метрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, також логарифмічно пуасонівська змінна /з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ /;

д/ добуток незалежних логарифмічно нормальних випадкових змінних з параметрами $(a_1, \sigma_1^2), (a_2, \sigma_2^2), \dots, (a_k \sigma_k^2)$, також логарифмічно нормальна змінна /з параметрами $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ та $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2$ /.

Зрозуміло, що при відповідних умовах, теореми про граничні розподіли для сум незалежних випадкових змінних мають аналоги для добутків.

Список літератури: I. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. У цьому ж Віснику. 2. Ф е л л е р В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М., "Мир", 1967. 3. Shohat J. A., Tamarkin J.D. The Problem of Moments, 1943, N.Y.

УДК 519.95

М.Я.Бартіш, канд.фіз.-мат.наук, М.Г.Стащук

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

Розглянемо задачу мінімізації неперервно диференційованої функції $(f(x) \in C^1(E_n))$:

$$f: E_n \longrightarrow E_1 .$$

Найбільш поширеними методами розв"язування цієї задачі є градієнтні методи і методи типу Ньютона [3]. Градієнтні методи досить прості, однак збігаються зі швидкістю геометричної прогресії, що вимагає для їх реалізації багато машинного часу. Методи типу Ньютона, навпаки, мають квадратичну збіжність, але складніші при реалізації. На практиці часто використовують модифікації методів, які локально переходять в методи типу Ньютона /сюди належить метод Ньютона з регулюванням кроку/.

Ми пропонуємо один із методів розв"язування задачі мінімізації, який за кількістю обчислень на кожній ітерації близький до градієнтного методу, а за швидкістю збіжності – до методу Ньютона.

Розглянемо метод

$$\tilde{x}_k = x_k - h_k \nabla f(x_k), \quad (\nabla f(x_k), \nabla f(\tilde{x}_k)) > 0,$$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(\tilde{x}_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

де $h_k = \theta \beta_k$, $0 < \theta < 1$. Параметри β_k, λ_k вибираємо з умови мінімуму функцій

$$G_k(\beta_k) = \min_{\beta > 0} G_k(\beta), \qquad /2/$$

де

$$G_k(\beta) = f(x_k - \beta \nabla f(x_k));$$

$$g_k(\lambda_k) = \min_{\lambda > 0} g_k(\lambda), \qquad /3/$$

де

$$g_k(\lambda) = f(x_k - \lambda \nabla f(\tilde{x}_k)).$$

<u>Теорема.</u> Нехай випукла функція $f(x) \in C^1(E_n)$, $\inf_{x \in E_n} f(x) = f^* > -\infty$ і градієнт $\nabla f(x)$ задовольняють умову Ліпшиця

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \le R\|x - y\|, \quad R = const > 0$$

x_0 – довільна фіксована точка і послідовність $\{x_k\}$, одержана запропонованим вище методом. Тоді $\lim_{k \to \infty} \nabla f(x_k) = 0$.

<u>Доведення.</u> Якщо при $k \ge 0$ виявиться $\nabla f(x_k) = 0$, то із запропонованого методу видно, що $x_k = x_{k+1} = \cdots$. У цьому випадку твердження стає тривіальним $\lim_{k \to \infty} \nabla f(x_k) = 0$. Вважаємо $\nabla f(x_k) \ne 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тому що

$$f(x_{k+1}) = g_k(\lambda_k) = f(x_k - \lambda_k \nabla f(\tilde{x}_k)) \le g_k(\lambda) = f(x_k - \lambda \nabla f(\tilde{x}_k))$$

при всіх $\lambda > 0$, то, використовуючи лему з роботи /1/, записуємо

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq f(x_k) - f(x_k - \lambda \nabla f(\tilde{x}_k)) \geq \lambda (\nabla f(x_k), \nabla f(\tilde{x}_k)) - $$
$$- \frac{\lambda^2}{2} R \| \nabla f(\tilde{x}_k) \|^2 .$$

Очевидно

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \max_{\lambda > 0} \left\{ \lambda \alpha_k \| \nabla f(x_k) \| \| \nabla f(\tilde{x}_k) \| - \frac{\lambda^2}{2} R \| \nabla f(\tilde{x}_k) \|^2 \right\} =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\alpha_k^2}{R} \| \nabla f(x_k) \|^2 > 0,$$

де

$$\alpha_k = \frac{(\nabla f(x_k), \nabla f(\tilde{x}_k))}{\| \nabla f(x_k) \| \| \nabla f(\tilde{x}_k) \|} .$$

Звідси видно, що послідовність $\{ f(x_k) \}$ строго спадає. Тому що

$\inf_{x \in E_n} f(x) = f^* > -\infty,$ то $f(x_k) - f(x_{k+1}) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Тоді $\lim_{k \to \infty} \nabla f(x_k) = 0.$

Теорема доведена.

Оцінку швидкості збіжності розглянемо для простішого випадку, а саме, для квадратичної форми $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x)$, де A - симетрична додатно визначена матриця; M, m - відповідно максимальне і мінімальне власне число оператора A .

З /2/ і /3/ визначимо

$$h_k = \theta \frac{(Ax_k, Ax_k)}{(A^2 x_k, Ax_k)} , \quad \lambda_k = \frac{(A\tilde{x}_k, Ax_k)}{(A^2 \tilde{x}_k, A\tilde{x}_k)} .$$

Шляхом простих перетворень отримаємо

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) \left\{ 1 - \frac{(A\tilde{x}_k, Ax_k)^2}{(A^2 \tilde{x}_k, Ax_k)(Ax_k, x_k)} \right\} .$$

Використовуючи лему з роботи /2/, одержуємо оцінку

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) \left\{ 1 - \frac{4mM}{(m+M)^2} \varphi_k(\theta) \right\} ,$$

де

$$\varphi_k(\theta) = \frac{(1-\theta)^2}{1 - 2\theta \gamma_k + \theta^2 \xi_k} ,$$

$$\gamma_k = \frac{\|Ax_k\|^2 \|A^2x_k\|^2}{(A^2x_k, Ax_k)^2}, \qquad \xi_k = \frac{\|Ax_k\|^4 (A^3x_k, A^2x_k)}{(A^2x_k, Ax_k)^3}.$$

Очевидно, $\gamma_k > 1$ і $\xi_k > 1$.

Тоді знайдеться таке $0 < \theta < 1$, що виконується умова $\varphi_k(\theta) > 1$, тобто

$$(1-\theta)^2 > 1 - 2\theta\gamma_k + \theta^2\xi_k > 0. \qquad /4/$$

Умова /4/ виконується при

$$\theta \in \left[0, \min\left\{1; \frac{2(\gamma_k - 1)}{\xi_k - 1}; \frac{\gamma_k - \sqrt{\gamma_k^2 - \xi_k}}{\xi_k}, \text{якщо } \xi_k < \gamma_k^2\right\}\right].$$

Оскільки оцінка для методу найшвидшого спуску має вигляд

$$f(x_{k+1}) < f(x_k)\left\{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\right\},$$

а для методу /I/

$$f(x_{k+1}) \le f(x_k)\left\{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\varphi_k(\theta)\right\},$$

то очевидно, що запропонований метод збігається швидше, ніж метод найшвидшого спуску. За нормою можна одержати оцінки для методу градієнтного спуску

$$\|x_{k+1}\| \le \|x_k\| \sqrt{\frac{M}{m}} \left\{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\right\}^{1/2},$$

для запропонованого методу

$$\|x_{k+1}\| \le \|x_k\| \sqrt{\frac{M}{m}} \left\{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\varphi_k(\theta)\right\}^{1/2}.$$

Отже, метод /I/ в застосуванні до додатно визначеної квадратичної форми при певному підборі параметра θ збігається не повільніше методу найскорішого спуску, в якого збіжність за нормою не менша, ніж збіжність геометричної прогресії із знаменником

$$q = \frac{M - m}{M + m},$$

а за функціоналом – не менша, ніж збіжність геометричної прогресії із знаменником q^2.

Теорему про швидкість збіжності методу /I/ можна узагальнити на широкий клас достатньо гладких функцій $f(x)$, які поводять себе в достатньо малому околі точки мінімуму x^* в деякому сенсі так само, як додатно визначена квадратична форма. Використовуючи розклад в ряд Тейлора в околі x^* і те, що $\nabla f(x^*)=0$, одержуємо

$$f(x_{k+1})-f(x^*)=[f(x_k)-f(x^*)]\cdot\Big\{1-$$

$$-\frac{\left(H(x^*)(\tilde{x}_k-x^*),H(x^*)(x_k-x^*)\right)^2}{\left(H^2(x^*)(\tilde{x}_k-x^*),H(x^*)(\tilde{x}_k-x^*)\right)\left(H(x^*)(x_k-x^*),(x_k-x^*)\right)}\Big\},$$

де $H(x^*)$ – гессіан в точці x^* /матриця, елемент якої $h_{ij}=\dfrac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}$. Зробивши перетворення, як це ми робили з квадратичною формою, одержимо аналогічні результати.

Для перевірки теоретичних результатів розглянемо приклад. Слід мінімізувати функцію

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{5}\left(1-e^{-xt_i^y}-\frac{K_i}{32}\right)^2,$$

де

$$K_1=4,\quad K_2=10,\quad K_3=20,\quad K_4=25,\quad K_5=29;$$

$$t_1=0{,}2,\quad t_2=0{,}7,\quad t_3=1{,}4,\quad t_4=1{,}6,\quad t_5=2{,}4.$$

При мінімізації функції $F(x,y)$ методом /I/ одержано такий результат:

$F_{min}=0{,}00781187338$; $x^*=0{,}68035382$; $y^*=1{,}4103811$.

Задача розв"язувалась також методом найшвидшого спуску і методом Ньютона. Одержано аналогічний результат.

При порівнянні часу обчислення за методом /I/ і методом найшвидшого спуску, якщо прийняти час відліку останнього за одиницю, при різних θ маємо

θ	Порівняльний коефіцієнт по відношенню до методунайшвидшогоспуску
0,25	0,36
0,5	0,49
0,75	0,37

Спис к літератури: I. В а с и л ь е в Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. Изд-во Моск. ун-та, 1974. 2. Л я щ е н к о И.Н. [и др.]. Линейное и нелинейное программирование. К., "Вища школа", 1975. 3. П ш е н и ч н ы й В.Н., Д а н и л и н Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., "Наука", 1975.

УДК 518:517.948

М.Я.Бартіш, канд.фіз.-мат.наук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Одним з найбільш поширених методів розв"язування нелінійних операторних рівнянь є метод Ньютона - Канторовича [3] і його модифікації. Найбільш повну бібліографію методів типу Ньютона - Канторовича подано в [4]. Ми розглянемо застосування методу Ньютона - Канторовича для розв"язування крайової задачі системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Нехай задана крайова задача [5]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad /1/$$

$$g(x_0, x_1) = d. \qquad /2/$$

Для розв"язування задачі /1/, /2/ можна використати метод Ньютона-Канторовича в трьох його варіантах: