Доведення випливає із лем I,3,4.

Все сказане вище переноситься на випадок однорідної системи другого порядку зі змінними коефіцієнтами при умові існування для неї фундаментальної матриці в усьому нескінченному дійсному просторі R^n

Список літератури: I. В о л о ш и н а М.С. Про задачу Діріхле для одного класу сильно еліптичної системи рівнянь в багатозв"язній області. - "Доп. АН УРСР", сер. А, 1972, № II. 2.В о л о ш и н а М.С., Г у п а л о Г.-В.С. Розв"язок узагальненої задачі Діріхле для багатозв"язної області. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1975, вип.IO. 3. Г е л ь ф а н д И.М.,Ш и л о в Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958. 4. К у п р а д з е В.Д. К решению задачи Дирихле для многосвязной области. - "Сообщения Грузинского филиала АН СССР", 1940,№ I.

УДК 539. 3; 534.I

В.Г.Костенко, канд.фіз.-мат.наук

ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ КУСКОВО-ГЛАДКОЇ ПРУЖНОЇ ОБОЛОНКИ З АКУСТИЧНИМИ СЕРЕДОВИЩАМИ

За допомогою основної теореми енергії теорії пружності для пружної оболонки та спеціальних інтегралів по областях, заповнених акустичними середовищами, у роботі /I/ доведено єдиність розв"язку задачі про взаємодію гладкої ізотропної пружної оболонки з акустичними середовищами.

У кутових точках і на ребрах взаємодіючої з акустичними середовищами кусково-гладкої пружної оболонки напруження, а також похідні зміщень точок акустичних середовищ можуть мати свої особливості. Тому необхідно визначити умови, за яких основна теорема енергії теорії пружності та спеціальні інтеграли в акустичних середовищах зберігають такий же вигляд, як і для гладкого випадку.

Не зменшуючи загальності, припустимо, для простоти /тут всюди приймаються позначення роботи [1] /, що на частині S_κ межі $S=S_1\cup S_2$ оболонки V знаходиться лише ребро l_κ та кутова точка O_κ /$\kappa=$ 1,2/. Нехай d - мінімум відстаней між точками S_1 та S_2. Розглянемо тоді циліндр $Ц_\kappa$ з поверхнею $П_\kappa$, криволінійною віссю l_κ і радіусом ортогонального до l_κ перерізу $r_\kappa<\frac{d}{4}$, а також кулю $Ш_\kappa$ з поверхнею C_κ, центром O_κ і радіусом $\rho_\kappa<\frac{d}{2}$ /$\kappa=1,2$ /. Припускаючи, що початок системи координат знаходиться в акустичному середовищі K, опишемо сферу S_R достатньо великого радіуса R з центром у початку координат і розглянемо області $\Omega_R^*=$ $=\Omega_R\setminus Ц_1\cup Ш_1$, $V^*=V\setminus Ц_1\cup Ш_1\cup Ц_2\cup Ш_2$, $K^*=K\setminus Ц_2\cup Ш_2$. Об"єднання всюди теоретико-множинні. У замкнутій області V^* напруження σ_{ij} та $W_i=\frac{\partial U_i}{\partial t}$ не мають особливостей. У зв"язку з цим основна теорема енергії теорії пружності [2] для V^* набере того ж вигляду, що й для гладких оболонок, бо в обох випадках використовується формула Остроградського, тобто

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V^*}\left\{\frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{3}W_i^2+\mu\sum_{ij=1}^{3}\varepsilon_{ij}^2+\frac{\lambda}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}\right)^2\right\}dV^*=$$
$$=\iint\limits_{S_1^*}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_iW_i\,dS_1^*-\iint\limits_{S_2^*}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_iW_i\,dS_2^*+\iiint\limits_{V^*}\sum_{i=1}^{3}F_iW_i\,dV^*, \qquad /1/$$

де $\mathcal{P}_i=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ji}\cos(n,x_j)$, F_i - компоненти сил внутрішніх збудників коливань оболонки; n - зовнішня до S_1^* і внутрішня до S_2^* нормаль межі області V^*. При цьому $S_\kappa^*\to S_\kappa$, $V^*\to V$, якщо $r_\kappa\to 0$, $\rho_\kappa\to 0$.

Очевидно, для того щоб

$$\lim_{\substack{r_\kappa\to 0\\ \rho_\kappa\to 0}}\iint\limits_{S_1^*\cup S_2^*}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_iW_i\,dS^*=\iint\limits_{S_1\cup S_2}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_iW_i\,dS$$

достатньо встановити, що

$$\lim_{\substack{r_\kappa\to 0\\ \rho_\kappa\to 0}}\iint\limits_{S_\kappa^*\cap П_\kappa\cup C_\kappa}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_iW_i\,dS^*=0 \qquad (\kappa=1,2).$$

Розглянемо циліндричну систему координат з віссю l_κ та сферичну систему координат з початком в O_κ. Тоді

$$\Big|\iint\limits_{S_\kappa^*\cap \Pi_\kappa \cup C_\kappa} \sum_{i=1}^{3} \mathcal{P}_i W_i\, dS^*\Big| \le \iint\limits_{S_\kappa^*\cap \Pi_\kappa} \sum_{i=1}^{3} |\mathcal{P}_i W_i|\, dS^* + \iint\limits_{S_\kappa^*\cap C_\kappa} \sum_{i=1}^{3} |\mathcal{P}_i W_i|\, dS^* =$$

$$= \int\limits_{l_\kappa^*} dl_\kappa \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sum_{i=1}^{3} \Big|\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} \cos(n, x_j)\Big| |W_i|\, r_\kappa\, d\varphi + \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \sum_{i=1}^{3} \Big|\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} \cos(n, x_j)\Big| |W_i|\, \rho_\kappa^2\, d\varphi \xrightarrow[r_\kappa, \rho_\kappa \to 0]{} 0,$$

якщо у довільно малій околиці точок ребра $l_\kappa / l_\kappa^* \subset l_\kappa$, $r_\kappa > 0$, $0 \le \varphi_1, \varphi_2 \le 2\pi$ /

$$\lim_{r_\kappa \to 0} \sigma_{ji} r_\kappa = 0, \quad |W_i| \le c \qquad /2/$$

та в околиці кутової точки O_κ $/0 \le \theta_1, \theta_2 \le \pi, 0 \le \varphi_3, \varphi_4 \le 2\pi, \rho_\kappa > 0$ /

$$\lim_{\rho_\kappa \to 0} \sigma_{ji} \rho_\kappa^2 = 0, \quad |W_i| \le c \qquad /3/$$

$/\kappa = 1, 2$; $i, j = 1, 2, 3$ /. Нехай умови /2/, /3/ виконуються і вектор функція $\vec{F}(F_1, F_2, F_3)$ інтегрована по області V. Переходячи тоді в /I/ до границі при $r_\kappa \to 0$ і $\rho_\kappa \to 0$, одержуємо основну теорему енергії кусково-гладкої пружної ізотропної оболонки в тому ж вигляді, що й для гладких оболонок

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V \Big\{ \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{3} W_i^2 + \mu \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2 + \frac{\lambda}{2} \Big(\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii} \Big)^2 \Big\} dV = \iint\limits_{S_1} \sum_{i=1}^{3} \mathcal{P}_i W_i\, dS_1 - \qquad /4/$$

$$- \iint\limits_{S_2} \sum_{i=1}^{3} \mathcal{P}_i W_i\, dS_2 + \iiint\limits_V \sum_{i=1}^{3} F_i W_i\, dV.$$

Аналогічно доведено, що для функції $\psi(x, y, z, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ в Ω_κ, де φ – потенціал зміщень точок акустичного середовища Ω, навна формула

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\Omega_\kappa} \Big[\frac{1}{B^2} \Big(\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big)^2 + \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Big)^2 \Big] d\Omega = 2 \iint\limits_{S_\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial r}\, dS_\kappa - 2 \iint\limits_{S_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cos(n, x_i)\, dS_1, \qquad /5/$$

якщо в околиці точок ребра l_1

$$\lim_{r_1 \to 0} r_1 \frac{\partial \psi}{\partial r_1} = 0, \quad \Big|\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big| \le c \qquad /6/$$

та в околиці кутової точки O_1

$$\lim_{\rho_1 \to 0} \rho_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} = 0, \quad \Big|\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big| \le c. \qquad /7/$$

Те ж саме для функції $\chi(x,y,z,t)=\frac{\partial\mu}{\partial t}$ в K , де μ – потенціал зміщень точок акустичного середовища K

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_K\left[\frac{1}{\beta_2^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\right)^2\right]dK=2\iint\limits_{S_2}\frac{\partial\chi}{\partial t}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\cos(n,x_i)\,dS_2\,, \qquad /8/$$

якщо

$$\lim_{r_2\to0} r_2\frac{\partial\chi}{\partial r_2}=0, \qquad \left|\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|\leq C \qquad /9/$$

в околиці точок ребра l_2 та

$$\lim_{\rho_2\to0} \rho_2^2\frac{\partial\chi}{\partial\rho_2}=0, \qquad \left|\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|\leq C \qquad /10/$$

в околиці кутової точки O_2 .

Отже, для кусково-гладких оболонок і акустичних середовищ з умовами /2/, /3/, /6/, /7/, /9/, /10/ єдність розв"язку задачі про їх взаємодію випливає з формул /4/, /5/, /8/ так само, як і в роботі [1].

Список літератури: 1. К о с т е н к о В.Г. Единственность решения задачи о взаимодействии упругой оболочки с акустическими средами. – "Математические методы и физико-механические поля", 1977, вып. 6 . 2. Н о в а ц к и й В. Теория упругости. М., "Мир", 1975.

УДК 517.94

В.Г.Костенко, канд.физ.-мат.наук,
О.О.Веселовська

ЗАГАЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ, ІНВАРІАНТНЕ ВІДНОСНО ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ІЗ ЗАДАНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ

Розглянемо загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку

$$Lu=A(x,y)r+2B(x,y)s+C(x,y)t+K(x,y)p+E(x,y)q+Q(x,y)u=0 \qquad /1/$$