УДК 517.917

Б.В.Ковальчук, канд.фіз.-мат.наук, Л.М.Лісевич, канд.фіз.-мат.наук

ПРО МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОЇ S^{ρ}-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \qquad (T_x),$$

де $y=[y_1,\dots,y_n]$ – $(n\times 1)$ – вектор евклідового простору R_y^n ; $x\in \mathcal{J}_x=(-\infty,\infty)$ і $f(x,y)=[f_1(x,y),\dots,f_n(x,y)]$ – $(n\times 1)$ – матриця /вектор-функція/ яка задана на множині $\mathcal{J}_x\times A_y\,(A_y\subset R_y^n)$.

Допустимо, що: 1/ матриця* $f(x,y)$ рівномірно неперервна по y на кожній замкнутій підмножині $\mathcal{J}_x\times\bar{B}_y$, де $\bar{B}_y\subset A_y$ – компакт, тобто обмежена замкнута множина; 2/ $f(x,y)$ – S^{ρ} – майже періодична матриця по x рівномірно відносно $y\in\bar{B}_y$.

За таких умов систему (T_x) називатимемо S^{ρ}-майже періодичною системою. Можна показати, що S^{ρ}-майже періодична система (T_x) в деякому компакті $\bar{B}_y$ має розв"язок /не обов"язково єдиний/ і матриця $f(x,y)$ є обмеженою на множині $\mathcal{J}_x\times\bar{B}_y$.

Ми вивчаємо, які додаткові умови потрібно накласти на S^{ρ} - майже періодичну систему (T_x) , щоб її розв"язок був S^{ρ}-майже періодичним.

У випадку рівномірної майже періодичної системи (T_x) такі умови знайдені [2].

Для довільної послідовності дійсних чисел $\{h_\nu\}$ побудуємо послідовність матриць $\{f(x+h_\nu,\ y)\}_{\nu=1,2,\dots}$ яка рівномірно збігається на будь-якій замкнутій множині $\mathcal{J}_x\times\bar{B}_y$. Тоді гранична матриця $g(x,y)=\lim\limits_{\nu\to\infty} f(x+h_\nu,y)$ є рівномірно неперервна по y на $\mathcal{J}_x\times\bar{B}_y$ і S^{ρ}- майже періодична по x рівномірно відносно y на цій множині [4].

---
* Тут і надалі ми розглядаємо матриці в S^{ρ}-метриці. Поняття S^{ρ}-норми матриці дається в роботі [4]

Отже, матриця $f(x,y)$ неперервна на $\mathcal{J}_x \times \bar{B}_y$ по сукупності змінних x і y. Розглянемо тепер послідовність систем

$$\frac{dy}{dx} = f(x+h_\nu, y),$$

яка при $\nu \to \infty$ рівномірно збігається до системи

$$\frac{dy}{dx} = g(x,y) \qquad (T_{x+h})$$

на замкнутій множині $\mathcal{J}_x \times \bar{B}_y$.

Системи (T_{x+h}) називатимемо уподібненими до системи (T_x). Очевидно, кожна уподібнена система (T_{x+h}) задовольняє ті самі умови, що й система (T_x). Вибираючи різні послідовності чисел $\{h_\nu\}$, для яких існують граничні матриці $g(x,y)$, побудуємо цілу сім"ю уподібнених систем (T_{x+h}), яку позначимо $H(T_x)=\{T_{x+h}\}$ і будемо називати H -класом S^p -майже періодичної системи (T_x).

Легко зауважити, якщо S^p-майже періодична система (T_x) має обмежений розв"язок $Z_{(x)} \in \bar{B}_y$ при $x \in \mathcal{J}_x$, то будь-яка уподібнена система (T_{x+h}) також має обмежений розв"язок у $\bar{B}_y$ при $x \in \mathcal{J}_x$.

Обмежений розв"язок $Z_{(x)} \in \bar{B}_y$ $(x \in \mathcal{J}_x)$ S^p- майже періодичної системи (T_x) називається відокремленим в області $\mathcal{J}_x \times \bar{B}_y$, якщо існує таке число $\rho > 0$, яке залежить тільки від $Z(x)$, що для будь-якого іншого обмеженого розв"язку $\zeta(x) \in \bar{B}_y$ при $x \in \mathcal{J}_x$ виконується нерівність

$$\inf_x \|Z(x) - \zeta(x)\| \geq \rho > 0 .$$

Наступна теорема дає достатні умови, які забезпечують S^p-майже періодичність розв"язку S^p-майже періодичної системи (T_x).

<u>Теорема I</u>. Обмежений розв"язок $Z(x)$ S^p-майже періодичної системи (T_x) є S^p-майже періодичним у деякому компакті $\bar{B}_y$ при $x \in \mathcal{J}_x$, якщо обмежені розв"язки із $\bar{B}_y$ всіх уподібнених систем (T_{x+h}) відокремлені в області $\mathcal{J}_x \times \bar{B}_y$.

Тому що S^p - нормальність матриці є необхідною та достатньою умовою її S^p-майже періодичності [3], то при доведенні теореми досить показати, що розв"язок $Z(x)$ є S^ρ-нормальна матриця. Для доведення цього ми використовуємо метод, застосований у роботі [2] при вивченні аналогічного питання у випадку рівномірної майже періодичної системи (T_x).

Зауваження I. Розглянемо лінійну систему

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x) \qquad (Z_x),$$

де $A(x)$ – S^ρ-майже періодична матриця виміру $n \times n$; $f(x)$ – S^ρ-майже періодична матриця /вектор-функція/.

Запишемо відповідну їй однорідну систему

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \qquad (\tilde{Z}_x)$$

і побудуємо для неї сім"ю уподібнених систем / H -клас/.

$$\frac{dy}{dx} = B(x)y \qquad (\tilde{Z}_{x+h}),$$

де $B(x) = \lim\limits_{\nu \to \infty} A(x + h_\nu)$.

Відповідно H-клас системи (Z_x) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = B(x)y + g(x) \qquad (Z_{x+h}),$$

де $g(x) = \lim\limits_{\nu \to \infty} f(x + h_\nu)$.

Наявна теорема,* яка дає достатні умови S^ρ-майже періодичності розв"язку лінійної неоднорідної системи (Z_x) .

Теорема 2. Обмежений розв"язок системи (Z_x) є S^ρ-майже періодичним, якщо кожна уподібнена система $(\tilde{Z}_{x+h})$ не має обмежених розв"язків /крім тривіального/.

Справді, легко показати, що кожна система (Z_{x+h}) має єдиний обмежений розв"язок. Тоді із теореми I одержуємо, що обмежений розв"язок системи (Z_x) є S^ρ-майже періодичним.

Зауваження 2. Розглянемо квазілінійну систему

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x) + \mu\varphi(x,y) \qquad (Q_x)$$

* Для випадку рівномірної майже періодичної системи див. роботу /2/.

де A - стала матриця; μ - малий скалярний параметр і матриця $\varphi(x,y)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\|\varphi(x,y')-\varphi(x,y'')\|\leq N\|y'-y''\|.$$

У роботі [1] знайдені достатні умови майже періодичності розв"язку для рівномірної майже періодичної системи (Q_x).

Аналогічна теорема справедлива і для S^ρ-майже періодичної системи (Q_x).

Теорема 3. Якщо: 1/ матриця A не має чисто уявних характеристичних чисел; 2/ $f(x)$ - S^ρ-майже періодична матриця по $x\in J_x$; 3/ $\varphi(x,y)$ - S^ρ-майже періодична матриця по x рівномірно відносно y на компакті $\bar{Q}_y$, то при $|\mu|<\mu_0$, де μ_0 - достатньо мале додатне число, система (Q_x) має S^ρ-майже періодичний розв"язок.

Список літератури: 1. Б и р ю к Г.И. Об одной теореме существования почти периодических решений некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - "Докл. АН СССР", 1954, т.96, № 1. 2.Д е м и д о в и ч Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., "Наука", 1967. 3. К о в а л ь ч у к Б.В., Л і с е в и ч Л.М. Компактність і нормальність S^ρ-майже періодичних матриць. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", вип.12, Теоретична та прикладна математика, 1977. 4. Л і с е в и ч Л.М., К о в а л ь ч у к Б.В. S^ρ-майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^ρ-майже періодичною правою частиною. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1973, вип.8.