вості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

УДК 517.946

М.С.Волошина, канд.фіз.-мат.наук, Г.С.Гупало, канд.фіз.-мат.наук,
Г.П.Лопушанська, канд.фіз.-мат.наук

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИЛЬНО ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ БАГАТОЗВ"ЯЗНОЇ ОБЛАСТІ

У роботі В.Д.Купрадзе [4] для тривимірного рівняння Лапласа і в роботі М.С.Волошиної [1] для сильно еліптичної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами у багатозв"язній області побудовано розв"язок задачі Діріхле у вигляді комбінованого потенціалу /мікст-потенціалу/ подвійного і простого шарів з невідомою густиною. Важливо, що для визначення густини отримують інтегральне рівняння /систему інтегральних рівнянь у [1]/, яке розв"язується за першою теоремою Фредгольма.

У цій статті для самоспряженої системи рівнянь Ейлера

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \qquad /1/$$

що відповідає основній варіаційній задачі для додатно визначеного функціоналу

$$\int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} A_{kl} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} dx \geqslant \gamma^2 \int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} dx ,$$

де $A_{kl} = A_{lk} = A'_{kl}$ /$'$ – транспонування/ – постійні квадратні матриці порядку p ; V – деяка область в R^n , $n \geqslant 3$; γ – дійсне число, розглядається задача Діріхле, коли на границі області задана узагальнена вектор-функція. Для рівняння Лапласа задача в такій постановці розглядалась у роботі [2].

Нехай Ω - область в R^n, $n \geqslant 3$, обмежена замкненими $n-1$ - вимірними поверхнями S_0, S_1, ... , S_m класу C^∞, які не перетинають одна одну, причому S_0 містить в собі всі інші поверхні / S_0 може бути відсутньою/. Позначимо через $S=\bigcup_{i=0}^{m} S_i$ повну границю області Ω. Вважатимемо, що існує таке додатне число ε_1, коли поверхня S_ε / $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ /, яка знаходиться на відстані ε по внутрішній нормалі в кожній точці від поверхні S, не має самоперетинів. Через $[D(S)]^p$ позначимо простір нескінченно диференційованих /основних/ вектор-функцій $\varphi(y)=(\varphi_1(y),\dots,\varphi_p(y))$ на S, через $[D'(S)]^p$ - простір лінійних неперервних функціоналів над $[D(S)]^p$ /узагальнених вектор-функцій $F=\begin{pmatrix}F_1\\ \vdots\\ F_p\end{pmatrix}$ /, через $<\varphi,F>$ - дію $F\in[D'(S)]^p$ на $\varphi\in[D(S)]^p$. Згідно з роботою [3],

$$<\varphi,F>=\sum_{i=1}^{p}<\varphi_i,F_i>,\ \varphi_i\in D(S),\quad F_i\in D'(S).$$

<u>Постановка задачі</u>. Нехай $F\in[D'(S)]^p$. В області Ω знайти розв"язок $u(x)$ системи /I/, який на границі S набуває узагальнених граничних значень F, тобто

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)u(x_\varepsilon)dS_\varepsilon=<\varphi,F> \qquad /2/$$

для кожної $\varphi\in[D(S)]^p$, і якщо S_0 відсутня, то задовольняє на безмежності умову $u(x)=O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)$.

Тут $\varphi(x_\varepsilon)=\varphi(y)$, якщо $x_\varepsilon=y+\varepsilon\nu(y)$, $y\in S$, $\nu(y)$ - орт внутрішньої нормалі до поверхні S в точці y.

Нехай $K(x,y)=G_0(x,y)+\omega_0(x,y)$ ядро аналога змішаного потенціалу подвійного і простого шарів /мікст-потенціалу/

$$v(x)=\int_S\mu(y)\,K(x,y)\,dS,$$

де $\omega_0(x,y)$ – фундаментальна матриця системи /I/; $G_0(x,y)$ – ядро інтеграла типу потенціала задачі Діріхле для системи /I/. Використовуючи результати робіт [1,2], можна довести такі леми:

Лема I. Для кожної $\varphi\in[D(S)]^p$ рівномірно відносно $y\in S$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)K(x_\varepsilon,y)dS_\varepsilon=\varphi(y)+\int_S\varphi(x)K(x,y)dS.$$

Лема 2. Оператор $(B\varphi)(y)\equiv\int_S\varphi(x)K(x,y)dS$ діє в $[D(S)]^p$

Лема 3. Нехай $\varphi\in[D(S)]^p$, $F\in[D'(S)]^p$, $f(x_\varepsilon,y)$ – матриця з елементами із $\overset{\infty}{C}(S_\varepsilon\times S)$, тоді

$$\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\langle f(x_\varepsilon,y),F\rangle dS_\varepsilon=\langle\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)f(x_\varepsilon,y)dS_\varepsilon,F\rangle$$

Лема 4. Перетворення

$$\langle g,T\rangle=\langle\varphi_g,F\rangle, \qquad /3/$$

де $g\in[D(S)]^p$, φ_g – розв"язок системи інтегральних рівнянь

$$\varphi(y)+\int_S\varphi(x)K(x,y)dS=g(y), \qquad /4/$$

визначає ізоморфізм простору $[D'(S)]^p$ на себе. Обернене перетворення визначається так:

$$\langle\varphi,F\rangle=\langle\varphi(y)+\int_S\varphi(x)K(x,y)dS,T\rangle$$

для кожної $\varphi\in[D(S)]^p$.

Твердження леми 4 випливає із леми 2 і єдиності розв"язку системи інтегральних рівнянь /4/ [1].

Теорема. Нехай $F\in[D'(S)]^p$ — узагальнена вектор-функція T, визначена згідно з /3/ і /4/, тоді вектор-функція

$$u(x)=\langle K(x,y),T\rangle,\quad x\in\Omega,\ y\in S,$$

є розв"язком розглядуваної узагальненої задачі Діріхле.

Доведення випливає із лем I,3.4.

Все сказане вище переноситься на випадок однорідної системи другого порядку зі змінними коефіцієнтами при умові існування для неї фундаментальної матриці в усьому нескінченному дійсному просторі R^n

Список літератури: I. В о л о ш и н а М.С. Про задачу Діріхле для одного класу сильно еліптичної системи рівнянь в багатозв"язній області. - "Доп. АН УРСР", сер. А, 1972, № II. 2. В о л о ш и н а М.С., Г у п а л о Г.-В.С. Розв"язок узагальненої задачі Діріхле для багатозв"язної області. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1975, вип. IO. 3. Г е л ь ф а н д И.М., Ш и л о в Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958. 4. К у п р а д з е В.Д. К решению задачи Дирихле для многосвязной области. - "Сообщения Грузинского филиала АН СССР", 1940, № I.

УДК 539. 3; 534.I

В.Г.Костенко, канд.фіз.-мат.наук

ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ КУСКОВО-ГЛАДКОЇ ПРУЖНОЇ ОБОЛОНКИ З АКУСТИЧНИМИ СЕРЕДОВИЩАМИ

За допомогою основної теореми енергії теорії пружності для пружної оболонки та спеціальних інтегралів по областях, заповнених акустичними середовищами, у роботі /I/ доведено єдиність розв"язку задачі про взаємодію гладкої ізотропної пружної оболонки з акустичними середовищами.

У кутових точках і на ребрах взаємодіючої з акустичними середовищами кусково-гладкої пружної оболонки напруження, а також похідні зміщень точок акустичних середовищ можуть мати свої особливості. Тому необхідно визначити умови, за яких основна теорема енергії теорії пружності та спеціальні інтеграли в акустичних середовищах зберігають такий же вигляд, як і для гладкого випадку.