θ	Порівняльний коефіцієнт по відношенню до методунайшвидшогоспуску
0,25	0,36
0,5	0,49
0,75	0,37

Спис к літератури: I. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. Изд-во Моск. ун-та, 1974. 2. Ляшенко И.Н. [и др.]. Линейное и нелинейное программирование. К., "Вища школа", 1975. 3. Пшеничный В.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., "Наука", 1975.

УДК 518:517.948

М.Я.Бартіш, канд.фіз.-мат.наук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Одним з найбільш поширених методів розв"язування нелінійних операторних рівнянь є метод Ньютона - Канторовича [3] і його модифікації. Найбільш повну бібліографію методів типу Ньютона - Канторовича подано в [4]. Ми розглянемо застосування методу Ньютона - Канторовича для розв"язування крайової задачі системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Нехай задана крайова задача [5]

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \qquad /1/$$

$$g(x_0,x_1)=d. \qquad /2/$$

Для розв"язування задачі /1/, /2/ можна використати метод Ньютона-Канторовича в трьох його варіантах:

I/заміна задачі /I/, /2/ різницевим аналогом в N точках проміжку $[t_0, t_l]$ [I], у цьому випадку розв"язок задачі /I/, /2/ зведено до знаходження розв"язку нелінійної системи алгебраїчних рівнянь;

2/ застосування методу лінеаризації [5], тобто розв"язування задачі /I/, /2/ замінити знаходженням розв"язків послідовності лінійних крайових задач;

3/ знаходження невідомого x_0 з системи алгебраїчних рівнянь /2/ і розв"язування задачі Коші для рівняння /I/.

У першому випадку замість розв"язку задачі /I/, /2/ знаходимо розв"язок певним чином побудованої нелінійної системи алгебраїчних рівнянь

$$P_N(x) = 0. \qquad /3/$$

Точність, з якою розв"язок рівняння /3/ - x_{Ni} наближає розв"язок задачі /I/, /2/ в певній точці - t_i, суттєво залежить від кількості точок апроксимації. При зростанні N точність збільшується, однак ще швидше збільшується розмірність системи /3/. У другому випадку трудність полягає в тому, що ми не маємо ефективних методів розв"язування крайових задач для систем лінійних рівнянь. Хоч третій варіант методу теж не без недоліків, однак для багатьох задач він досить ефективний. При використанні третього варіанту ми повинні прийняти до уваги, що маємо лише алгоритм визначення векторфункції

$$q(x_0) = q(x_0, x_l),$$

тому в даному випадку доцільно використовувати різницеві аналоги методу.

Розглянемо більш детально застосування методу Ньютона - Канторовича /різницевий аналог/ до розв"язування задач оптимального керування на швидкодію. Нехай об"єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь [2]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu . \qquad /4/$$

Необхідно вибрати керування $u \in U = \{u: |u_i| \leq 1, \ i = 1,2,\dots,2\}$ так, щоб час переходу з точки x_0 у початок координат був мінімальний. Як показано в [2], розв"язування цієї задачі можна здійснити в чотири етапи, причому задача вважається практично розв"язана, якщо визначено значення ψ_0 /яке відповідає x_0 / для задачі Коші

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^*\psi , \quad \psi(0) = \psi_0 . \qquad /5/$$

Маючи розв"язок задачі /5/, ми з принципу максимуму однозначно визначаємо $u(t)$ і знаходимо розв"язок задачі Коші для рівняння /4/ $x(0) = x_0$. Отриманий розв"язок $x(t)$ є оптимальним, а час T , при якому $x(T) = 0$, оптимальний час переходу з точки x_0 в точку 0 . При значенні ψ_0 , яке не відповідає x_0 , аналогічно отриманий розв"язок задачі Коші /4/, має ту властивість, що $x(t) \neq 0$ для будь-якого $t > 0$.

Таким чином, розв"язок $x(t)$ залежить від ψ_0 . Отже розв"язок задачі /4/ записуємо

$$x(t) = x(t, \psi_0^{(1)}, \dots, \psi_0^{(n)}),$$

а це дає змогу змінити постановку задачі, а саме, знайти розв"язок системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$x_i(T, \psi_0^{(1)}, \dots, \psi_0^{(n)}) = 0 , \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad /6/$$

Оскільки /6/ є системою n рівнянь з $n+1$ невідомими, то необхідно одну з невідомих визначити з додаткових умов. Це легко зробити для T згідно з роботою [2]. Однак, оскільки нас цікавить лише напрямок вектора ψ_0 , то ми одну з компонент, наприклад $\psi_0^{(1)}$, приймаємо рівною 1 , або -1 /залежно від розміщення x_0 /. Отже, нам необхідно знайти розв"язок системи n рівнянь з n невідомими

$$\tilde{x}_i(T, \psi_0^{(2)}, \dots, \psi_0^{(n)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad /7/$$

Для розв"язування цієї системи можна застосувати різницевий аналог методу Ньютона - Канторовича, оскільки маємо лише алгоритм одержання $\tilde{x}(T, \psi_0^{(2)}, \dots, \psi^{(n)})$ при заданому значенні (T, ψ_0) /розв"язок задачі Коші /5/, визначення керування $u(t)$ з принципу максимуму і розв"язок задачі Коші для рівняння /4/.

Як приклад розглянемо задачу з роботи [5].

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u_1 \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u_2$$

Одержані результати обчислень наводимо нижче:

N	$\psi_i^{(1)}$	$\psi_i^{(2)}$	T	$x_1(T)$	$x_2(T)$
0	-I	-I	5	4,495	0,3
I	-I	-I,5	3,3	-0,8I9844	0
2	-I	-2,438	4,876	-0,0I4205	0
3	-I	-2,3I876	4,63752	-0,00003256	0
4	-I	-2,3I66269	4,6332539		

Таким чином, точний розв"язок $T = 2\sqrt{11} - 2 = 4{,}6332496$ ...отримано з похибкою $< 5 \cdot 10^{-6}$.

Список літератури: I. Б е р е з и н И.С., Ж и д к о в Н.П. Методы вычислений. Т.2. М., Физматгиз, I960. 2. Б о л т я н с к и й В.Г. Математические методы оптимального управления. М., "Наука", I969. 3. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. - "Труды Института математики АН УССР", I949, вып.28. 4. О р т е г а Дж., Р е й н б о л т В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., "Мир", I975. 5. Ш а м а н с к и й В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. К., "Наукова думка", I966.