УДК 517.9

Л.М.Лісевич, канд.фіз.-мат.наук,
Ж.С.Сврчевська

# ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

У роботі /1/ сформульована теорема існування майже періодичного по часу $t$ розв"язку граничної задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad /2/$$

в смузі $(0 < x < \pi,\ 0 \le t < +\infty)$, де $f(x,t)$ – майже періодична по $t$ функція, рівномірно відносно $x$. Ми доводимо існування майже періодичного розв"язку задачі

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t), \qquad /3/$$

$$u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0, \qquad /4/$$

де $f(x,y,t)$ – майже періодична функція по часу $t$, рівномірно відносно $x, y$ $/ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi /$.

Нехай $C^\infty$ – простір неперервних нескінченно диференційованих функцій дійсних аргументів $x, y, t$, а $C_0^\infty$ – підпростір із $C^\infty$ майже періодичних по $t$ функцій в $G\,(0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$. Розглянемо дві функції $\varphi(x,y,t)$ та $\psi(x,y,t)$ із $G$ і визначимо скалярний добуток

$$(\varphi,\psi) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Big[\iint_G \varphi(x,y,t)\,\psi(x,y,t)\,dx\,dy\Big]dt, \qquad /5/$$

де $G$ є квадрат $/ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi /$. Відповідно введемо норму

$$\|\varphi(x,y,t)\| = \Big\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Big[\iint_G |\varphi(x,y,t)|^2 dx\,dy\Big]dt\Big\}^{1/2}. \qquad /6/$$

Позначимо через $H_0$ доповнення в $C^\infty$ відносно норми /6/, а доповнення в $C_0^\infty$ відносно цієї норми – через $\mathring{H}_0$.

Введемо ще таку норму:

$$\|\varphi\|_m = \left\{ \sum_{\sigma=0}^{m} \|D^\sigma \varphi\|^2 \right\}^{1/2}, \qquad /7/$$

породжену скалярним добутком

$$(\varphi, \psi) = \sum_{|\sigma|=0}^{m} (D^\sigma \varphi, D^\sigma \psi), \qquad /8/$$

де

$$D^\sigma = \frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}}{\partial x^{\sigma_1} \partial y^{\sigma_2} \partial t^{\sigma_3}}, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad |\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 .$$

Позначимо доповнення в $C^\infty$ і $C_0^\infty$ відповідно через $H_m$ і $\mathring{H}_m$ відносно норми /7/. Зрозуміло, що простори $H_0, \mathring{H}_0, H_m$ і $\mathring{H}_m$ є гільбертовими.

Функції $f(x,y,t)$ і $g(x,y,t)$ будемо називати ортогональними в $G$, якщо

$$(f,g) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Big[ \iint_G f(x,y,t)\, g(x,y,t)\, dx dy \Big] dt = 0 .$$

У просторі $\mathring{H}_0$ розглянемо множину $N$ таких функцій:

$$N = \begin{cases} \varphi(x,y,t) \in \mathring{H}_0 , \\ \varphi(x,y,t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} a_{kl} \sin kx \sin ly\, e^{i\sqrt{k^2+l^2}\,t} \\ \sum\limits_{l,k} |a_{kl}|^2 < \infty \end{cases}$$

Ортогональне доповнення до $N$ позначимо $N^\perp$.

<u>Теорема I</u>. Нехай для функції $f(x,y,t)$ в рівнянні /3/ виконуються умови: I/ $f(x,y,t)$ є майже періодична по $t$, рівномірно відносно $x$, $y$, причому

$$f(x,y,t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{kln} \sin kx \sin ly\, e^{i\lambda_n t}; \qquad /9/$$

2/ показники $\lambda_n$ мають єдину граничну точку в нулі

$$(\lambda_{n+1} < \lambda_n, \ \lambda_{-n} = \lambda_n, \ |\lambda_n| < 1),$$

3/ $f(x,y,t) \in H_k \cap N^1$

Тоді існує єдиний майже періодичний по $t$ розв"язок $u(x,y,t)$ задачі /3/, /4/ такий, що

$$u(x,y,t) \in \overset{o}{H}_{k+1} \cap N^1,$$

$$\|u(x,y,t)\|_{k+1} \le C_k \|f\|_k \quad (C_k = const).$$

<u>Доведення</u>. Шукаємо розв"язок задачі /3/, /4/ у вигляді

$$u(x,y,t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{kln} \sin kx \sin ly \, e^{i\lambda_n t}. \qquad /10/$$

Підставляючи /9/ і /10/ в рівняння /3/, одержуємо

$$u_{kln} = \frac{f_{kln}}{k^2 + l^2 - \lambda_n^2}. \qquad /11/$$

Із рівняння /11/ випливає, що коли ряд /9/ абсолютно збіжний, а спектр $\{\lambda_n\}$ має єдину граничну точку в нулі, то ряд /10/ також абсолютно збіжний, причому $\|u\|^2 \le \|f\|^2$. Легко показати, що $\|u\|^2 \le c\|f\|^2$, де $c = const$. Це означає, що $u = u(x,y,t)$ слабкий розв"язок задачі /3/, /4/. Покажемо тепер, що цей розв"язок є сильним розв"язком, тобто

$$u(x,y,t) \in \overset{o}{H}_{k+1} \cap N^1.$$

Маємо $u \in \overset{o}{H}_1 \cap N^1$ і для всіх $\varphi \in C_0^\infty$, $(\Box\varphi, u) = (\varphi, f)$. Заміняючи в правій частині /3/ $f(x,y,t)$ на $f_t^h = \frac{f(x,y,t+h) - f(x,y,t)}{h}$, покажемо, що $u_t^h = \frac{u(x,y,t+h) - u(x,y,t)}{h}$ є слабким розв"язком рівняння $\Box u_t^h = f_t^h$, тобто $(\Box\varphi_t^{-h}, u) = -(\Box\varphi, u_t^h) = (\varphi_t^{-h}, f) = -(\varphi, f_t^h)$.

На основі сказаного вище

$$\|u_t^h\|_1 \le const \|f_t^h\|.$$

Переходячи до границі, коли $h \to 0$, одержуємо $u_t \in \overset{o}{H}_1 \cap N^1$ і

$$\|u_{t^2}\|_1 \le const\,\|f_{t^2}\|.$$

Аналогічно дістаємо

$$\|u_{t^k}\| \le const\,\|f_{t^k}\|.$$

Залишилось показати диференційованість по $x$ і $y$. Розглянемо фінітну функцію $\zeta(x) \subset C^\infty$, $supp(\zeta(x)) \subset (0,\mathfrak{T})$, $supp(\zeta(x+h)) \subset (0,\mathfrak{T})$.

Приймемо $\varphi_x^h = \dfrac{\varphi(x+h,y,t) - \varphi(x,y,t)}{h}$.

Легко перевірити, що

$$(\Box\varphi,(\zeta u)_x^h) = (-\Box\varphi_x^{-h}\zeta u) = -(\zeta\,\Box\varphi_x^{-h}, u)$$

Прийнявши $\zeta = 1$ і прямуючи $h$ до нуля, одержуємо, що $u_{x^2}$ існує і належить $H_0$ на довільному компакті $A$. Розглядаючи фінітну функцію

$$\zeta = \zeta(y) \subset C_1^\infty\ supp\ \zeta(y) \subset (0,\mathfrak{T}),\ supp\ \zeta(y+h) \subset (0,\mathfrak{T}),$$

приймемо

$$\varphi_y^h = \frac{\varphi(x,y+h,t) - \varphi(x,y,t)}{h}.$$

Зовсім аналогічно показуємо, що $u_{y^2}$ і $u_{xy}$ існують і належать $H_0$

Повертаючись тепер до рівняння

$$(\Box\varphi, u) = (\varphi, f).$$

дістаємо

$$(\Box\varphi, u) = (\varphi, \Box u) = (\varphi, f),$$

тобто $\Box u = f$ для всіх $\varphi \in N$, $u(x,y,t)$ – сильний розв"язок рівняння /3/ і

$$\|u_{tt}\| + \|f\| < +\infty.$$

Звідси випливає, що $u_{xx} + u_{yy} \in H_0$ ; $u \in H_2$ відносно $x,y$.

Так само можна показати, що $u \in H_{k+1}$, $\|u\|_{k+1} \le C_k \|f\|_k$, що й доводить нашу теорему.

Доведена теорема для рівняння мембрани розповсюджується і для рівняння газу.

Список літератури: 1. Л і с е в и ч Л.М., С в і р ч е в с ь к а Ж.С. Існування майже періодичного розв"язку однієї задачі для гіперболічного рівняння другого порядку. - "Доп. АН УРСР, сер. А", 1973, №7.
2. Rabinowitz P.H. Periodic solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. -, Com. Pure and Appl. Math.", 1967, 20, №1, 145.

УДК 517.43

Г. І. Чуйко

## ПРО ПРЕДСТАВЛЕННЯ АБЕЛЕВОЇ ГРУПИ ОПЕРАТОРІВ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Дж. Уермер довів, що для довільної обмеженої абелевої групи $G$ операторів у гільбертовому просторі $H$ існує обмежений самоспряжений оператор $B$ з обмеженим всюди визначеним оберненим $B^{-1}$, таким, що оператор $BTB^{-1}$ унітарний для всіх $T \in G$.

Наша мета - довести аналог леми Уермера, відкинувши вимогу обмеженості групи $G$.

Теорема. Нехай $H$ - сепарабельний гільбертів простір, а $G \subset B(H)$ - абелева група і виконуються такі умови:

1/ в $H$ існує сепарабельна узагальнена спектральна міра $P$, така, що для будь-яких $\Delta \in D(P)$ і $T \in G$

$$P(\Delta)T = TP(\Delta);$$

2/ для будь-якого $\Delta \in D(P)$ $\sup\limits_{T \in G} \| P(\Delta)T \| < \infty$.

Тоді існує скалярний добуток $(\cdot\,,\cdot)_0$ на лінійному многовиді $\tilde{H} = \bigcup\limits_{\Delta \in D(P)} P(\Delta)H$, еквівалентний на $P(\Delta)H$, $\Delta \in D(P)$ скалярному добутку $(\cdot\,,\cdot)$ простору $H$, та існує $(\cdot\,,\cdot)_0$-самоспряжений оператор $B$ з оберненим $B^{-1}$, таким, що оператор $BTB^{-1}$ в істотному $(\cdot\,,\cdot)_0$-унітарний для кожного $T \in G$