1,6943	1,8022	1,9043	2,0013	2,0940	2,5075

З аналізу числових даних випливає, що при зменшенні відстані між тріщинами коефіцієнт інтенсивності напружень k_1 спадає до нуля, а k_2 монотонно зростає. При $\lambda=0$ одержується результат для однієї крайової тріщини у півплощині [1].

На закінчення відзначимо, що плоска задача теорії пружності для півплощини, яка послаблена системою крайових перпендикулярних до краю півплощини тріщин, розглядалась також методом конформних відображень у роботі [3] і асимптотичним методом — у роботі [6]. Числові результати одержано в роботі [4] для випадку нормального тиску на тріщинах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Койтер В. Т. Обсуждение статьи Бови «Растяжение прямоугольной пластины с симметричными трещинами на кромках». — «Прикладная механика. Серия Е», 1965, т. 32, № 1.

2. Саврук М. П., Дацышин А. П. О взаимодействии системы трещин с границей упругого тела. — «Прикладная механика», 1974, т. 10, вып. 7.

3. Bowie O. L. Solution of plane crack problems by mapping thechnique. — In: Methods of analysis and solution of crack problems. Leiden, Noordhoff Intern. Publ., 1973.

4. Ejke U. B. C. O. A row of external cracks in an elastic half-plane.— «J. Elast.», 1973, v. 3, N 4.

5. Erdogan F. E., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations. — «Quart. Appl. Math.», 1972, v. 29, N 4.

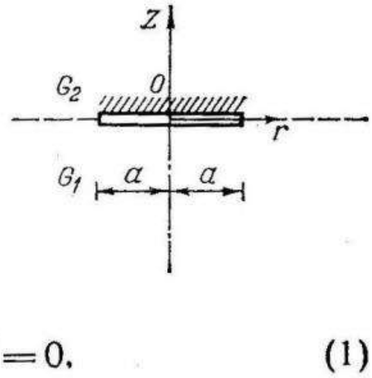
6. Koiter W. T. On the flexural rigidity of a beam weakened by transverse saw cuts. — «Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet.», 1956, Bd. 59, N 4.

УДК 539.385

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, О. П. ПІДДУБНЯК

МІШАНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З ЩІЛИНОЮ

Розглянемо безмежний двошаровий пружний простір, послаблений у площині спряження матеріалів круговою щілиною радіуса a (див. рисунок). Припустимо, що до однієї з площин щілини (наприклад, верхньої) прикладені скручуючі дотичні напруження, на нижній площині щілини задані тангенціальні зміщення. Потрібно визначити пружно-деформований стан тіла.



Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння кручення [1]

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

$$u_\theta(r,z) = \begin{cases} u_\theta^{(1)}(r,z), & z<0, \\ u_\theta^{(2)}(r,z), & z>0 \end{cases}$$

при таких умовах

$$u_\theta^{(j)} \to 0,\ \sqrt{r^2+z^2} \to \infty\ (j=1,2), \tag{2}$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r,0^-) = G_1\, T\left(\frac{r}{a}\right),\ 0 \leqslant r < a, \tag{3}$$

$$u_\theta^{(2)}(r,0^+) = aU\left(\frac{r}{a}\right),\ 0 \leqslant r < a, \tag{4}$$

$$u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)},\ \tau_{\theta z}^{(1)} = \tau_{\theta z}^{(2)},\ z=0,\ r>a. \tag{5}$$

Загальний розв'язок рівняння (1) за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля зобразимо як

$$u_\theta^{(j)} = a\int_0^\infty \varphi_j(\eta)\exp\left[(-1)^{j+1}\eta\zeta\right] J_1(\eta\rho)\,d\eta\ (j=1,2). \tag{6}$$

Умова (2) при цьому буде виконана. Дотичні напруження визначаться у вигляді

$$\tau_{\theta z}^{(j)} = (-1)^{j+1} G_j \int_0^\infty \eta\varphi_j(\eta)\exp\left[(-1)^{j+1}\eta\zeta\right] J_1(\eta\rho)\,d\eta, \tag{7}$$

$$\tau_{r\theta}^{(j)} = -G_j \int_0^\infty \eta\varphi_j(\eta)\exp\left[(-1)^{j+1}\eta\zeta\right] J_2(\eta\rho)\,d\eta. \tag{8}$$

У формулах (6)—(8) $\varphi_j(\eta)$ — шукана функція; $\rho=r/a$, $\zeta=z/a$, G_j — модуль зсуву.

Задовольнивши умови (3)—(5), одержимо систему парних інтегральних рівнянь відносно $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$

$$\int_0^\infty \eta\varphi_1(\eta) J_1(\eta\rho)\,d\eta = T(\rho),\ 0 \leqslant \rho < 1,$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(\eta) J_1(\eta\rho)\,d\eta = U(\rho),\ 0 \leqslant \rho < 1,$$

$$\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)\right] J_1(\eta\rho)\,d\eta = 0,\ \rho > 1,$$

$$\int_0^{\infty} \eta \left[\beta_1 \varphi_1(\eta) + \beta_2 \varphi_2(\eta)\right] J_1(\eta\rho)\, d\eta = 0, \ \rho > 1, \tag{9}$$

де $\beta_j = G_j/(G_1 + G_2)$ $(j = 1,2)$.

Ввівши нові функції $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ таким чином, що

$$\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta) = \int_0^{\infty} H(1-t)\, \Phi_1(t) \cos \eta t\, dt, \tag{10}$$

$$\beta_1 \varphi_1(\eta) + \beta_2 \varphi_2(\eta) = \int_0^{\infty} H(1-t)\, \Phi_2(t) \sin \eta t\, dt,$$

($H(x)$ — функція Хевісайда)

два останні рівняння (9) задовольнимо зразу, як тільки

$$\int_0^1 \Phi_1(t)\, dt = 0. \tag{11}$$

Відзначимо, що $\Phi_1(-t) = \Phi_1(t)$, $\Phi_2(-t) = -\Phi_2(t)$.

Визначивши з (10) $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$, можна знайти різницю дотичних напружень і різницю зміщень на поверхні щілини $(0 \leqslant \rho < 1)$

$$\tau(\rho) = -\frac{d}{d\rho} \int_\rho^1 \frac{\Phi_2(t)\, dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \ \ \tau(\rho(= \beta_1 T(\rho) - (G_1 + G_2)^{-1} \tau^{(2)}_{\theta z}/_{\zeta=0}, \tag{12}$$

$$u(\rho) = -\frac{1}{\rho} \int_\rho^1 \frac{t\Phi_1(t)\, dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \ u(\rho) = \frac{1}{a} u^{(1)}_\theta/_{\zeta=0} - U(\rho). \tag{13}$$

Підставимо $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ у перші два рівняння системи (9), проінтегрувавши перше з них по ρ. Застосуємо до першого рівняння оператор $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^x \frac{\rho d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}$, а до другого оператор $\dfrac{d}{dx}\, x \displaystyle\int_0^x \frac{d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}$ [5]. Врахувавши перший інтеграл Соніна [3] та виконавши необхідні перетворення у класі узагальнених функцій, одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\beta_2 \Phi_1(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\Phi_2(t)\,dt}{t-x} = T_1(x) - \frac{2}{\pi} C_0,$$

$$\Phi_2(t) + \frac{1}{\pi}\beta_1 \int\limits_{-1}^{1} \frac{\Phi_1(t)\,dt}{t-x} = U_1(x) \quad |x| < 1, \tag{14}$$

де C_0 — стала інтегрування,

$$T_1(x) = -\frac{2}{\pi} x \int\limits_0^x \frac{T(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x^2-\xi^2}}; \quad U_1(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx} x \int\limits_0^x \frac{U(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x^2-\xi^2}}.$$

Ввівши функції

$$\psi_{1,2}(x) = N_{1,2}\beta_2 \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \; N_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}, \tag{15}$$

систему (12) розділимо на два незалежних сингулярних рівняння

$$\psi_j(x) + \frac{1}{\pi} N_j \int\limits_{-1}^{1} \frac{\psi_j(t)}{t-x}\,dt = R_j(x), \; |x| < 1 \quad (j = 1, 2), \tag{16}$$

де $$R_j(x) = U_1(x) + N_j\left[T_1(x) - \frac{2}{\pi} C_0\right] \; (j = 1, 2).$$

Точний розв'язок кожного з рівнянь (16) можна подати у вигляді розкладу по ортогональних поліномах Якобі, якщо скористуватись результатом з [2]

$$P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\pi\alpha}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{P_n^{(-\alpha,\alpha)}(t)}{t-x} \times$$

$$\times \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\alpha} dt = \sec\pi\alpha\, P_n^{(\alpha,-\alpha)}(x), \; |x| < 1,$$

у результаті одержимо

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{4\sqrt{\beta_1\beta_2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n P_n^{(\alpha,-\alpha)}(x)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\right],$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} - \right.$$

$$- (-1)^n P_n^{(\alpha, -\alpha)}(x)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\Biggr], \quad |x| < 1, \tag{17}$$

де

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}\ \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}\right),\ A_n = \frac{(n!)^2(2n+1)}{2\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(n+1-\alpha)} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\alpha} P_n^{(\alpha,-\alpha)}(t)\,\{\cos\pi\alpha\,[U_1(t) - U_1(-t)] +$$

$$+ \sin\pi\alpha\,[T_1(t) + T_1(-t)]\}\,dt, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{18}$$

При цьому врахована умова (11), внаслідок якої стала C_0 не впливає на розв'язок задачі.

Маючи функції $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, на основі (10), (6)—(8) можна одержати напруження і зміщення у пружному тілі. Зокрема, при підході до краю щілини різниця дотичних напружень має характер

$$\tau(\rho) \sim k_1(1-\rho)^{-\frac{1}{2}-\alpha} + k_2(1-\rho)^{-\frac{1}{2}+\alpha}, \quad \rho \to 1, \tag{19}$$

де

$$k_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{1}{2^{\frac{1}{2}-\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A_n\Gamma(n+1-\alpha),$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A_n\Gamma(n+1+\alpha). \tag{20}$$

Відзначимо, що формулу (19) можна визначити також, якщо розв'язати відповідну сингулярну задачу теорії пружності [4].

З умови статики

$$\frac{M}{2\pi(G_1+G_2)a^3} = \int_0^1 \rho^2\tau(\rho)\,d\rho = \int_{-1}^{1} t\,\Phi_2(t)\,dt$$

знайдемо величину моменту кручення M зусиль, що прикладені до поверхонь щілини

$$M = \pi(G_1+G_2)a^3\int_{-1}^{1}(t+\alpha)\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\alpha}\{\cos\pi\alpha\,[U_1(t) - U_1(-t)] +$$

$$+ \sin\pi\alpha\,[T_1(t) + T_1(-t)]\}\,dt. \tag{21}$$

Розглянемо приклад, коли $T(\rho)=0$, а $U(\rho)=\varepsilon\rho$, що відповідає крученню двошарового середовища тонкою жорсткою шайбою, розміщеною в щілині при умові, що шайба припаяна лише однією стороною до пружного тіла.

У цьому випадку $A_1=\frac{8\varepsilon}{\pi}\cos\pi\alpha$, $A_n=0$ $(n\geqslant 2)$. За формулами (17) знаходимо

$$\Phi_1(x)=\frac{2\varepsilon}{\pi\sqrt{\beta_1\beta_2}}\cos\pi\alpha\left[(x+\alpha)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}-(x-\alpha)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\right], \quad (22)$$

$$\Phi_2(x)=\frac{2\varepsilon}{\pi}\cos\pi\alpha\left[(x+a)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}+(x-\alpha)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\right].$$

Коефіцієнти k_1 і k_2 приймають значення

$$k_1=-\frac{2^{\frac{1}{2}+\alpha}\Gamma(2-\alpha)\cos\pi\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\varepsilon,\quad k_2=-\frac{2^{\frac{1}{2}-\alpha}\Gamma(2+\alpha)\cos\pi\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\varepsilon. \quad (23)$$

Момент кручення M пов'язаний з кутом повороту ε шайби формулою

$$M=\frac{16}{3}(G_1+G_2)\,a^3\varepsilon\pi\alpha\,(1-\alpha^2)\operatorname{ctg}\pi\alpha. \quad (24)$$

Значення жорсткості пружної системи на кручення $C=M/(G_2\varepsilon a^3)$ та коефіцієнтів $K_1=-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}2^{-\frac{1}{2}-\alpha}k_1$, $K_2=-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}\times 2^{-\frac{1}{2}+\alpha}k_2$ залежно від параметра α поміщені у таблиці.

Значення жорсткості на кручення C та коефіцієнтів K_1 і K_2

α	0	1/8	1/4	3/8	1/2
C	$\frac{16}{3}$	0,581	0,784	1,621	∞
K_1	0,660	0,372	0,162	0,0447	0
K_2	0,564	0,674	0,655	0,429	0

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. Карпенко Л. Н. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. — «Прикладная математика и механика», 1966, т. 30, вып. 3.
3. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
5. Keer L. M. Mixed boundary value problems for a penny-shaped cut. — «Journal of Elasticity», 1975, vol. 5, N 2.

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

МЕХАНІКА

УДК 513

Воспроизведение развертывающихся поверхностей с помощью механизмов. Д е н и с к о С. В. Відтворення розгортних поверхонь за допомогою механізмів. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 3—5 (укр.).

Изучаемые в статье механизмы — сложные пространственные зубчатые передачи, содержащие в себе зубчатую рейку. С рейкой жестко связана прямая, описывающая развертывающуюся поверхность. Доказанные в статье утверждения могут быть использованы при решении задач об экономном расположении деталей машины. Ил. 1. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.913

Об одном квазилинейном уравнении гиперболического типа. К о с т е н к о В. Г. Про одне квазілінійне рівняння гіперболічного типу. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 6—7 (укр.).

Выделено квазилинейное уравнение гиперболического типа, допускающее бесконечную непрерывную группу преобразований, и найдено некоторую совокупность его решений, содержащую пару произвольных сопряженно-гармонических функций. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.913

Асимптотические свойства решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. К о с т е н к о К. С. Асиптотичні властивості розв'язків деяких нелінійних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 7—10 (укр.).

Найдены достаточные условия, при которых все решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка будут ограниченными при $x\to\infty$. Список лит.: 2 назв.

УДК 517.946

Основные граничные задачи в полуплоскости для некоторых эллиптических уравнений с параметром, вырождающихся на границе. П а р а с ю к Л. С., П а р а с ю к Є. М. Основні крайові задачі у півплощині для деяких еліптичних рівнянь з параметром, що вироджуються на границі. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 11—14 (укр.).

В статье рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \lambda = \text{const},$$

для которого в полуплоскости $y>0$ ставятся и решаются в явном виде основные граничные задачи. Список лит.: 6 назв.

УДК 517.946

Теорема типа Лиувилля для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений. К о л о д і й І. М. Теорема типу Ліувілля для узагальнених розв'язків квазілінійних еліптичних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів. «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977. с. 15—19 (укр.).

Рассматриваются вырождающиеся эллиптические уравнения вида

$$\operatorname{div} A(x, u, u_x) = B(x, u, u_x).$$

Для обобщенных решений доказана теорема, аналогичная классической теореме Лиувилля для гармонических функций. Список лит.: 9 назв.

УДК 517.944:947

Решения эллиптических систем в многосвязных областях со щелями. Мартиненко Марія Д. Розв'язки еліптичних систем у многозв'язних областях з щілинами. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів. «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 19—25 (укр.).

Устанавливается структура решений эллиптических систем в многосвязных областях со щелями и указывается метод приведения задачи Дирихле для многосвязных областей со щелями к разрешимым интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.946

Устойчивость решения обратной задачи метагармонического потенциала простого слоя. Лавренюк С. П. Стійкість розв'язку оберненої задачі метагармонійного потенціалу простого шару. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 25—29 (укр.).

Исследуется устойчивость решения обратной задачи метагармонического потенциала простого слоя в трехмерном пространстве. Получена оценка разности

$$\mathrm{mes}\, S^e - \mathrm{mes}\, S^i,$$

где S^e и S^i соответственно поверхности объединения и пересечения двух тел. Эта оценка получена в классе тел, звездных относительно некоторой общей точки. В частности, если тела выпуклые, то получена оценка для разности радиусов-векторов поверхностей S^e и S^i. Список лит.: 4 назв.

УДК 517.94

Существование решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Колодій Б. Я., Шіпка Й. Г. Існування розв'язку нелінійного інтегро-диференціального рівняння. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 29—31 (укр.).

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа Барбашина вместе с начальным условием. Доказывается существование и единственность его решения. Список лит.: 2 назв.

УДК 512.4

О S-кручениях в модулях. Горбачук О. Л., Комарницький М. Я. Про S-кручення в модулях. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 32—34 (укр.).

Изучаются S-кручения над кольцами, в которых каждый правый идеал двусторонний. Описаны регулярные кольца, над которыми все S-кручения расщепляются. В частности, получено следствие, если над кольцом, в котором каждый правый идеал двусторонен, все S-кручения расщеплены, то фактор-кольцо по радикалу Джекобсона есть прямая сумма конечного числа тел. Список лит.: 6 назв.

УДК 517.91/943

Почти периодичность решения одной квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Лісевич Л. М., Блавацька Л. І. Майже періодичність розв'язку однієї квазілінійної системи звичайних диференціальних рівнянь. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львівському ун-ті, 1977, с. 35—37 (укр.).

Обобщена известная теорема Б. П. Девидовича о почти периодичности решения обыкновенного дифференциального уравнения на случай квазилинейной системы. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.946

Вырождение гиперболического уравнения второго порядка в обыкновенное. Ц и м б а л В. М. Виродження гіперболічного рівняння другого порядку у звичайне. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 37—39 (укр.).

Рассматривается задача Коши для гиперболического уравнения второго порядка в R^{n+1} с малым параметром ε при старших производных. При $\varepsilon=0$ уравнение вырождается в обыкновенное. Методом М. И. Вишика—Л. А. Люстерника построено асимптотическое разложение решения этой задачи по степеням малого параметра. Список лит.: 4 назв.

УДК 517.535.4

Оценки индикаторов мероморфных функций целого порядка с положительными нулями и полюсами. Ф р і д м а н О. Н. Оцінки індикаторів мероморфних функцій цілого порядку з додатними нулями та полюсами. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 39—42 (укр.).

Даются оценки снизу и сверху для индикаторов мероморфных функций целого порядка с положительными нулями и полюсами. Указаны примеры, показывающие точность этих оценок. Список лит.: 8 назв.

УДК 517.917

Компактность и нормальность S^p-почти периодических матриц. К о в а л ь ч у к Б. В., Л і с е в и ч Л. М. Компактність і нормальність S^p-майже періодичних матриць. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 42—45 (укр.).

Получены условия S^p-компактности семейства S^p-почти периодических матриц. Вводится понятие S^p-нормальности матрицы и доказывается, что S^p-нормальность матрицы является необходимым и достаточным условием ее S^p-почти периодичности. Список лит.: 4 назв.

УДК 519.21

Двухпараметрическая семья сингулярных распределений. К в і т І. Д. Двопараметрична сім'я сингулярних розподілів. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 46—51 (укр.).

Рассматривается игра двух лиц с двухпараметрическим случайным выигрышем. В зависимости от значений параметров распределение выигрыша может быть несобственным, дискретным, сингулярным или абсолютно непрерывным. Список лит.: 4 назв.

УДК 518:512.36

Определение границы нулей рядов Дирихле с комплексными показателями. К о с т о в с ь к и й О. М., Ц е г е л и к Г. Г. Визначення границі нулів рядів Діріхле з комплексними показниками. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 51—53 (укр.).

С помощью параметров устанавливается граница нулей абсолютно сходящегося в некоторой области ряда Дирихле с комплексными показателями. Список лит.: 3 назв.

УДК 539.3

Оптимальный расчет некоторых элементов электровакуумных приборов. Ощипко Л. Й., Іванків К. С., Юдіна Т. В. Оптимальний розрахунок деяких елементів електровакуумних приладів. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 53—57 (укр.).

Ставится задача оптимального проектирования конструкции, состоящей из оболочек вращения. За целевую функцию принимается масса конструкции, а подпространство проектирования определяется ограничениями на максимальные растягивающие напряжения. Задача решаетя с ипользованием аппарата геометрического программирования. Ил. 2. Список лит.: 3 назв.

УДК 518:517.948

Один класс итерационных методов для решения нелинейных операторных уравнений в банаховом пространстве. Щербина Ю. М. Один клас ітераційних методів для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банаховому просторі. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 57—60 (укр.).

Рассматривается обобщение некоторых многоточечных итерационных методов для решения нелинейных операторных уравнений в банаховом пространстве. Список лит.: 9 назв.

УДК 518:517.948

Применение принципа мажорант к итерационным методам типа Рунге. Сеньо П. С. Застосування принципу мажорант до ітераційних методів типу Рунге. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 61—63 (укр.).

Рассматривается применение принципа мажорант, предложенного Л. В. Канторовичем, к исследованию одного класса многоточечных итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений. Список лит.: 4 назв.

УДК 518:519.3

Апостериорная оценка приближенного решения, полученного методом конечных элементов в задаче кручения стержней. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. М. Апостеріорна оцінка наближеного розв'язку, одержаного методом скінченних елементів, у задачі кручення стержнів. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 63—68 (укр.).

Используется метод ортогональных проекций для апостериорной оценки точности приближенного решения, полученного методом конечных элементов, в задаче кручения стержней. Ил. 2. Табл. 3. Список лит.: 4 назв.

УДК 517

О свойстве площадей касательных трапеций и приближенное вычисление интегралов. Миськовець У. А. Про властивість площ дотичних трапецій і наближене обчислення інтегралів. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 68—70 (укр.).

Доказывается теорема: пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дважды дифференцируемая в каждой внутренней точке отрезка, и вторая производная не меняет знака. Тогда площадь касательной трапеции в точке касания $\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ дает наилучшее приближение определенного интеграла по сравнению с площадями других касательных трапеций и площадью вписанной трапеции. Список лит.: 1 назв.

УДК 539.3

Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для двухслойной среды. Баран В. П. Нестаціонарна осесиметрична задача термопружності для двошарової основи. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 71—75 (укр.).

Рассматривается нестационарная осесимметричная задача термоупругости для двухслойной среды при наличии круговой линии раздела граничных условий на верхней граничной плоскости слоя. Поверхность слоя свободна от внешней нагрузки. Получены формулы распределения температурного поля и температурных напряжений. Рассмотрен числовой пример. Ил. 1. Список лит.: 6 назв.

УДК 539.3

Впрессовка упругого стержня в криволинейное отверстие весомой среды. Мартинович Т. Л., Зварич М. К., Щукін В. С. Впресовка пружного стержня у криволінійний отвір вагомого середовища. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977. с. 75—79 (укр.).

Используя способ представления условий в виде интегральных соотношений, содержащих произвольную голоморфную функцию, решена задача о напряженном состоянии весомой среды с криволинейным отверстием, в которое вставлен стержень. Задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых функций. Приводится числовой пример. Ил. 1. Список лит.: 5 назв.

УДК 539.311

Сжатие кусочно-однородной пластинки с двумя полубесконечными разрезами на линии раздела материалов. Опанасович В. К. Стиск кусково-однорідної пластинки з двома напівбезмежними розрізами на лінії розділу матеріалів. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 79—82 (укр.).

Исследуется задача о сжатии кусочно-однородной пластинки с двумя полубесконечными разрезами на линии раздела материалов при заданном напряженном состоянии на бесконечности. Предполагается, что берега разрезов приходят в гладкий контакт. Приведены формулы для распределения напряжений в окрестности конца трещины. Указано, что при некоторых соотношениях упругих постоянных поставленная задача некорректна. Ил. 1. Список лит.: 2 назв.

УДК 539.375

Периодическая система краевых трещин в полуплоскости. Рудь М. А., Саврук М. П., Дацишин О. П. Періодична система крайових тріщин у півплощині. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики та аналізу, Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 82—85 (укр.).

Рассматривается плоская задача теории упругости для полуплоскости, ослабленной периодической системой краевых разрезов (трещин), выходящих под произвольным углом на границу полуплоскости. Задача сформулирована в виде сингулярного интегрального уравнения относительно функции, характеризующей разрывы перемещений на трещинах. Дается численное решение интегрального уравнения путем сведения его к системе линейных алгебраических уравнений. При этом используются квадратные формулы типа Гаусса. Приводятся числовые значения коэффициентов интенсивности напряжений для случая постоянной нормальной и касательной нагрузки на трещинах при различных относительных расстояниях между ними. Табл. 1. Список лит.: 6 назв.

УДК 539.385

Смешанная задача кручения упругого тела со щелью. Г р и л і ц ь к и й Д. В., П і д д у б н я к О. П. Мішана задача кручення пружного тіла з щілиною. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», вип. 12. Питання математичної фізики і аналізу. Львів, «Вища школа», Вид-во при Львів. ун-ті, 1977, с. 85—90 (укр.).

Рассмотрена осесимметричная задача кручения бесконечного двухслойного упругого пространства, ослабленного в плоскости сопряжения материалов круглой щелью. Предполагается, что на одной поверхности щели заданы смещения, а на другой — касательные напряжения. Задача сведена к двум сингулярным интегральным уравнениям, точное решение которых получено в виде разложений по полиномам Якоби. Ил. 1. Табл. 1. Список лит.: 5 назв.

Министерство высшего и среднего
специального образования УССР

Вестник
Львовского ордена Ленина
государственного университета
им. Ив. Франко

Серия механико-математическая
Выпуск 12

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И АНАЛИЗА

(на украинском языке)

Львов, издательство при Львовском государственнов университете издательского объединения «Вища школа»

Редактор В. В. Войтович
Технічний редактор І. С. Куючко
Художній редактор Е. А. Каменщик
Коректор М. Т. Ломеха

Інформ. бланк № 2408

Здано до набору 30. 09. 1976 р. Підписано до друку 22. 03. 1977 р. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Папір друкарський № 2. 6,25 умовн. друк. арк., 5,95 обл.-вид. арк. Тираж 1000 прим. Видавн. № 289. БГ 03263. Зам. № 3906.
Ціна 72 коп.

Видавництво при Львівському державному університеті видавничого об'єднання «Вища школа», 290000, Львів-центр, вул. Університетська, 1.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління в справах видавництв, поліграфії та книжкової торгівлі. 290000, Львів-центр, вул. Стефаника, 11.

72 коп.