Список літератури: 1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., "Наука", 1966. 2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т.3. М., "Мир", 1974. 3. Лянце В.Э. Об одном обобщении понятия спектральной меры. "Математический сборник", 1963, т.61, вып.1. 4. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954.

УДК 517.944:947

Марія Мартиненко, канд.фіз.-мат.наук

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ"ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ У РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

Ріманів простір введений А.Зоммерфельдом [3] як просторовий аналог ріманової поверхні. Якщо розглядувана функція у звичайному просторі n - значна, то візьмемо n екземплярів звичайного тривимірного простору та позначимо у них лінії розгалуження цієї функції /легко видно, що багатозначні функції у просторі мають лінії розгалуження, а не точки, як у плоскому випадку/. Натягнемо на лінії розгалуження поверхні певного вигляду та розріжемо кожний просторовий екземпляр вздовж цих поверхонь. Одержані при цьому верхні та нижні сторони розрізуваних поверхонь склеємо одну з одною так, як це робиться у теорії ріманових поверхонь, і одержимо n -листковий ріманів простір.

Фундаментальною матрицею системи рівнянь з частинними похідними еліптичного типу в n -листковому рімановому просторі назвемо матричну функцію двох точок x та y з такими властивостями:

1/ вона неперервна та обмежена всюди в рімановому просторі, за винятком точки $x=y$, у якій має характерну особливість класичного фундаментального розв"язку розглядуваної системи;

2/ є розв"язком розглядуваної системи рівнянь як функція точки x всюди у рімановому просторі, за винятком точки $x=y$ та лінії розгалуження;

3/ в безмежно далекій точці кожного просторового екземпляра вона поводить себе як класична фундаментальна матриця розглядуваної системи.

Розглянемо таку еліптичну систему рівнянь другого порядку варіаційного типу від додатно визначеного функціоналу

$$A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)+A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0, \qquad /1/$$

де $A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – однорідний оператор другого порядку; $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор, що містить всі інші похідні; $x=(x_1,x_2,x_3)$. Припускаємо, що коефіцієнти оператора $A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовані три рази в E_3, коефіцієнти при похідних порядку j $(j=0;1)$ в операторі $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовані j раз в E_3, причому коефіцієнти оператора $A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ порядку $O(F(x))$, похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та їх похідні до другого порядку зростають не швидше, ніж $F(x)$ при $|x|\to\infty$, де $F(x)$ – така додатна в E_3 функція, що

$$\iiint\limits_{\infty}\frac{dx}{Fx}<\infty \text{ та } \frac{|\det(A_0(x,2\pi i\alpha)-\lambda^2 I)|}{[F(x)]^p|\alpha|^{2p}+\lambda^{2p}}>\mu>0$$

для кожної точки $x\in E_3$ та для кожної дійсної точки $(\lambda,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq 0$ / λ – достатньо велике додатне число/.

При зроблених припущеннях існує єдина фундаментальна матриця системи (1) в рімановому просторі з простою гладкою замкненою лінією розгалуження. Позначимо через $K(x,y)$ фундаментальну матрицю системи (1) в рімановому просторі з гладкою лінією розгалуження. Доведемо таку формулу:

$$K'(y,x)=K(x,y) \qquad /2/.$$

/штрих означає транспонування/, з якої випливає, що матриця, транспонована до побудованої фундаментальної матриці системи (1) в рімановому просторі з гладкою лінією розгалуження, по другому аргументу є розв"язком цієї системи при $x \neq y$ та зовні лінії галуження. Оскільки $K(x,y) = K'(y,x)$, то, застосовуючи оператор $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, одержуємо $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y) = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)K'(y,x)$. Тому що $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y) = 0$ при $x \neq y$ та зовні лінії розгалуження, то при цих же умовах $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)K'(y,x) = 0$.

Для доведення формули (2) застосовуємо другу формулу Гріна до функцій $U(x) = K(x,y_1)$ та $V(x) = K(x,y_2)$ в області D_ε ріманового простору, границя якої складається зі сфер S_{ε,y_1} і S_{ε,y_2} радіуса ε з центром відповідно у точках y_1 та y_2 , та трубчастої поверхні T_ε радіуса ε , що охоплює лінію $\mathcal{G}$,

$$2\iiint\limits_{D_\varepsilon}\left\{K'(x,y_1)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y_2) - \left[A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y_1)\right]'K(x,y_2)\right\}dx = \qquad /3/$$
$$= -\iint\limits_{S_{\varepsilon,y_1}+S_{\varepsilon,y_2}+T_\varepsilon}\left\{K'(x,y_1)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)K(x,y_2) - \left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)K(x,y_1)\right]'K(x,y_2)\right\}d_xS.$$

Тому що $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y) = 0$ при $x \neq y$ та $x \bar{\in} \mathcal{G}$, то об"ємний інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по поверхні T_ε прямує до нуля, коли до нього прямує ε .

Через те що $K(x,y)$ має при $x = y$ характеристичну особливість класичної фундаментальної матриці, то при $\varepsilon \to 0$ інтеграли по поверхнях S_{ε,y_1} та S_{ε,y_2} в формулі (3) прямують до $-K(y_1,y_2)$ та $K'(y_2,y_1)$. Отже, з формули (3) в границі при $\varepsilon \to 0$ одержуємо $-K(y_1,y_2) + K'(y_2,y_1) = 0$, або $K(y_1,y_2) = K'(y_2,y_1)$, що і стверджувалось.

У роботі [2] введено таке /відмінне від наведеного вище/ поняття m -розгалуженого фундаментального розв"язку еліптичного оператора з постійними коефіцієнтами: m - розгалуженим фундаментальним розв"язком $G_m(x, \xi)$ еліптичного оператора

$$L = \sum_{|\beta| \leq 2k} a^{\beta} D_{\beta}, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2)$$

називається такий розв"язок рівняння $L[u] = \delta_Q$ / δ_Q - дельта - функція Дірака, зосереджена в точці Q ріманового простору/, який на m - листковій рімановій поверхні R_m з довільною точкою розгалуження однозначно визначений скрізь, за винятком точки розгалуження, і має такі властивості:

1/ $G_m(x, \xi)$ має в R_m одну характеристичну особливість в точці $x = \xi$, яка знаходиться на першому листку ріманової поверхні;

2/ $G_m(x, \xi)$ безмежно диференційована скрізь, за винятком точки ξ і точки розгалуження. У точці розгалуження G_m скінчена разом зі своїми похідними до $(2k-2)$ -го порядку включно, а $(2k-1)$ - ша похідна безмежна, але так, що

$$\lim_{r \to 0} r \frac{\partial^{2k-1} G_m}{\partial r^{2k-1}} = 0,$$

де r - означає відстань до точки розгалуження;

3) $$\sum_{i=1}^{m} G_m(x, \xi_i) = G(x, \xi),$$

де $\xi_1 = \xi$, а ξ_i / $i \geq 2$ / - точки, які лежать в тому ж місці, що й ξ, але на інших листках ріманової поверхні R_m, $G(x, \xi)$ - звичайний /нерозгалужений/ фундаментальний розв"язок розглядуваного рівняння.

Існування такого розв"язку у роботі [2] не доведено, однак вказано його застосування до розв"язування деяких крайових задач для одиничних еліптичних рівнянь методом відображення і побудовані такі розв"язки для деяких частинних випадків.

Визначення А.Ф.Шестопала відрізняється від наведеного у цій роботі визначення фундаментальної матриці еліптичної системи у рімановому просторі третьою умовою.

Доведемо, що для еліптичних систем розглядуваного в цій роботі типу ця третя умова є властивістю, яка випливає з визначення фундаментальної матриці у рімановому просторі.

Оскільки класична фундаментальна матриця $\omega(x,y)$ однозначна у звичайному евклідовому просторі, то в n - листковому рімановому просторі вона n - значна, бо всі її значення /"вітки"/ на n листках ріманового простору рівні між собою. Тому вона має у рімановому просторі n полюсів у точках $y_i \in \mathcal{R}_i \; (i=\overline{1,n})$, які знаходиться на тому ж місці, що й y, але на різних листках ріманового простору $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$. Звідси випливає, що різниця

$$u(x) = \omega(x,y) - \sum_{i=1}^{n} K(x,y_i)$$

буде представляти розв"язок системи (1) скрізь у рімановому просторі, за винятком лінії розгалуження, де він залишається обмеженим, регулярний у безмежно віддаленій точці кожного листка $\mathcal{R}$.
З теореми Ліувілля випливає, що такий розв"язок тотожній нуль, тому

$$\omega(x,y) - \sum_{i=1}^{n} K(x,y_i) , \qquad /4/$$

де y_i має вказаний вище зміст.

Рівність /4/ виражає згадану властивість фундаментальної матриці системи /I/ у рімановому просторі.

Список літератури: I. Мельник Д.П. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. - "Доповіді АН УРСР", 1958, № 6. 2. Шестопал А.Ф. Разложение по фундаментальным решениям эллиптических операторов. Киев, "Наукова думка", 1968. 3. Sommerfeld A. - Proc. London Math. Soc.", 1897, 28, 395.