У другому випадку з /5/ через $C_{20}=C_0$ визначається $a_0, \dots, a_3$ і c_{21}, так що $Y_2=c_{20}e^{-x}P_{23}(x)$. Загальний розв"язок буде $Y=c_{11}P_{13}(x)+c_{20}e^{-x}P_{23}(x)$. Визначивши C_{11} і C_{20} з початкових умов, одержимо наближений розв"язок задачі /4/ і точну оцінку похибки, з якою задовольняється рівняння /4/

$$\Delta=\left|c_{11}T_3^*(x)+e^{-x}\left(c_{20}T_4^*(x)+c_{21}T_3^*(x)\right)\right|=\left|-\frac{1}{32}c_{11}+e^{-x}\left(\frac{1}{128}c_{20}-\frac{1}{32}c_{21}\right)\right|,$$

де C_{11}, C_{20}, C_{21} – відомі числа. Точність наближеного розв"язку одержується, природно, вищою ніж при розв"язанні /4/, наприклад, методом степеневих рядів. При $A=1$, $y_0=1$, $y_0'=0$ відносна похибка Y не перевищує 0,8%, а методом степеневих рядів – 8%.

2. Точний розв"язок рівняння

$$16x^2y''+(4x+3)y=0$$

такий /1/

$$y=x^{1/4}(c_1\cos\sqrt{x}+c_2\sin\sqrt{x})$$

Приймаємо $Y_i=x^{\frac{2i-1}{4}}(a_i+b_ix)$, $i=1,2$. Визначивши a_i, b_i одержуємо при $y(1)=1$; $y'(1)=0$, що відносна похибка Y становить 0,3%, тоді як методом степеневих рядів 1,2%.

Список літератури: 1. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., ИЛ. 1950. 2. С т е п а н о в В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., "Наука", 1966.

П Р И К Л А Д Н А М А Т Е М А Т И К А

УДК 519.21

І.Д.Квіт, канд.фіз.-мат.наук

ЗВОРОТНА ФОРМУЛА ДЛЯ ВІДБИТТЯ

Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу

$$F(t),\quad t>0;\qquad F(0)=0;\qquad \int_0^\infty dF(t)=1 \qquad /1/$$

та відбиття

$$\varphi(z) = \int_0^\infty t^{z-1} dF(t), \qquad (z = x + iy \ , \ i = \sqrt{-1}) , \qquad /2/$$

що є аналітичною функцією принаймні в смузі

$$1 - \alpha < x < 1 + \beta \ , \ (\alpha > 0 \ , \ \beta > 0) . \qquad /3/$$

Із теорії функцій [2] відомо, що коли $c > 0$, то при $a > 0$ головне значення інтеграла

$$\Delta(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^z}{z} dz = \begin{cases} 0 , & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} , & a = 1 \\ 1 , & a > 1 \end{cases} = \frac{sgn(a-1)+1}{2} , \qquad /4/$$

де

$$sgn\, \gamma = \begin{cases} -1 , & \gamma < 0 , \\ 0 , & \gamma = 0 , \\ +1 , & \gamma > 0 . \end{cases}$$

Відзначимо, що функція /4/ в околі неодиниці набуває єдиного значення, а в околі одиниці - три значення. Надалі значення функції /4/ при одиничній вартості аргумента не буде потрібне. Треба буде щонайвище значення справа або зліва від одиниці. Тому замість /4/ символічно писатимемо:

$$\Delta(a+0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(a+0)^z}{z} dz = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ 1 , & a > 1 \end{cases} = \frac{sgn(a+0-1)+1}{2} , \qquad /5/$$

або

$$\Delta(a-0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(a-0)^z}{z} dz = \begin{cases} 0, & 0 < a \leq 1 \\ 1, & a > 1 \end{cases} = \frac{sgn(a-0-1)+1}{2} . \qquad /6/$$

Функція /5/ неперервна справа, а /6/ – зліва. Зрозуміло, що при $t>0$

$$\Delta\left(\frac{a}{t}+0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{a}{t}+0\right)^{z}}{z}dz=\begin{cases}0, & 0<a<t\\ 1, & a>t>0\end{cases}=\frac{sgn\left(\frac{a}{t}+0-1\right)+1}{2} \qquad /7/$$

та

$$\Delta\left(\frac{a}{t}-0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{a}{t}-0\right)^{z}}{z}dz=\begin{cases}0, & 0<a<t\\ 1, & a>t>0\end{cases}=\frac{sgn\left(\frac{a}{t}-0-1\right)+1}{2}. \qquad /8/$$

Означення I. Інтервальним обмежником називаємо довільну функцію, яка на інтервалі $(a,b]\in(0,\infty)$ дорівнює одиниці, а зовні нього – нулю.

Наприклад, інтервальним обмежником є вираз

$$R(a,b]=\Delta\left(\frac{b}{t}+0\right)-\Delta\left(\frac{a}{t}+0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{b}{t}+0\right)^{z}-\left(\frac{a}{t}+0\right)^{z}}{z}dz= \qquad /9/$$

$$=\begin{cases}0, & 0<t\le a,\ t>b\\ 1, & a<t\le b\end{cases}=\frac{sgn\left(\frac{b}{t}+0-1\right)-sgn\left(\frac{a}{t}+0-1\right)}{2}.$$

Обмежник /9/ – функція неперервна зліва.

Означення 2. Точковим обмежником називаємо довільну функцію, яка в одному пункті $\omega\in(0,\infty)$ дорівнює одиниці, а зовні нього – нулю.

Наприклад, точковим обмежником є вираз

$$R[\omega]=\Delta\left(\frac{\omega}{t}+0\right)-\Delta\left(\frac{\omega}{t}-0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{\omega}{t}+0\right)^{z}-\left(\frac{\omega}{t}-0\right)^{z}}{z}dz= \qquad /10/$$

$$=\begin{cases}0, & 0<t<\omega,\ t>\omega\\ 1, & t=\omega\end{cases}=\frac{sgn\left(\frac{\omega}{t}+0-1\right)-sgn\left(\frac{\omega}{t}-0-1\right)}{2}.$$

Зворотна формула. Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу /1/ та відбиття /2/ в смузі /3/. Тоді приріст функції розподілу на інтервалі $(a,b]$, де $0<a<b<\infty$, дорівнює головному значенню інтеграла вздовж прямої $Re\,z=c$ $max(0,1-\alpha)<c<1$ від добутку відбиття на ядро

$$N(z;a,b)=\frac{(b+0)^{1-z}-(a+0)^{1-z}}{2\pi i(1-z)},$$

тобто

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(b+0)^{1-z}-(a+0)^{1-z}}{1-z}\,\varphi(z)\,dz\,. \qquad /11/$$

<u>Доведення.</u> Коли врахувати /2/, то правий бік /11/ можна записати у вигляді подвійного інтеграла

$$\lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{(b+0)^{1-z}-(a+0)^{1-z}}{2\pi i(1-z)}\int_0^\infty t^{z-1}\,dF(t)\,dz\,. \qquad /12/$$

Оскільки в /12/ інтеграл відносно t абсолютно збігається для z зі смуги /3/ і, зокрема, для z на прямій $Re\,z=c$, $max(0,1-\alpha)<c<1$, а відносно z межі інтеграла скінченні, то змінимо черговість інтегрування. Одержуємо

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\left(\frac{b}{t}+0\right)^{1-z}-\left(\frac{a}{t}+0\right)^{1-z}}{1-z}\,dz\right\}dF(t)=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{(1-c)-iT}^{(1-c)+iT}\frac{\left(\frac{b}{t}+0\right)^{\zeta}-\left(\frac{a}{t}+0\right)^{\zeta}}{\zeta}\,d\zeta\right\}dF(t),\ 0<1-c<min(1,\alpha).$$

Границя останнього внутрішнього інтеграла існує та збігається з /9/. Отже маємо

$$\int_0^\infty R(a,b]\,dF(t)=\int_a^b dF(t)=F(b)-F(a)\ -$$

лівий бік /11/. Зворотна формула /11/ - доведена. Відзначимо, що методично вивід зворотної формули для відбиття аналогічний до відповідного виводу зворотної формули для характеристичної функції [1].

Першим безпосереднім наслідком зворотної формули /11/ є теорема єдиності. Відбиття /2/ в смузі /3/ однозначно визначає свою функцію розподілу /I/, причому

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(t+0)^{1-z}}{1-z}\varphi(z)dz,\ \max(0,1-\alpha)<c<1,\ t>0. \qquad /13/$$

Для доведення співвідношення /I3/ досить у зворотній формулі /II/ замість b прийняти t і спрямувати a до нуля.

Другим безпосереднім наслідком зворотної формули /II/ є теорема про величину стрибка функції розподілу в точці. Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу /I/ та відбиття /2/ в смузі /3/. Тоді стрибок функції розподілу в пункті $\omega\in(0,\infty)$ дорівнює

$$F(\omega+0)-F(\omega-0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(\omega+0)^{1-z}-(\omega-0)^{1-z}}{1-z}\varphi(z)dz,\max(0,1-\alpha)<c<1. \qquad /14/$$

Для доведення співвідношення /I4/ досить у зворотній формулі /II/ замість b прийняти $\omega+0$, замість a – $\omega-0$ і повторити доведення /II/. При цьому замість обмежника /9/ зустрінеться точковий обмежник /I0/. Правий бік /I4/ зводиться до виразу

$$\int_0^{\infty}R[\omega]\,dF(t)=\int_{t=\omega}dF(t)=F(\omega+0)-F(\omega-0).$$

Формальним посереднім наслідком зворотної формули /II/ є зворотна формула Мелліна [3]. Якщо додатна випадкова змінна ξ абсолютно неперервна та має густину $f(t)$, $t>0$, то співвідношення /2/ /якщо існує/ набуває вигляду

$$\varphi(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}f(t)dt,\quad 1-\alpha<\operatorname{Re}z<1+\beta, \qquad /15/$$

і зі співвідношення /I3/ формально дістаємо

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^{-z}\varphi(z)dz,\quad t>0. \qquad /16/$$

Оскільки інтеграл /I6/ не залежить від вибору сталої c з інтервалу $(1-\alpha,1+\beta)$, то можна прийняти $c=1$. Таким чином, майже всюди

$$p(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} t^{-z}\varphi(z)\,dz\ ,\quad t>0\ . \qquad /17/$$

Якщо $\varphi(z)$ – мероморфна функція, то для обчислення інтеграла /17/ при $0<t<1$ використовуємо контур лівого півкола з центром в точці $c=1$, замкнений діаметром, а при $t>1$ – контур правого півкола і теорему про залишки.

Для ілюстрації формул /13/, /14/ і /17/ розглянемо приклади.

Нехай відбиття

$$\varphi(z)=\lambda^{1-z}\,\Gamma(z),\quad Re\,z>0\ ,\ (\lambda>0).$$

Знайти відповідну функцію розподілу ймовірностей.

Оскільки

$$\operatorname*{res}_{z=-l}\Gamma(z)=\frac{(-1)^l}{l!}\ ,\quad (l=0,1,2,\ldots),$$

то за формулою /13/, при $t>0$ та $0<c<1$, маємо

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(\lambda t+0)^{1-z}}{1-z}\Gamma(z)\,dz=\sum_{l=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{z=-l}\left\{\frac{(\lambda t+0)^{1-z}}{1-z}\Gamma(z)\right\}=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\lambda t+0)^{l+1}}{l+1}\cdot\frac{(-1)^l}{l!}=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\lambda t)^{l+1}}{(l+1)!}=1-e^{-\lambda t}.$$

Нехай відбиття

$$\varphi(z)=\frac{a^{z-1}+2b^{z-1}}{3},\ Re\,z>-\infty\ (0<a<b)\ .$$

Знайти величину стрибка відповідної функції розподілу в пункті $\omega=b$.

За формулою /14/ при $0<c<1$, використовуючи /5/ і /6/, маємо

$$F(b+0)-F(b-0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(\frac{b}{a}+0)^{1-z}-(\frac{b}{a}-0)^{1-z}}{1-z}dz+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(1+0)^{1-z}-(1-0)^{1-z}}{1-z}dz=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{sgn(\frac{b}{a}+0-1)-sgn(\frac{b}{a}-0-1)}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{sgn(+0)-sgn(-0)}{2}=\frac{2}{3}\ .$$

Нехай відбиття

$$\varphi(z)=\frac{\alpha^2}{(z+\alpha-1)(1+\alpha-z)},\ 1-\alpha<\operatorname{Re} z<1+\alpha \quad (\alpha>0).$$

Знайти відповідну густину розподілу ймовірностей.

Оскільки відбиття є мероморфною функцією, то за формулою /17/ маємо

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{\alpha^2 t^{-z}\,dz}{(z+\alpha-1)(1+\alpha-z)}=\begin{cases}\frac{\alpha}{2t^{1-\alpha}}, & 0<t<1,\\ \frac{\alpha}{2t^{1+\alpha}}, & t>1,\ \alpha>0.\end{cases}$$

Це густина добутку двох незалежних випадкових змінних: одна з густиною $\alpha t^{\alpha-1}$, $0<t<1$, $\alpha>0$, а друга - обернена величина цієї випадкової змінної.

Список літератури: 1. К в і т І.Д. Уточнення зворотної формули для характеристичної функції випадкового вектора. - "Вісник Львів. ун-ту, сер.мех.-мат.", 1971, вип.6. 2. Т и т ч м а р ш Е. Теория функций. М.-Л., Гостехиздат, 1951. 3. Mellin Hj. Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. - "Acta Mathematica", 1902, 25.

УДК 519.21

І.Д.Квіт, канд.фіз.-мат.наук, В.М.Косарчин, канд.фіз.-мат.наук

ЕКСПОНЕНТНІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РОЗПОДІЛИ. ВІДБИТТЯ ТА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ

1. Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу

$$P\{\xi\le t\}=F(t),\ t>0;\quad F(0)=0. \qquad /1/$$

Тоді випадкова змінна $\eta=\ln\xi$ називається е к с п о н е н т н о ю