УДК 512.4

О.Л.Горбачук, канд.фіз.-мат.наук, М.Я.Комарницький

ПРО РОЗЩЕПЛЮВАНІСТЬ ЗЧИСЛЕННО-ПОРОДЖЕНИХ КРУЧЕНЬ

У цій статті розглядається розщеплювальність нерадикально-напівпростого кручення зі зчисленною базою, яка володіє деякими додатковими властивостями.

Всі розглядувані кільця вважатимемо асоціативними з одиницею, а всі модулі правими й унітарними. Користуватимемось термінологією з робіт [3,4].

Кручення σ в категорії правих модулів над кільцем A назвемо зчисленно-породженим, якщо його радикальний фільтр правих ідеалів має зчисленну базу. Нехай σ зчисленно-породжене кручення і $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ база радикального фільтра $\mathcal{E}_\sigma$. Коли $\{P_i P_n\}_{n=1}^{\infty}$ знову є базою фільтра $\mathcal{E}_\sigma$, то будемо говорити, що σ зчисленно-породжене кручення з інваріантною базою.

Лема 1. Нехай радикальний фільтр $\mathcal{E}$ кільця A має зчисленну базу $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ і $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i = 0$. Якщо $P_i a P_j \neq 0$ для кожного ненульового $a \in A$ при будь-яких $i, j = 1, 2, \dots$, то існують такі елементи $p_i \in P_i$, $i = 1, 2, \dots$, і послідовність натуральних чисел $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$, що $p_k p_{k-1} \cdots p_1 P_k \not\subseteq P_{S_k}$.

Доведення. Можна вважати, що праві ідеали P_i вкладені один в одного, тобто $P_1 \supset P_2 \supset \cdots$. У супротивному випадку можна розглянути систему $\{\bigcap_{i=1}^{n} P_i\}_{n=1}^{\infty}$ правих ідеалів, яка знову є базою і володіє тими ж властивостями, що й $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Нехай $0 \neq p_1 \in P_1$. Тому що $P_2 p_1 \neq 0$, то існує $p_2 \in P_2$, такий, що $p_2 p_1 \neq 0$. Далі, з того, що $P_3 p_2 p_1 \neq 0$, одержуємо $p_3 \in P_3$, для якого $p_3 p_2 p_1 \neq 0$. Таким способом побудуємо послідовність елементів $p_i \in P_i$ з властивістю $p_n p_{n-1} \cdots p_1 \neq 0$ для будь-якого натурального n.

Оскільки $\sigma(A)=0$, то внаслідок $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i = 0$ для будь-якого натурального k існує таке натуральне S_k, що $P_k P_{k-1} \dots P_1 P_k \not\subseteq P_{S_k}$.
Лема доведена.

Лема 2. Нехай σ зчисленно-породжене кручення з інваріантною базою $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$. Якщо $\sigma(A)=0$ і для довільного $a \in A$, $P_n a \neq 0$ / $i=1,2,\dots$ /, то кручення σ не розщеплюється.

Доведення. Зрозуміло, що можна вважати праві ідеали P_i вкладеними один в одного. Згідно леми I існують послідовність $p_i \in P_i$, $i=1,2,\dots$ і послідовність натуральних чисел $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $p_k, p_{k-1} \dots p_1 P_k \not\subseteq P_{S_k}$.

Розглянемо правий A -модуль $M=\prod_{k=1}^{\infty} P_1/P_{S_k}$ і покажемо, що M не розщеплюється.

Елемент x довільного правого модуля N назвемо елементом нескінченої висоти, якщо для будь-якого правого ідеалу P_i; $x \in x_i' P_i$, де $x_i' \in N$ / тобто $x = x_i' b_i$, $b_i \in P_i$ /. Перевіримо, що в M немає елементів нескінченої висоти. Справді, нехай $m=(m_1, m_2, \dots, m_k, \dots)$ елемент нескінченної висоти в M. Тоді $m_i \in m_i' P_{k_i}$, де $m_i \in P_1/P_{S_i}$ для кожного $i=1,2,\dots$. З другого боку, оскільки P_{S_i} містить деякий з ідеалів $P_1 P_{t_i}$, то кожний елемент із P_1/P_{S_i} анулюється правим ідеалом P_{t_i}. Таким чином, $m_i=0$ для кожного $i=1,2,\dots$.

Якщо ми тепер доведемо, що модуль $M/\sigma(M)$ має ненульовий елемент нескінченої висоти, то тим самим буде доведено, що модуль M не розщеплюється.

Розглянемо елемент $b=(p_1, p_2 p_1, \dots, p_n p_{n-1} \dots p_1, \dots)$ з M: при цьому $p_n p_{n-1} \dots p_1$ природно розглядається як елемент із P_1/P_{S_n}. Для довільного натурального k приймемо

$$b_k=(0, \dots, 0, p_k p_{k-1} \dots p_1, p_{k+1} p_k \dots p_1, \dots) .$$

Якщо $\pi: M \longrightarrow M/\sigma(M)$ канонічний гомоморфізм, то $\pi(b)=\pi(b_1)=\pi(b_2)=\cdots$
Оскільки $b_n=(0, \dots, 0, 1, p_{n+1}, \dots) p_n p_{n-1} \dots p_1$, то елемент $\pi(b)$ з

модуля $M/\sigma(M)$ має нескінченну висоту. Залишається довести, що $\mathfrak{A}(b)\neq 0$, тобто $b\notin\sigma(M)$. Припустивши, що $b\in\sigma(M)$, ми одержали б, що b анулюється деяким правим ідеалом P_m. Отже, $P_k P_{k-1}\cdots P_1 P_m \subseteq P_{s_k}$ для будь-якого натурального k. Зокрема, $P_m P_{m-1}\cdots P_1 P_m \subseteq P_{s_m}$, що суперечить вибору P_{s_m}. Лему доведено.

Теорема I. Нехай σ зчисленно-породжене кручення з інваріантною базою $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$, причому $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i = 0$. Якщо для кожного $a\in A$ із того, що $P_i a=0$, при деякому натуральному i випливає, що $a\in\sigma(A)$, то кручення σ не розщеплюється.

Доведення. Припустимо, що σ розщеплюється. Тоді $A=\sigma(A)\oplus S$. Відомо, що правий ідеал $\sigma(A)$ є двостороннім і фактор кільце $A/\sigma(A)$ ізоморфне кільцю S. Нехай $\varphi: A\to S$ канонічний гомоморфізм, тоді з леми 3 і наслідка 2 роботи [1] випливає, що кручення $\varphi(\sigma)$ розщеплюється. З другого боку, до кручення $\varphi(\sigma)$ застосована лема 2, з якої видно, що $\varphi(\sigma)$ не розщеплюється. Одержана суперечність доводить теорему.

З теореми I з урахуванням наслідка 2 з роботи [2] випливає такий наслідок.

Наслідок I. Над кільцем без дільників нуля всяке нетривіальне зчисленно-породжене кручення з інваріантною базою не розщеплюється.

Список літератури: I. Горбачук Е.Л. Радикалы в модулях над разными кольцами. - "Матем. исследования", 1972, т.7, вып.I.
2. Горбачук Е.Л. Расщепляемость кручения и предкручения в категории правых Λ-модулей. - "Матем. заметки", 1967, т.2, №6.
3. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., "Наука", 1969. 4. Stenström B. Rings of Quotients. Berlin - New-York, Springer-Verlag, 1975.