М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.913

К.С. Костенко, канд.фіз.-мат.наук

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+(p_2(x)+r(x))y'+p_3(x)y=0 \qquad /1/$$

доведена така теорема:

Теорема. Нехай у рівнянні /1/ $p_3(x)$ неперервна, а $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x)=\lambda z^{-3}(x)\neq 0$ неперервно диференційовані функції відповідно один, два і три рази на інтервалі $x_0 \leq x < \infty$, а також

$$A(x)=z^{-2}(x)\left(\mu-5z''(x)z(x)+\tfrac{5}{2}z'^2(x)\right),\ B(x)=\lambda z^{-3}(x)+A'(x),$$

$$C(x)=\left(\nu-\tfrac{3}{2}\lambda z'(x)\right)z^{-4}(x)+0{,}3A''(x)+(0{,}3A(x))^2,$$

$\pm\beta_1$ – дійсні корені рівняння $\beta^6+2\mu\beta^4+(\mu^2-4\nu)\beta^2-\lambda^2=0$, де μ, λ, ν – дійсні сталі, причому $a_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\right)=0$, $-a_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\right)<0$. Тоді за умов

$$z(x)>0,\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x,x_0)=\infty,\ \int_{x_0}^{\infty}b_1(x)dx<\infty,\ \lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_i(x)z^2(x)=0\quad(i=3,4),$$

або

$$z(x)<0,\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x,x_0)=-\infty,\ \int_{x_0}^{\infty}b_2(x)dx<\infty,\ \lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_i(x)z^2(x)=0\quad(i=1,2),$$

де

$$\mathcal{P}_1(x)=a_2\Big[\left(6\beta_1z''(x)z(x)+3\beta_1z'^2(x)-4a_2^2z'(x)+\beta_1(2a_2^2-\beta_1^2)\right)\left(A(x)-p_1(x)\right)+$$

$$+4z(x)\left(3\beta_1z'(x)-a_2^2\right)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\right)+4\beta_1z^2(x)\left(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_2(x)=a_2(a_2^2-\beta_1^2)\Big[\left(3z''(x)z(x)+\tfrac{3}{2}z'^2(x)-2\beta_1z'(x)+\tfrac{1}{2}\beta_1^2\right)\left(A(x)-p_1(x)\right)+2z(x)\left(3z'(x)-\right.$$

$$\left.-\beta_1\right)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\right)+2z^2(x)\left(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_3(x)=(a_2+\beta_1)^2\Big[\left(\tfrac{3}{2}z''(x)z(x)+\tfrac{3}{4}z'^2(x)+(\beta_1-2a_2)z'(x)+\left(\tfrac{\beta_1}{2}-a_2\right)^2\right)\left(A(x)-p_1(x)\right)+$$

$$+\zeta(x)\left(3\zeta'(x)+\beta_1-2a_2\right)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\right)+\zeta^2(x)\left(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_4(x)=(a_2-\beta_1)^2\Big[\Big(\frac{3}{2}\zeta''(x)\zeta(x)+\frac{3}{4}\zeta'^2(x)+(\beta_1+2a_2)\zeta'(x)+\left(\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)^2\Big)\left(A(x)-p_1(x)\right)+$$

$$+\zeta(x)\left(3\zeta'(x)+\beta_1+2a_2\right)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\right)+\zeta^2(x)\left(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$b_1(x)=4\zeta(x)\max_x\left[|\mathcal{P}_1(x)|,\,|\mathcal{P}_2(x)\varphi(x,x_0)|,\,|\mathcal{P}_3(x)|,\,|\mathcal{P}_4(x)|\right];$$

$$b_2(x)=4|\zeta(x)|\max_x\left[|\mathcal{P}_1(x)|,\,|\mathcal{P}_2(x)|,\,|\mathcal{P}_3(x)|,\,|\mathcal{P}_4(x)|\right];$$

$$W=-2a_2\left(\beta_1^2-a_2^2\right)^2;\quad \varphi(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}\zeta^{-1}(t)\,dt,$$

рівняння /I/ має фундаментальну систему розв"язків, асимптотичне зображення яких за $x\to\infty$ дають формули:

$$y_1(x,x_0)=\zeta^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\frac{\beta_1}{2}\varphi(x,x_0)\right]\left(1+o(1)\right),\qquad x\to\infty; \qquad /2/$$

$$y_2(x,x_0)=\zeta^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\frac{\beta_1}{2}\varphi(x,x_0)\right]\varphi(x,x_0)\left(1+o(1)\right),\quad x\to\infty; \qquad /3/$$

$$y_3(x,x_0)=\zeta^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right]\left(1+o(1)\right),\quad x\to\infty; \qquad /4/$$

$$y_4(x,x_0)=\zeta^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[-\left(\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right]\left(1+o(1)\right),\quad x\to\infty. \qquad /5/$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв"язків одержуємо формальними диференціюваннями головних частин формул /2/ - /5/.

Те ж саме наявне для похідних другого і третього порядку цих розв"язків за додаткових умов

$$\lim_{x\to\infty}\left(A(x)-p_1(x)\right)\zeta^2(x)=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(p_1'(x)-r(x)\right)\zeta^3(x)=0.$$

Список літератури: I. К о с т е н к о Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. - "Дифференциальные уравнения", 1974, т. 10, № 10. 2. П а в л ю к І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

УДК 517.946

М.С.Волошина, канд.фіз.-мат.наук, Г.С.Гупало, канд.фіз.-мат.наук, Г.П.Лопушанська, канд.фіз.-мат.наук

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИЛЬНО ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ БАГАТОЗВ"ЯЗНОЇ ОБЛАСТІ

У роботі В.Д.Купрадзе /4/ для тривимірного рівняння Лапласа і в роботі М.С.Волошиної /1/ для сильно еліптичної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами у багатозв"язній області побудовано розв"язок задачі Діріхле у вигляді комбінованого потенціалу /мікст-потенціалу/ подвійного і простого шарів з невідомою густиною. Важливо, що для визначення густини отримують інтегральне рівняння /систему інтегральних рівнянь у /1//, яке розв"язується за першою теоремою Фредгольма.

У цій статті для самоспряженої системи рівнянь Ейлера

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \qquad /1/$$

що відповідає основній варіаційній задачі для додатно визначеного функціоналу

$$\int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} A_{kl} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} dx \geq \gamma^2 \int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} dx,$$

де $A_{kl} = A_{lk} = A'_{kl}$ /$'$ – транспонування/ – постійні квадратні матриці порядку p; V – деяка область в R^n, $n \geq 3$; γ – дійсне число, розглядається задача Діріхле, коли на границі області