УДК 517.94

О.О.Веселовська

ЗАГАЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ, ІНВАРІАНТНЕ ВІДНОСНО ЗАДАНОЇ ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Із загального лінійного диференціального рівняння в частинних похідних 2-го порядку

$$Lu = \sum_{0\le\alpha+\beta\le 4} a_{\alpha\beta}(x,y)\frac{\partial^{\alpha+\beta}u}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}} = 0 \qquad /1/$$

виділимо ті рівняння, які інваріантні відносно групи перетворень з оператором

$$Uf = -y^3\frac{\partial f}{\partial x} + x^3\frac{\partial f}{\partial y}. \qquad /2/$$

Прирівнюючи в тотожності [2,4]

$$U^{(IV)}Lu \equiv 0 \qquad /3/$$

до нуля коефіцієнти при різних степенях похідних, одержуємо таку систему лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned}
&y^3\frac{\partial a_{40}}{\partial x} - x^3\frac{\partial a_{40}}{\partial y} - 3y^2 a_{31} = 0;\\
&y^3\frac{\partial a_{31}}{\partial x} - x^3\frac{\partial a_{31}}{\partial y} + 12x^2 a_{40} + 6y^2 a_{22} = 0;\\
&y^3\frac{\partial a_{22}}{\partial x} - x^3\frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 9x^2 a_{31} - 9y^2 a_{13} = 0;\\
&y^3\frac{\partial a_{30}}{\partial x} - x^3\frac{\partial a_{30}}{\partial y} - 3y^2 a_{21} - 6y a_{22} = 0;\\
&y^3\frac{\partial a_{21}}{\partial x} - x^3\frac{\partial a_{21}}{\partial y} + 9x^2 a_{30} - 6y^2 a_{12} + 36x a_{40} -\\
&-18y a_{13} = 0;
\end{aligned} \qquad /4/$$

$$y^3 \frac{\partial a_{20}}{\partial x} - x^3 \frac{\partial a_{20}}{\partial y} - 3y^2 a_{11} - 6y a_{12} - 6a_{13} = 0;$$

$$y^3 \frac{\partial a_{11}}{\partial x} - x^3 \frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 6x^2 a_{20} - 6y^3 a_{02} + 18x a_{30} - 18y a_{03} + 16a_{40} -$$

$$- 16a_{04} = 0;$$

$$y^3 \frac{\partial a_{10}}{\partial x} - x^3 \frac{\partial a_{10}}{\partial y} - 3y^2 a_{01} - 6y a_{02} - 6a_{03} = 0;$$

$$y^3 \frac{\partial a_{00}}{\partial x} - x^3 \frac{\partial a_{00}}{\partial y} = 0.$$

Якщо в рівняннях відносно $a_{40}, a_{31}, a_{30}, a_{21}, a_{20}, a_{10}$ поміняємо місцями індекси, x замінимо на „$-x$", x^2 на „$-y^2$" а в постійних коефіцієнтах рівнянь знак "–" на "+", то одержимо рівняння відповідно для визначення $a_{04}, a_{13}, a_{03}, a_{12}, a_{02}, a_{01}$

Знаходимо загальний розв"язок системи /4/ [1,4] , а отже і сукупність лінійних рівнянь у частинних похідних 4-го порядку, інваріантних відносно заданої групи перетворень з траєкторіями $x^4 + y^4 = a^4$. Коефіцієнти рівняння /I/ набувають вигляду:

$$a_{04} = (1+\eta^4)^{-3}\Big(\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\cdot\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\cdot\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\cdot\varphi_1\int(1+\eta^4)^{1/2}d\eta +$$

$$+\varphi_2\Big)d\eta+\varphi_3\Big)d\eta+\varphi_4\Big)d\eta+\varphi_5\Big);$$

$$a_{13} = \frac{1}{3}(1+\eta^4)\cdot a'_{04}; \qquad a_{22} = \frac{1}{6}(1+\eta^4)\cdot a'_{13} + 2\eta^2\cdot a_{04};$$

$$a_{31} = \frac{1}{9}(1+\eta^4)\cdot a'_{22} + \eta^2 a_{13}; \quad a_{40} = \frac{1}{12}(1+\eta^4)\cdot a'_{31} + \frac{1}{2}\eta^2\cdot a_{22};$$

$$a_{03} = (1+\eta^4)^{-\frac{9}{4}}\Big(\int(1+\eta^4)^{1/2}\cdot\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\varphi_6\,d\eta+\varphi_7\Big)d\eta +$$

$$+\varphi_8\Big)d\eta+\varphi_9\Big)+a_{03};$$

$$a_{12} = \frac{1}{3}(1+\eta^4)\cdot a'_{03} - \frac{2}{\sqrt[4]{\xi}}(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{22};$$

$$a_{21} = \frac{1}{6}(1+\eta^4)\cdot a'_{12} + \frac{3}{2}\eta^2\cdot a_{03} + 3\xi^{-1/4}\cdot(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{31} +$$

$$+6\xi^{-1/4}\cdot\eta\cdot(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{04};$$

$$a_{30}=\frac{1}{9}(1+\eta^4)\cdot a'_{21}-\frac{2}{3}\eta^2 a_{12}-4\xi^{-1/4}\cdot(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{40}+$$

$$+2\xi^{-1/4}\cdot\eta\cdot(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{13};$$

$$a_{02}=(1+\eta^4)^{-3/4}\left(\int(1+\eta^4)^{1/2}\cdot\left(\varphi_{10}\int(1+\eta^4)^{1/2}d\eta+\varphi_{11}\right)d\eta+\varphi_{12}\right.+\bar{a}_{02};$$

$$a_{11}=\frac{1}{3}(1+\eta^4)\cdot a'_{02}-2a_{21}\xi^{-1/4}(1+\eta^4)^{1/4}-2a_{31}\cdot\xi^{-1/2}(1+\eta^4)^{1/4};$$

$$a_{20}=\frac{1}{6}(1+\eta^4)\cdot a'_{11}+a_{02}\eta^2-3a_{30}\cdot\xi^{-1/4}(1+\eta^4)^{1/4}+3a_{03}\cdot\eta\cdot\xi^{-1/4}(1+\eta^4)^{1/4}-$$

$$-4a_{40}\cdot\xi^{-1/2}\cdot(1+\eta^4)^{1/2}+4a_{04}\cdot\xi^{-1/2}\cdot(1+\eta^4)^{1/2};$$

$$a_{01}=(1+\eta^4)^{-3/4}\left(\varphi_{13}\int(1+\eta^4)^{1/2}d\eta+\varphi_{14}\right)+\bar{a}_{01};$$

$$a_{10}=\frac{1}{3}(1+\eta^4)\cdot a'_{01}-2a_{20}\xi^{-1/4}(1+\eta^4)^{1/4}-2a_{30}\xi^{-1/2}(1+\eta^4)^{1/2};$$

$$a_{00}=\varphi_{15},$$

де $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{15}$ – довільні функції від x^4+y^4; $\eta=\frac{y}{x}$, $\xi=x^4+y^4$; $\bar{a}_{03}$, $\bar{a}_{02}$, $\bar{a}_{01}$ – часткові розв"язки звичайних неоднорідних лінійних рівнянь відповідно 4-, 3-, 2-го порядків [3], в праві частини яких входять вже знайдені коефіцієнти з попередніх рівнянь.

Але серед рівнянь /I/, згідно з Лі [6], можуть бути і такі, коли одночасно задовольняються рівняння $U^{(n)}Lu=0,\ Lu=0$. Звідси одержимо систему рівнянь, яка збігається з системою /4/, якщо $a_{\alpha\beta}$ замінити на $\frac{a_{\alpha\beta}}{a_{00}}$. Тому і значення коефіцієнтів рівняння /I/ аналогічні попереднім, крім $a_{00}=1$.

Таким чином, із рівнянь /I/ виділено дві сукупності рівнянь, кожне з яких допускає групу перетворень з інфінітезімальним оператором /2/. Цей оператор залишає інваріантними області, обмежені контуром $x^4+y^4=a^4$.

Список літератури: I. Г ю н т е р Н.М. Интегрирование уравнений I-го порядка в частных производных. М., Гостехиздат, 1943. 2. В е с е л о в с к а я А.А. Общее линейное дифференциальное уравнение с частными производными 4-го порядка на плоскости, инвариантное относительно группы вращений. - В сб.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Институт математики АН УССР. К., 1976. 3. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1967. 4. К о с т е н к о В.Г., В е с е л о в с ь к а О.О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех-мат.", 1972, вип. 7. 5. О в с я н н и к о в Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1963. 6. Lie S. Vorlesungen über Differential-gleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.512.2

Я.Г.Притула, канд.фіз.-мат.наук

АБСОЛЮТНА ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР"Є І ЧАСТКОВІ МОДУЛІ ГЛАДКОСТІ

Нехай $f(x,y)$ -майже періодична функція класу S^p /S^p м.п./, спектр якої має єдину точку згущення в нулі або на нескінченності. Ряд Фур"є її можна записати у симетричному вигляді

$$f(x,y)\sim\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_{jk}e^{i(\lambda_j x+\mu_k y)}$$

$$/\lambda_{-j}=-\lambda_j,\ \mu_{-k}=-\mu_k,\ \lambda_j>0\ \text{при}\ j>0,\ \mu_k>0\ \text{при}\ k>0,$$

$$\sum_k|A_{j,k}|+|A_{-j,k}|\neq 0,\ \sum_j|A_{j,k}|+|A_{-j,k}|\neq 0/.$$