Нехай відбиття

$$\varphi(z)=\frac{\alpha^2}{(z+\alpha-1)(1+\alpha-z)}, \quad 1-\alpha<\operatorname{Re} z<1+\alpha \quad (\alpha>0).$$

Знайти відповідну густину розподілу ймовірностей.

Оскільки відбиття є мероморфною функцією, то за формулою /17/ маємо

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{\alpha^2 t^{-z}\,dz}{(z+\alpha-1)(1+\alpha-z)}=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{2t^{1-\alpha}}, & 0<t<1,\\[2ex] \dfrac{\alpha}{2t^{1+\alpha}}, & t>1,\ \alpha>0.\end{cases}$$

Це густина добутку двох незалежних випадкових змінних: одна з густиною $\alpha t^{\alpha-1}$, $0<t<1$, $\alpha>0$, а друга - обернена величина цієї випадкової змінної.

Список літератури: 1. К в і т І.Д. Уточнення зворотної формули для характеристичної функції випадкового вектора. - "Вісник Львів. ун-ту, сер.мех.-мат.", 1971, вип.6. 2.Т и т ч м а р ш Е. Теория функций. М.-Л., Гостехиздат, 1951. 3. Mellin Hj. Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. - "Acta Mathematica", 1902, 25.

УДК 519.21

І.Д.Квіт, канд.фіз.-мат.наук, В.М.Косарчин, канд.фіз.-мат.наук

ЕКСПОНЕНТНІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РОЗПОДІЛИ. ВІДБИТТЯ ТА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ

1. Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу

$$P\{\xi\le t\}=F(t), \quad t>0; \quad F(0)=0. \qquad /1/$$

Тоді випадкова змінна $\eta=\ln\xi$ називається е к с п о н е н т н о ю та має функцію розподілу

$$G(\tau) = P\{\eta \le \tau\} = P\{\xi \le e^{\tau}\} = F(e^{\tau}), \ -\infty < \tau < \infty \ . \qquad /2/$$

Зокрема, якщо ξ має густину

$$f(t) = F'(t) \ , \quad t > 0 \ , \qquad /3/$$

то густина відповідної експонентної випадкової змінної дорівнює

$$g(\tau) = e^{\tau} f(e^{\tau}) \ , \ -\infty < \tau < \infty \ . \qquad /4/$$

Позначимо через Φ клас тих додатних випадкових змінних, що мають відбиття

$$\varphi(z) = E\,\xi^{z-1} = \int_0^{\infty} t^{z-1} dF(t) \ , \ 1-\alpha < Re\, z < 1+\beta \ , \ (\alpha > 0 \ , \ \beta > 0) \ . \qquad /5/$$

Із аналітичності відбиття /5/ випливає існування похідних усіх порядків

$$\varphi^{\kappa}(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} (\ln t)^{\kappa} dF(t) \ , \ 1-\alpha < Re\, z < 1+\beta \ , \ (\kappa = 1, 2, \dots) \qquad /6/$$

та розкладу в ряд Тейлора

$$\varphi(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(\kappa)}(1)}{\kappa!} (z-1)^{\kappa} \qquad /7/$$

у деякому околі точки $z = 1$. Радіус збіжності ряду /7/ дорівнює $min(\alpha, \beta)$.

Натуральний початковий момент порядку κ експонентної випадкової змінної з функцією розподілу /2/ формально дорівнює

$$m_{\kappa} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{\kappa} dG(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{\kappa} dF(e^{\tau}) = \int_0^{\infty} (\ln t)^{\kappa} dF(t) \ , \ (\kappa = 1, 2, \dots) \ . \qquad /8/$$

Порівнюючи вирази /8/ та /6/, бачимо, що коли в додатної випадкової змінної наявне відбиття /5/, то відповідна експонентна випадкова змінна має натуральні початкові моменти /9/ всіх порядків, причому

$$m_{\kappa} = \varphi^{(\kappa)}(1) \qquad (\kappa = 1, 2, \dots) \ . \qquad /9/$$

З огляду на рівномірну збіжність ряду /7/ в околі точки $z=1$ розподіл /2/ однозначно визначається своїми моментами /порівн.[2] /.

Таким чином, кожній додатній випадковій змінній ξ з функцією розподілу /1/ однозначно відповідає експонентна випадкова змінна $\eta=\ln\xi$ з функцією розподілу /2/. При цьому, якщо ξ має відбиття /5/, $\xi\in\Phi$, то $\ln\xi$ має моменти /8/ всіх порядків і для розподілу /2/ проблема моментів означена.

Приклад. Випадкова змінна Парето має функцію розподілу

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ 1-\frac{1}{t^\lambda}, & 1\le t \quad (\lambda>0),\end{cases}$$

і відбиття

$$\varphi(z)=\frac{\lambda}{1+\lambda-z}, \quad \operatorname{Re} z<1+\lambda .$$

Відповідна експонентна випадкова змінна має функцію розподілу

$$G(\tau)=\begin{cases}0, & \tau<0,\\ 1-e^{-\lambda\tau}, & 0\le\tau, \quad (\lambda>0),\end{cases}$$

і натуральні початкові моменти

$$m_k=\frac{k!}{\lambda^k}, \quad (k=1,2,\dots).$$

Моменти m_k однозначно визначають розподіл $G(\tau)$.

2. Нехай випадкова змінна η має функцію розподілу

$$P\{\eta\le\tau\}=G(\tau), \; -\infty<\tau<\infty . \qquad /10/$$

Тоді випадкова змінна $\xi=e^\eta$ називається логарифмічною та має функцію розподілу

$$F(t)=0,\ t\le 0;\ F(t)=P\{\xi\le t\}=P\{\eta\le\ln t\}=G(\ln t),\ t>0 . \qquad /11/$$

Зокрема, якщо η має густину

$$g(\tau)=G'(\tau), \; -\infty<\tau<\infty, \qquad /12/$$

то густина відповідної логарифмічної випадкової змінної дорівнює

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \frac{1}{t}\,g(\ln t), & t>0.\end{cases} \qquad /I3/$$

Позначимо через M клас тих випадкових змінних, для яких існують натуральні початкові моменти всіх порядків

$$m_k = E\eta^k=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^k dG(\tau)\ , \ (k=1,2,\dots), \qquad /I4/$$

і абсолютні моменти

$$M_k = E|\eta|^k=\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^k dG(\tau)\,,\ (k=1,2,\dots)\,, \qquad /I5/$$

виконують умову

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{k}M_k^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{e\gamma}<\infty\ ,\ \gamma>0. \qquad /I6/$$

З умови /I6/ випливає, що функція розподілу /I0/ однозначно визначається своїми моментами /I4/ /порівн. [3] / і ряд

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{k!}(z-1)^k, \qquad /I7/$$

що має радіус збіжності γ, представляє функцію аналітичну принаймні в смузі

$$1-\gamma<\operatorname{Re} z<1+\gamma\ ,\ \gamma>0\ . \qquad /I8/$$

Відбиття логарифмічної випадкової змінної з функцією розподілу /II/ формально дорівнює

$$\varphi(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}dF(t)=\int_0^{\infty}t^{z-1}dG(\ln t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{(z-1)\tau}dG(\tau)\,. \qquad /I9/$$

Формально диференціюючи співвідношення /I9/, одержуємо

$$\varphi^{k}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{(z-1)\tau}\tau^k dG(\tau)\ ,\quad (k=1,2,\dots)\,. \qquad /20/$$

Порівнюючи вирази /20/ і /I4/, бачимо, що

$$\varphi^{(k)}(1) = m_k\,, \quad (k=1,2,\ldots)\,, \qquad /21/$$

і далі з /I7/ випливає, що функція /I9/ аналітична принаймні в смузі /I8/. Отже, упохіднювання функції /I9/ в околі точки $z=1$ обгрунтоване.

Таким чином, кожній випадковій змінній η з функцією розподілу /I0/ однозначно відповідає логарифмічна випадкова змінна $\xi = e^{\eta}$ з функцією розподілу /II/. При цьому, якщо η має моменти /I4/, що задовольняють умову /I6/, то e^{η} має відбиття /I7/, аналітичне принаймні в смузі /I8/. Коротко, коли $\eta \in M$, то $e^{\eta} \in \Phi$.

<u>Приклад</u>. Нормальній випадковій змінній з густиною

$$g(\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\tau-a)^2}{2\sigma^2}}\,, \quad -\infty < \tau < \infty, \; (-\infty < a < \infty\,,\ \sigma > 0)$$

і початковими моментами

$$m_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2j} (2\sigma^2)^j a^{k-2j}\, \Gamma\!\left(j+\frac{1}{2}\right), \quad (k=1,2,\ldots)$$

відповідає логарифмічно нормальна випадкова змінна з густиною

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}}\,, \quad 0 < t$$

і відбиттям

$$\varphi(z) = e^{a(z-1) + \frac{\sigma^2}{2}(z-1)^2}\,, \quad -\infty < \mathrm{Re}\, z\,.$$

3. На основі п.І і 2 приходимо до таких висновків:

I/ Множина всіх випадкових змінних збігається з множиною $\mathcal{E}$ експонентних випадкових змінних.

2/ Множина додатних випадкових змінних збігається з множиною $\mathcal{L}$ логарифмічних випадкових змінних.

3/ Між елементами множини $\mathcal{E}$ та $\mathcal{L}$ існує взаємнооднозначна відповідність, що встановлюється формулами /I/, /2/ і /I0/, /II/ або /3/, /4/ і /I2/, /I3/, якщо існує густина.

4/ Клас M є властивою частиною множини $\mathcal{E}$, а клас Φ – множини $\mathcal{L}$; $M \subset \mathcal{E}$, $\Phi \subset \mathcal{L}$.

5/ Якщо випадкова змінна $\eta \in M$, то випадкова змінна $e^{\eta} \in \Phi$.

6/ Коли випадкова змінна $\eta \in M$, то за YY моментами /I4/ відновлюється розподіл /I0/. Справді, послідовність моментів /I4/, яка задовольняє умову /I6/, визначає аналітичну функцію /I7/ в смузі /I8/. Звідси, за зворотною формою для відбиття /порівн. [I] / одержуємо розподіл /I/ відповідної логарифмічної змінної. Далі, з розподілу /I/ випливає розподіл /2/, що буде потрібним розподілом /I0/.

7/ Двояке представлення моментів /8/ і /9/ може послужити для обчислення деяких інтегралів.

8/ Коли випадкова змінна не має всіх моментів, або для неї проблема моментів неозначена, то відповідна логарифмічна змінна не має відбиття.

9/ Із відповідності, якщо $\eta \in M$, то $e^{\eta} \in \Phi$, випливає, що твердження про розподіли в класі M мають дуальні аналоги в класі Φ .

<u>Приклади.</u> а/ при фіксованому $\lambda = np$ логарифмічно біномний розподіл збігається до логарифмічно пуассонівського

$$(pe^{z-1}+q)^n = \left[1+\frac{\lambda(e^{z-1}-1)}{n}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda(e^{z-1}-1)}, \quad -\infty < Re\, z ;$$

б/ розподіл логарифмічно біномної випадкової змінної відповідно центрованої та нормованої збігається до стандартно логарифмічно нормального розподілу

$$e^{-(z-1)\sqrt{\frac{np}{q}}}\left(pe^{\frac{z-1}{\sqrt{npq}}}+q\right)^n = \left[1+\frac{\frac{1}{2}(z-1)^2+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{1}{2}(z-1)^2}, \quad -\infty < Re\, z ;$$

в/ добуток незалежних логарифмічно біномних змінних з однаковим параметром p та відповідними параметрами $n_1, n_2, \dots, n_k$, також логарифмічно біномна змінна /з параметрами p і $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$;

г/ добуток незалежних логарифмічно пуассонівських змінних з параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, також логарифмічно пуасонівська змінна /з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ /;

д/ добуток незалежних логарифмічно нормальних випадкових змінних з параметрами $(a_1, \sigma_1^2), (a_2, \sigma_2^2), \dots, (a_k \sigma_k^2)$, також логарифмічно нормальна змінна /з параметрами $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ та $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2$ /.

Зрозуміло, що при відповідних умовах, теореми про граничні розподіли для сум незалежних випадкових змінних мають аналоги для добутків.

Список літератури: І. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. У цьому ж Віснику. 2. Ф е л л е р В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М., "Мир", 1967. 3. Shohat J. A., Tamarkin J.D. The Problem of Moments, 1943, N.Y.

УДК 519.95

М.Я.Бартіш, канд.фіз.-мат.наук, М.Г.Стащук

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

Розглянемо задачу мінімізації неперервно диференційованої функції $(f(x) \in C^1(E_n))$:

$$f: E_n \longrightarrow E_1 .$$

Найбільш поширеними методами розв"язування цієї задачі є градієнтні методи і методи типу Ньютона [3]. Градієнтні методи досить прості, однак збігаються зі швидкістю геометричної прогресії, що вимагає для їх реалізації багато машинного часу. Методи типу Ньютона, навпаки, мають квадратичну збіжність, але складніші при реалізації. На практиці часто використовують модифікації методів, які локально переходять в методи типу Ньютона /сюди належить метод Ньютона з регулюванням кроку/.