Суми виду

$$\sum_{j\in D_n}\sum_{k\in E_n}|A_{j,k}|^{\beta}$$

оцінюємо, використовуючи нерівності Хаусдорфа-Юнга і Гельдера.

УДК 517.9

Л.О.Старокадомський

ПРО НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОЛІНОМІВ ЧЕБИШЕВА

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку з поліноміальними коефіцієнтами на проміжку $[0,l]$

$$L_n(y)=0, \qquad /1/$$

розв"язок якого задовольняє n початкові або крайові умови.

Серед численних методів наближенного розв"язку таких рівнянь помітне місце займають розв"язки, в яких $y(x)$ шукається за допомогою поліномів з невизначеними коефіцієнтами. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що залежно від структури рівняння /1/, типу його особливої точки /нехай це буде нульова точка/ вказані поліноми можуть бути введені через вирази Y вигляду

$$P_k(x);\ e^{\alpha x}P_k(x);\ x^{\mu}P_k(x);\ \ln^{\nu} x\, P_k(x), \qquad /2/$$

де α, μ, ν - деякі сталі; $P_k(x)$ - поліном степення k [2]. При підстановці виразів /2/ в рівняння /1/ одержимо знову вирази вигляду /2/, де P_k замінюється поліномами $Q_N(x)$, коефіцієнти яких залежать від α або μ, або ν і від коефіцієнтів $P_k(x)$. Похибка $L_N(Y)$, з якою задовольнятиметься рівняння /1/, буде залежати, таким чином, від $Q_N(x)$

Прирівняємо $L_n(Y)$ добуткові $e^{\alpha x}$ /або x^{μ}, або $\ln^{\nu} x$ у відповідності з виглядом Y /на $c_0 T_N^*(x)+c_1 T_{N-1}^*(x)+\cdots+c_{N-K}T_K^*(x)$, де $T_N^*(x)$ так званий зміщений до проміжку $[0,1]$ поліном Чебишева І-го роду, поділений на 2^{2N-1}. Тоді

$$Q_N = c_0 T_N^* + \cdots + c_{N-K} T_K. \qquad /3/$$

Це рівняння приведе до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих $c_0, c_1, \ldots, c_{N-K}$ і коефіцієнтів $P_K(x)$.

Може бути три випадки:

1/ Одержана система матиме розв"язок при $Q_N=0$ /при $c_0 = \cdots = c_{N-K}=0$/. Це відповідає випадку, коли точний розв"язок рівняння /I/ може бути знайдено у вигляді /2/, наприклад, при $N<K$ /.

2/ Вказана система матиме розв"язок при $c_1=\cdots=c_{N-K}=0$, тобто при $Q_N=c_0 T_N^*$ /наприклад, при $N=K$ /. У цьому випадку буде забезпечено найліпше в чебишевському розумінні наближення до нуля /порядку 2^{1-2N} / похибки $L_n(Y)$ /точніше її частини Q_N /.

3/ При $N>K$ ніяким вибором коефіцієнтів полінома $P_K(x)$ не можна звести Q_N до T_N^*, таким чином, прямування $L_N(Y)$ до нуля на $[0,1]$ може бути оцінено величиною $C\cdot 2^{1-2K}$, де $C = \max\{c_0, \ldots, c_{N-K}\}$. Зазначимо, що в усіх випадках можна одержати точну оцінку похибки, з якою задовольняється рівняння /I/. Знаходячи описаним вище методом наближені часткові розв"язки $Y_1, \ldots, Y_n$, можна побудувати наближений загальний розв"язок $\bar{y}=c_1 Y_1+\cdots+c_n Y_n$, де $c_1, \ldots, c_n$ визначається з умов точного задовільнення початкових або крайових умов.

З теорії диференціальних рівнянь випливає, що наближений розв"язок прямуватиме до точного при $K\to\infty$, бо $L_n(y)\to 0$ при $K\to\infty$ /2/. Природно і те, що наближений розв"язок $\bar{y}$, який одержується згідно з запропонованим методом виявляється, як правило, більш точним, ніж при розв"язанні /I/ іншими методами /наприклад, методом степеневих рядів/.

<u>Зауваження</u>. При відсутності в розв"язку Y членів з x^{μ} або $\ln^{\nu}(x)$ можна для одержання незалежних розв"язків $Y_1, \dots, Y_n$ практикувати підбір сталих $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ у виразі $e^{\alpha x} P_k(x)$, виходячи з міркувань зручності. Наприклад, можна прийняти $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$ і т.п. Наведемо приклади:

I. Точний розв"язок рівняння

$$y'' - xy' - Ay = 0; \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0 \qquad /4/$$

такий:

$$y = c_1\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A(A+2)\dots(A+2n-2)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + c_2\left(x + \sum_{n=1}^{\infty}(A+1)\dots(A+2n-1)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

Для одержання наближеного розв"язку приймаємо

$$Y = e^{\alpha x} P_3; \quad P_3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

прирівнюємо $e^{\alpha x} Q_4(x) = e^{\alpha x}\left[c_0 T_4^* + c_1 T_3^*\right]$ і, порівнюючи у цій рівності коефіцієнти при однакових степенях x, приходимо до системи

$$\begin{cases} (\alpha^2 - A)a_0 + 2\alpha a_1 + 2\alpha a_2 = -\frac{1}{32}c_1 + \frac{1}{128}c_0, \\ -\alpha a_0 + (\alpha^2 - 1 - A)a_1 + 4\alpha a_2 + 6a_3 = \frac{9}{16}c_1 - \frac{1}{4}c_0, \\ -\alpha a_1 + (\alpha^2 - 2 - A)a_2 + 3\alpha a_3 = -\frac{3}{2}c_1 + \frac{5}{4}c_0, \\ -\alpha a_2 + (\alpha^2 - 3 - A)a_3 = c_1 - 2c_0, \\ -\alpha a_3 = c_0 \end{cases}$$

Приймемо перший раз $\alpha = 0$, а другий $\alpha = -1$. У першому випадку одержимо $c_{10} = c_0 = 0$ і при $A \neq -3, -2, -1, 0$ виразимо $a_0, \dots, a_3$ через $c_{11} = c_1$. Ці коефіцієнти визначають $Y_1 = c_{11} P_{13}$. /При $A = -3, -2, -1, 0$ буде $c_{11} = 0$ і, таким чином, визначаються коефіцієнти полінома $P_3(x)$, який є точним розв"язком рівняння /4//.

У другому випадку з /5/ через $C_{20}=C_0$ визначається $a_0, \ldots, a_3$ і c_{21}, так що $Y_2=c_{20}e^{-x}P_{23}(x)$. Загальний розв"язок буде $Y=c_{11}P_{13}(x)+c_{20}e^{-x}P_{23}(x)$. Визначивши C_{11} і C_{20} з початкових умов, одержимо наближений розв"язок задачі /4/ і точну оцінку похибки, з якою задовольняється рівняння /4/

$$\Delta=\left|c_{11}T_3^*(x)+e^{-x}\left(c_{20}T_4^*(x)+c_{21}T_3^*(x)\right)\right|=\left|-\frac{1}{32}c_{11}+e^{-x}\left(\frac{1}{128}c_{20}-\frac{1}{32}c_{21}\right)\right| .$$

де C_{11}, C_{20}, C_{21} – відомі числа. Точність наближеного розв"язку одержується, природно, вищою ніж при розв"язанні /4/, наприклад, методом степеневих рядів. При $A=1$, $y_0=1$, $y_0'=0$ відносна похибка Y не перевищує 0,8%, а методом степеневих рядів – 8%.

2. Точний розв"язок рівняння

$$16x^2y''+(4x+3)y=0$$

такий [1]

$$y=x^{1/4}(c_1\cos\sqrt{x}+c_2\sin\sqrt{x})$$

Приймаємо $Y_i\ x^{\frac{2i-1}{4}}(a_i+b_ix)$, $i=1,2$. Визначивши a_i, b_i одержуємо при $y(1)=1$; $y'(1)=0$, що відносна похибка Y становить 0,3%, тоді як методом степеневих рядів 1,2%.

Список літератури: 1. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., ИЛ. 1950. 2. С т е п а н о в В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., "Наука", 1966.

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

І.Д.Квіт, канд.фіз.-мат.наук

ЗВОРОТНА ФОРМУЛА ДЛЯ ВІДБИТТЯ

Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу

$$F(t),\quad t>0;\qquad F(0)=0;\quad \int_0^\infty dF(t)=1 \qquad /1/$$