$$+\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^6}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot(\psi_3-\gamma_1)+$$

$$+\frac{\psi_2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3}{6\sqrt[4]{x^4+y^4}}.$$

Для виділених рівнянь виду /I/, інваріантних відносно групи перетворень /2/, в областях, обмежених траекторіями цієї групи, можна знаходити розв"язки крайових задач груповим методом.

Список літератури: I. Г ю н т е р Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М., Гостехиздат, I934. 2. О в с я н н и к о в Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, I962. 3. К о с т е н к о В.Г., В е с е л о в с ь к а О.О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. - "Вісник Львів. ун-ту сер. мех.-мат.", I972, вип.7. 4. К о с т е н к о К.С. Умови інтегрування у квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", I972, вип.7. 5. Lie S. Vorlesungen über Differential-gleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.917

С.П.Лавренюк, канд.фіз.-мат.наук

## СТІЙКІСТЬ В ЦІЛОМУ ОДНІЄЇ НЕАВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглядається система

$$\begin{cases}\dot{x}=-p_1(t)a(x)+p_2(t)b(y),\\ \dot{y}=p_3(t)c(x)-p_4(t)d(y),\end{cases}\qquad /I/$$

де функції $p_i(t)$, $(i=1,2,3,4)$ визначені і неперервні при $q<t<\infty$, а функції $a(x), c(x), b(y), d(y)$ визначені при $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$ і задовольняють умови існування та єдиності розв"язку системи /I/.

Теорема. Нехай виконуються умови:

1/ $a(0)=b(0)=c(0)=d(0)=0$;

2/ $0<l_i\le p_i(t)\le L_i$, $i=1,2,3,4$;

3/ $0<a_1\le \frac{a(x)}{x}\le A_1$, $x\ne 0$; $0<b_1\le\frac{b(y)}{y}\le B_1$, $y\ne 0$;

$0<c_1\le \frac{c(x)}{x}\le C_1$, $x\ne 0$; $0<d_1\le\frac{d(y)}{y}\le D_1$, $y\ne 0$;

4/ $a_1 d_1 l_1 l_4 > B_1 C_1 L_2 L_3$.

Тоді нульовий розв"язок системи /I/ асимптотично стійкий в цілому.

Доведення. Розглянемо системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}=-Ax+By,\\ \dot{y}=\ \ Cx-Dy,\end{cases} \qquad /2/$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-ax+by,\\ \dot{y}=\ \ cx-dy,\end{cases} \qquad /3/$$

де

$$A=\begin{cases}a_1 l_1, & x>0,\\ A_1 L_1, & x<0,\end{cases} \qquad B=\begin{cases}B_1 L_2, & y>0,\\ b_1 l_2, & y<0,\end{cases}$$

$$C=\begin{cases} C_1L_3, & x>0,\\ c_1l_3, & x<0,\end{cases} \qquad D=\begin{cases} d_1l_4, & y>0,\\ D_1L_4, & y<0,\end{cases}$$

$$a=\begin{cases} A_1L_1, & x>0,\\ a_1l_1, & x<0,\end{cases} \qquad b=\begin{cases} b_1l_2, & y>0,\\ B_1L_2, & y<0,\end{cases}$$

$$c=\begin{cases} c_1l_3, & x>0,\\ C_1L_3, & x<0,\end{cases} \qquad d=\begin{cases} D_1L_4, & y>0,\\ d_1l_4, & y<0,\end{cases}$$

і функції

$$\Phi(x,y)=(AD-BC+D^2)x^2-2BDxy+B^2y^2,$$

$$\varphi(x,y)=(ad-bc+d^2)x^2-2bdxy+b^2y^2.$$

Легко зауважити, що похідні функцій $\Phi(x,y)$ і $\varphi(x,y)$, беручи до уваги відповідно системи /2/ і /3/, мають вигляд

$$\dot{\Phi}(x,y)=-(A+D)(AD-BC)x^2,$$

$$\dot{\varphi}(x,y)=-(a+d)(ad-bc)x^2$$

Очевидно, множини $\dot{\Phi}=0$ і $\dot{\varphi}=0$ не містять цілих траєкторій відповідних систем /2/ і /3/, крім початку координат. Розглянемо спочатку систему /2/ і функцію $\Phi(x,y)$. Траєкторії системи /2/, які потрапляють у I і III чверті при деякому $t$, не можуть звідти вийти, а траєкторії, що починаються в II і IУ чвертях при $t=t_0$ $(t_0>0)$ або там залишаються, або переходять в I і III чверті. Функція $\Phi(x,y)$ має розрив першого роду при $y=0$ і $\dot{\Phi}(x,y)<0$ при $xy\neq 0$.

Доведемо, що нульовий розв"язок системи /2/ стійкий в цілому. Нехай задано деяке $\varepsilon > 0$. З огляду на умови теореми за заданим $\varepsilon$ можемо вибрати $\delta_1 > 0$ таке, що всі траєкторії, які починаються на множині

$$M_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < \delta_1,\ xy > 0\},$$

не виходять за межі множини

$$M_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < \varepsilon,\quad xy > 0\}.$$

За вказаним $\delta_1$ можемо тепер вибрати $\delta > 0$ таке, що траєкторії, які починаються на множині

$$M_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < \delta,\quad xy < 0\},$$

або не виходять за межі множини

$$M_4 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < \delta_1,\quad xy < 0\},$$

або потрапляють у множину $M_1$. Отже всі траєкторії системи /2/, що починаються в крузі $x^2 + y^2 < \delta$ при деякому $t = t_0$ $(t_0 > q)$, не виходять за межі круга $x^2 + y^2 < \varepsilon$.

Тим самим доведено стійкість за Ляпуновим нульового розв"язку системи /2/. Використовуючи метод доведення Барбашина - Красовського [2], легко довести, що всі траєкторії системи /2/ прямують до нуля при $t \to \infty$. Аналогічно доводиться стійкість в цілому нульового розв"язку системи /3/.

Легко зауважити, що в силу умов теореми будь-який розв"язок системи /I/ можна помістити у вилку розв"язків систем /2/ і /3/ [3]. Отже, нульовий розв"язок системи /I/ також стійкий в цілому.

Список літератури: I. А б р а м о в Р.Т., Е г о р о в И.Г. Об устойчивости в целом нулевого решения одной системы двух дифференциальных уравнений. -"Дифференциальные уравнения", 1975, т.XI, № 9. 2. Б а р б а ш и н Е.А. Функция Ляпунова. М., "Наука", 1970. 3. Х а р т м а н Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., "Мир", 1970.