Те ж саме для функції $\chi(x,y,z,t)=\frac{\partial\mu}{\partial t}$ в K, де μ – потенціал змішень точок акустичного середовища K

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_K\left[\frac{1}{\beta_2^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\right)^2\right]dK=2\iint_{S_2}\frac{\partial\chi}{\partial t}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\cos(n,x_i)\,dS_2\,, \qquad /8/$$

якщо

$$\lim_{r_2\to 0} r_2\frac{\partial\chi}{\partial r_2}=0, \qquad \left|\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|\leq C \qquad /9/$$

в околиці точок ребра l_2 та

$$\lim_{\rho_2\to 0}\rho_2^2\frac{\partial\chi}{\partial\rho_2}=0, \qquad \left|\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|\leq C \qquad /10/$$

в околиці кутової точки O_2.

Отже, для кусково-гладких оболонок і акустичних середовищ з умовами /2/, /3/, /6/, /7/, /9/, /10/ єдність розв"язку задачі про їх взаємодію випливає з формул /4/, /5/, /8/ так само, як і в роботі [1].

Список літератури: I. Костенко В.Г. Единственность решения задачи о взаимодействии упругой оболочки с акустическими средами. – "Математические методы и физико-механические поля", 1977, вып. 6 . 2. Новацкий В. Теория упругости. М., "Мир", 1975.

УДК 517.94

В.Г.Костенко, канд.физ.-мат.наук,
О.О.Веселовська

ЗАГАЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ, ІНВАРІАНТНЕ ВІДНОСНО ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ІЗ ЗАДАНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ

Розглянемо загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку

$$Lu=A(x,y)r+2B(x,y)s+C(x,y)t+K(x,y)p+E(x,y)q+Q(x,y)u=0 \qquad /1/$$

/ p, q, r, s, t – позначення Монжа частинних похідних I-ї 2-го порядків від функції $U(x,y)$ /і виділимо з нього ті рівняння, які залишаються інваріантними відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf = -y^3 \frac{\partial f}{\partial x} + x^3 \frac{\partial f}{\partial y} . \qquad /2/$$

Траєкторії цієї групи є криві $x^4+y^4=a^4$.

Прирівнюючи в тотожності [2,5]

$$\begin{aligned} U''Lu = &-y^3\Big\{-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\left[2Bs + Ct + Kp + Eq + Qu\right] + 2\frac{\partial B}{\partial x}s + \\ &+\frac{\partial C}{\partial x}t + \frac{\partial K}{\partial x}p + \frac{\partial E}{\partial x}q + \frac{\partial Q}{\partial x}u\Big\} + x^3\Big\{-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y}\big[2Bs + \\ &+ Ct + Kp + Eq + Qu\big] + 2\frac{\partial B}{\partial y}s + \frac{\partial C}{\partial y}t + \frac{\partial K}{\partial y}p + \\ &+\frac{\partial E}{\partial y}q + \frac{\partial Q}{\partial y}u\Big\} - 3x^2Kq + 3y^2Ep - 6x^2As - 6xAq + 2B\Big\{-3x^2t - \\ &-\frac{1}{A}3y^2\left[2Bs + Ct + Kp + Eq + Qu\right]\Big\} + C\left[6yp + 6y^2s\right] \equiv 0 \end{aligned} \qquad /3/$$

до нуля коефіцієнти при різних степенях похідних, одержуємо

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right) - 6y^2\left(\frac{B}{A}\right)^2 + 3y^2\frac{C}{A} - 3x^2 = 0, \qquad /4/$$

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{A}\right) - 6y^2\frac{C}{A}\cdot\frac{B}{A} - 6x^2\frac{B}{A} = 0, \qquad /5/$$

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{A}\right) - 6y^2\frac{K}{A}\cdot\frac{B}{A} + 3y^2\frac{E}{A} + 6y\frac{C}{A} = 0, \qquad /6/$$

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E}{A}\right) - 6y^2\frac{E}{A}\cdot\frac{B}{A} - 3x^2\frac{K}{A} - 6x = 0, \qquad /7/$$

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Q}{A}\right) - 6y^2\frac{Q}{A}\cdot\frac{B}{A} = 0. \qquad /8/$$

Інтегрування цієї системи зводиться до знаходження розв"язків кількох лінійних рівнянь 2-го порядку параболічного типу та кількох лінійних рівнянь I-го порядку з однією невідомою функцією [1,4].

Наприклад, виключаючи $\frac{C}{A}$ з рівнянь /4/, /5/ для $\frac{B}{A}=Z$, записуємо параболічне рівняння 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами

$$-\frac{1}{3}y^4\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{2}{3}x^3y\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{3}\frac{x^6}{y^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\left(\frac{1}{3}x^3-6y^3Z\right)\frac{\partial Z}{\partial x}+$$
$$+\left(x^2y+\frac{2}{3}\frac{x^6}{y^3}+6x^3Z\right)\frac{\partial Z}{\partial y}-12xy-2\frac{x^5}{y^3}-12y^2Z^3-12x^2Z=0, \qquad /9/$$

яке має канонічну форму

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2}-\frac{2(1-\eta^4)+18\eta^3 Z}{\eta(1+\eta^4)}\frac{\partial Z}{\partial \eta}+\frac{6}{(1+\eta^4)\eta}+\frac{36\eta^2 Z}{(1+\eta^4)^2}\left(1+\eta^2Z^2\right)=0. \qquad /10/$$

Розглядаючи /10/ як звичайне рівняння 2-го порядку з параметром ξ і розв"язуючи його груповим методом /3,4/, знаходимо

$$Z=\frac{B}{A}=\frac{[12\mathcal{J}_1+2\psi_2]\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{y}{x}\right)^3\left[\frac{12}{\psi_1}+12\psi_2\mathcal{J}_1+36\mathcal{J}_1^2+\psi_2^2\right]}{-\left(\frac{y}{x}\right)^6\left[\frac{12}{\psi_1}+12\psi_2\mathcal{J}_1+36\mathcal{J}_1^2+\psi_2^2\right]},$$

де

$$\mathcal{J}_1=\int\frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}}{\left(\frac{y}{x}\right)^4}\,d\left(\frac{y}{x}\right);\quad \psi_1=\psi_1(x^4+y^4);\quad \psi_2=\psi_2(x^4+y^4).$$

Подібними міркуваннями /3,4/ знаходимо загальний розв"язок системи /4/ – /8/, який визначає першу сукупність лінійних рівнянь у частинних похідних 2-го порядку /1/.

$$A(x,y)=\left(\frac{y}{x}\right)^6 f_1;\quad B(x,y)=[12\mathcal{J}_1+2\psi_2]\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{y}{x}\right)^3\cdot f_1;$$

$$C(x,y)=-2\left(\frac{y}{x}\right)^3\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}}[12\mathcal{J}_1+2\psi_2]-4\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^3+\left(\frac{y}{x}\right)^6\cdot f_1;$$

$$E(x,y)=\left(\frac{y}{x}\right)^6\cdot f_1\Big\{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}[\psi_3\mathcal{J}_2+\psi_4]+\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot\mathcal{J}_2\cdot\Big[\psi_5-$$
$$-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\int f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)\Big]+\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\cdot 4}\Big[\psi_6-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\cdot\int\mathcal{J}_2 f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)\Big]\Big\};$$

$$K(x,y)=\left(\frac{y}{x}\right)^6 f_1\Big\{-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^7\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{-4}\right]^{-\frac{5}{4}}\cdot f_3-\frac{1}{3}\frac{y^3}{x^2}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot f_4+\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^4\Big[1+$$
$$+\left(\frac{y}{x}\right)^4\Big]^{-\frac{5}{4}}\cdot f_3+\frac{x}{3}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot f_4\Big\};$$

$$Q(x,y)=\left(\frac{y}{x}\right)^6\cdot f_1\cdot e^{2\int\frac{B(x,y)\,d\left(\frac{y}{x}\right)}{A(x,y)\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]}}$$

$$\mathcal{J}_2=\int\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}\,d\left(\frac{y}{x}\right);\quad \psi_3=\psi_3(x^4+y^4),\ \dots,\ \psi_6=\psi_6(x^4+y^4);$$

$$f_1=f_1\left(\frac{y}{x},x^4+y^4\right)=-\left\{\frac{12}{\psi_1}+12\psi_2\cdot\mathcal{J}_1+36\mathcal{J}_1^2+\psi_2^2\right\};$$

$$f_2=f_2\left(\frac{y}{x},x^4+y^4\right)=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^6 f_1}\left\{36\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}\left[12\mathcal{J}_1+2\psi_2\right]\cdot\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}\right]-\right.$$
$$\left.-72\left(\frac{y}{x}\right)^{-5}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]-6\,\frac{6\left(\frac{y}{x}\right)^4+\left(\frac{y}{x}\right)^8-3}{\left(\frac{y}{x}\right)^5\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^2}\right\};$$

$$f_3=f_3\left(\frac{y}{x},x^4+y^4\right)=\psi_3\mathcal{J}_2+\psi_4+\mathcal{J}_2\left[\psi_5-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\int f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)+\psi_6-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\int\left[\mathcal{J}_2\cdot f_2\right]d\left(\frac{y}{x}\right);\right. \qquad /11/$$

$$f_4=f_4\left(\frac{y}{x},x^4+y^4\right)=-\frac{y}{x^2}\cdot\psi_3\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}-\frac{y}{x^2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}\left[\psi_5-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\int f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)-\right.$$
$$\left.-\mathcal{J}_2\left[\frac{y}{x^2\sqrt[4]{x^4+y^4}}f_2+x^3(x^4+y^4)^{-\frac{5}{4}}\int f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)\right]\right]+\frac{y}{x^2\sqrt[4]{x^4+y^4}}f_2\cdot\mathcal{J}_2+$$
$$+x^3(x^4+y^4)^{-\frac{5}{4}}\int\left[\mathcal{J}_2\cdot f_2\right]d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Серед рівнянь /1/, інваріантних відносно групи перетворень з оператором /2/, можуть бути і такі, ліві частини яких є її диференціальними інваріантами другого порядку [2,5]. Тоді коефіцієнти рівняння знаходимо з такої системи рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&-y^3\frac{\partial A}{\partial x}+x^3\frac{\partial A}{\partial y}+6y^2B=0;\\
&-y^3\frac{\partial B}{\partial x}+x^3\frac{\partial B}{\partial y}-3x^2A+3y^2C=0;\\
&-y^3\frac{\partial C}{\partial x}+x^3\frac{\partial C}{\partial y}-6x^2B=0;\\
&-y^3\frac{\partial K}{\partial x}+x^3\frac{\partial K}{\partial y}+3y^2E+6yC=0;\\
&-y^3\frac{\partial E}{\partial x}+x^3\frac{\partial E}{\partial y}-3x^2K-6xA=0;\\
&-y^3\frac{\partial Q}{\partial x}+x^3\frac{\partial Q}{\partial y}=0.
\end{aligned}
\qquad /12/
$$

При цьому

$$A(x,y)=\frac{1}{4\psi_2}\left(\frac{y}{x}\right)^6\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\left[\psi_2^2(\psi_3-J_1)^2-144\psi_1\right]+$$

$$+\frac{\psi_2}{6}\left(\frac{y}{x}\right)^3(\psi_3-J_1)+\frac{\psi_2}{36}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}};$$

$$B(x,y)=\frac{1}{4\psi_2}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)^4\left[\psi_2^2(\psi_3-J_1)^2-144\psi_1\right]-$$

$$-\frac{\psi_2}{12}(\psi_3-J_1);$$

$$C(x,y)=\frac{1}{4\psi_2}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\left[\psi_2^2(\psi_3-J_1)^2-144\psi_1\right];$$

$$E(x,y)=\psi_4\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}+\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\int J_1 f\cdot d\left(\frac{y}{x}\right)+\psi_5\Big[1+$$

$$+\left(\frac{y}{x}\right)^4\Big]^{-\frac{3}{4}}\cdot J_1+\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot J_1\cdot\int f\,d\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$K(x,y)=-\psi_4\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{y}{x}\right)^3\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\int J_1 f\cdot d\left(\frac{y}{x}\right)-$$

$$-\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot J_1\cdot f-\psi_5\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot J_1+\frac{1}{3}\Big[1+$$

$$+\left(\frac{y}{x}\right)^{-4}\Big]^{\frac{3}{4}}\int f\,d\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{1}{4}}\cdot J_1\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{3}\psi_5\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{4}}-$$

$$-\frac{2}{x}\Big\{\frac{1}{4\psi_2}\left(\frac{y}{x}\right)^6\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\left[\psi_2^2(\psi_3-J_1)^2-144\psi_1\right]+$$

$$+\frac{\psi_2}{6}\left(\frac{y}{x}\right)^3(\psi_6-J_1)+\frac{\psi_2}{36}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}}\Big\}-\left(\frac{y}{x}\right)^3\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\int f\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$Q(x,y)=\psi_6\,(x^4+y^4);$$

$$f=f\left(\frac{y}{x},\ x^4+y^4\right)=\frac{3}{2}\,\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^9+6\left(\frac{y}{x}\right)^5-3\,\frac{y}{x}}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\cdot\frac{1}{\psi_2}\Big[1+$$

$$+\left(\frac{y}{x}\right)^4\Big]^{-3}\cdot\left[\psi_2^2\cdot(\psi_3-J_1)^2-144\psi_1\right]+$$

$$+\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^6}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\psi_3-\mathcal{I}_1\right)+$$

$$+\frac{\psi_2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3}{6\sqrt[4]{x^4+y^4}}.$$

Для виділених рівнянь виду /I/, інваріантних відносно групи перетворень /2/, в областях, обмежених траекторіями цієї групи, можна знаходити розв"язки крайових задач груповим методом.

Список літератури: I. Г ю н т е р Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М., Гостехиздат, 1934. 2. О в с я н н и к о в Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962. 3. К о с т е н к о В.Г., В е с е л о в с ь к а О.О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. - "Вісник Львів. ун-ту сер. мех.-мат.", 1972, вип.7. 4. К о с т е н к о К.С. Умови інтегрування у квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1972, вип.7. 5. Lie S. Vorlesungen über Differential-gleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.917

С.П.Лавренюк, канд.фіз.-мат.наук

СТІЙКІСТЬ В ЦІЛОМУ ОДНІЄЇ НЕАВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглядається система

$$\begin{cases}\dot{x}=-p_1(t)\,a(x)+p_2(t)\,b(y),\\ \dot{y}=p_3(t)\,c(x)-p_4(t)\,d(y),\end{cases}\qquad /I/$$