УДК 518.90

І.В.Бейко, канд.фіз.-мат.наук, В.В.Ясінський

# ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ ДЛЯ ОДНІЄЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ГРИ

У нашій роботі застосовується методика гарантованого результату [1,2] для дослідження загальних ігор $n$ гравців.

Нехай для гравців І,2... , $n$ з множинами вибору $x_1$ , $x_2$ , ..., $x_n$ відповідно задано множину цільових функцій $\Omega=\{f_\alpha\}$ , $\alpha\in\mathcal{J}$

$$\mathcal{J}=\{K_1,\dots,K_s\}, s>n, \left(\forall\alpha\in\mathcal{J}: f_\alpha:\prod_{i=1}^{n}x_i\to R\right).$$

При фіксованих функціях цілі $f_{i_1}$ , $f_{i_2}$ , ..., $f_{i_n}(f_{i_j}\in\Omega,\ j=\overline{1,n})$ для гравців І,2, ..., $n$ через $A_n^{(i)}$ позначимо деяку гру гравців, в якій $i$- й гравець ініціативний. Зафіксуємо функцію цілі $f$, $f\in\Omega$ , для $i$-го гравця. Тоді множину ігор виду $A_n^{(i)}$ при різних функціях цілі $f_{i_1}$ , ..., $f_{i_{n-1}}(f_{i_j}\in\Omega,\ j=\overline{1,n-1})$ для гравців І,2, ... , $i-1$ , $i+1$ , ... $n$ /і при різних впорядкуваннях гравців І,2, ..., $i-1$ , $i+1$, ... $n$ , якщо це суттєво/ позначимо через $G_n^{(i)}(f)$ .

Припустимо, що для кожного $i$-го гравця / $i=\overline{1,n}$ / і довільної його функції цілі $f$ , $f\in\Omega$ , задано число $L_i(f)$ , причому

$$L_i(f)\le\max_{A_n^{(i)}\in G_n^{(i)}(f)}\gamma_i(A_n^{(i)}) , \qquad /І/$$

де $\gamma_i(A_n^{(i)})$ - максимальний гарантований результат $i$-го гравця в грі $A_n^{(i)}$ .

Назвемо процедурою реалізації цілі $\{L_i(f)\}_{i\in\{1,2,\dots,n\}}$ за допомогою гри $A_n^{(s)}$, $s\in\{1,2,\dots,n\}$ процедуру, яка визначається такими правилами:

І. Заданий порядок $P_n$ , відповідно до якого кожний $i$-й гравець $i=$ І, ..., $n$ пропонує гравцям І, ..., $i-1$ , $i+1$, ... $n$

пару виду $p_i=(A_n^{(i)}, a_i)$ , де $A_n^{(i)}$ - варіант гри, запропонований $i$-м гравцем /сюди може входити вибір $i$-м гравцем функцій цілі, накладення ним обмежень на множини виборів гравців, впорядкування інших гравців і т.п./, $a_i$ - плата, запропонована гравцям I, ..., $i-1$ , $i+1$ , ..., $n$ за прийняття гри $A_n^{(i)}$ .

2. Заданий порядок $\hat{P}_{n-1}(A_n^{(i)})=\langle K_1, K_2, \dots, K_{n-1}\rangle$ розподілу плати $a_i$ між гравцями I, ..., $i-1$ , $i+1$ , ..., $n$ . А саме, кожний гравець $K_j$ , $K_j \in \{$ I, ..., $i-1$ , $i+1$ , ..., $n\}$ , одержавши від гравця $K_{j-1}$ / $K_0=i$ / плату, рівну $a_i-\sum_{r=1}^{j-1} a_{iK_r}$ , віднімає від нього деяку частину $a_{iK_j}$ , яку додає до свого максимального виграшу $\gamma_{K_j}(A_n^{(i)})$ в грі $A_n^{(i)}$ , а частину $a_i-\sum_{r=1}^{j} a_{iK_r}$ , яка залишилась, передає гравцю $K_{j+1}$ .

Введемо позначення

$$d_j^{(i)}(f_{i_j})=\gamma_j(A_n^{(i)})+a_{ij}, \qquad i\neq j,$$
$$d_i^{(i)}(f_{i_i})=\gamma_i(A_n^{(i)})-a_i, \qquad i,j=\overline{1,n},$$

де $f_{i_j}$ - функція цілі $j$-го гравця в грі $A_n^{(i)}$ ; $a_{ij}$ - плата, яку одержує $j$-й гравець з загальної плати $a_i$ при порядку $\hat{P}_{n-1}(A_n^{(i)})$ .

Пару $P_K=(A_n^{(K)}, a_K)$ назвемо для $i$-го гравця вигідною, якщо

$$d_i^{(K)}(f_{K_i})\geq L_i(f_{K_i}),$$

де $L_i(f_{K_i})$ визначається з /I/.

Для кожного $i$-го гравця визначимо множину

$$D_i \overset{df}{=} \left\{P_K : K\in\{1,2,\dots,n\}, d_i^{(K)}(f_{K_i})\geq L_i(f_{K_i})\right\}.$$

3. Заданий порядок $\hat{P}_n$ , відповідно до якого після $N$-го пропонування гравцями I,2, ..., $n$ своїх пар $P_1$ , $P_2$ , ..., $P_n$ /$N$ - задане натуральне число/ вони повідомляють множини вигідних для них пар.

Позначимо через $D_1^{(M)}$, ..., $D_n^{(M)}$ множини вигідних пар повідомлених гравцями I, ..., $n$ на $M$-му етапі / $M$ - задане натуральне число/.

4. Якщо $D_0 = p_\kappa$, $D_0 = \bigcap_{i=1}^{n} D_i^{(M)}$, то реалізується пара $p_\kappa$. Коли $D_0 = \{p_{\kappa_1}, \dots, p_{\kappa_q}\}$, $q \geq 2$, то відповідно заданій випадковій величині $\delta$ з ймовірністю $\lambda(p_{\kappa_j}) = \lambda_{\kappa_j}(a_{\kappa_1}, \dots, a_{\kappa_q})$, $j = \overline{1,q}$, $\sum_{j=1}^{q} \lambda_{\kappa_j} = 1$ вибирається і реалізується одна із пар $p_{\kappa_j}$ множини $D_0$. Якщо ж $D_0 = \emptyset$, то за реалізацією заданої випадкової величини $\xi$ з ймовірністю $\mu(p_\kappa) = \mu_\kappa(a_1, a_2, \dots, a_n)$ вибирається і реалізується пара $p_\kappa$, $\kappa = \overline{1,n}$, $\sum_{\kappa=1}^{n} \mu(p_\kappa) = 1$.

5. Кожний $\kappa$-й гравець може $m_\kappa$ разів відмовлятись від своєї попередньої пропозиції / $m_\kappa$ - задане натуральне число/.

6. Кожний раз за відмовлення від своєї попередньої пропозиції гравець платить штраф $C$, $C > 0$.

7. Кожний $\kappa$-й гравець намагається при своїй функції виграшу, рівній $f$, $f \in \Omega$, досягти результату не менше, ніж $L_i(f)$.

Процедуру, яка визначається правилами I-7, позначимо через $B(A_n)$.

Стратегію $\tilde{S}_i$ $i$-го гравця в процедурі $B(A_n)$ назвемо: I/вибір плати $a_i$ за гру $A_n^{(i)}$ відповідно порядку $P_n$; 2/ визначення порядку $\hat{P}_{n-1}(A_n^{(\kappa)})$ плати $a_{\kappa_i}$ для всіх $\kappa \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$; 3/ знаходження порядку $\hat{\hat{P}}_n$ множини $D_i$. Тобто стратегія $S_i$ $i$-го гравця є вибором вектора

$$(a_i, a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{i-1,i}, a_{i+1,i}, a_{i+2,i}, \dots, a_{n_i}, D_i).$$

Позначимо через $\Phi_i(\tilde{S}_i)$ максимальний гарантований результат $i$-го гравця, якщо $\tilde{S}_i$ - його стратегія в процедурі $B(A_n)$, а через $G(L_i(f), \tilde{S}_i)$ позначимо ймовірність того, що $i$-й гравець досягне рівня $L_i(f)$, якщо $\tilde{S}_i$ -його стратегія в процедурі $B(A_n)$

Визначення. $L_i(f)$ оптимальною стратегією $\tilde{S}_i^o$ $i$-го гравця в процедурі $B(A_n)$ назвемо стратегією, яка визначається з формули

$$\tilde{S}_i^o = \begin{cases} S_i', \max\limits_{\tilde{s}_i \in \tilde{S}_i} \Phi_i(\tilde{s}_i) \geq L_i(f), \\ S_i'', \max\limits_{\tilde{s}_i \in \tilde{S}_i} \Phi_i(\tilde{s}_i) < L_i(f), \end{cases}$$

$\tilde{S}_i' : \max\limits_{\tilde{s}_i \in \tilde{S}_i} \Phi(\tilde{s}_i) = \Phi(\tilde{S}_i')$, $\tilde{s}_i'' : \max\limits_{\tilde{s}_i \in \tilde{S}_i} G(L_i(f), \tilde{s}_i) = G(L_i(f), \tilde{s}_i'')$;

$\tilde{S}_i$ – множина допустимих стратегій $i$-го гравця в процедурі $B(A_n)$; $L_i(f)$ визначається з /I/.

Теорема. Якщо (v) $m_j = 0$, $j = \overline{1,n}$, $N - M = 0$; (vv) функція $\mu_i$ монотонно зростає по $a_i$, то при порядках

$$P_n = \langle i_1, i_2, \ldots, i_n \rangle,$$

$$\hat{P}_{n-1}(A_n^{(j)}) = \langle j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \rangle, \; j \in \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$$

$$\hat{\hat{P}}_n = \langle q_1, q_2, \ldots, q_n \rangle$$

компоненти $a_i^o, a_{ji}^o, D_i^o$, $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$,

$L_i(f)$ оптимальної стратегії $\tilde{S}_i^o$ $i$-го гравця в процедурі $B(A_n)$ визначаються з формул

$$a_i = \gamma_i(A_n^{(i)}) - L_i(f), \; A_n^{(i)} \in G_n^{(i)}(f); \qquad /3/$$

$$a_{ji}^o = \begin{cases} a_{ji}', \gamma_i(A_n^{(j)}) + a_j - \sum\limits_{s=1}^{p} a_{jj_s} \geq L_i(\tilde{f}), \\ a_{ji}'', \gamma_i(A_n^{(j)}) + a_j - \sum\limits_{s=1}^{p} a_{jj_s} < L_i(\tilde{f}), \end{cases} \qquad /4/$$

де $\tilde{f}$ – функція цілі $i$-го гравця в грі $A_n^{(j)}$, $j \neq i$

$$a_{ji}' : \gamma_i(A_n^{(i)}) + a_{ji}' = L_i(f),$$

$$a_{ji}'' = a_j - \sum_{s=1}^{p} a_{jj_s}, \; p : 1 \leq p \leq n-1, \; j_p = i, \qquad /5/$$

$$D_i^0 = \begin{cases} \bigcap\limits_{t=1}^{\bar{k}} D_{q_t}, \; q_k = i \quad, \; k < n, \\ \tilde{q} \qquad\qquad , \; q_n = i \end{cases}$$

$$\tilde{q} \in Q = \{ q : \max_{j \in \bigcap\limits_{t=1} \tilde{D}_{q_t}} d_i^{(j)}(f_{j_i}) \cdot L_i^{-1}(f_{j_i}) = d_i^{(q)}(f_{q_i}) \cdot L^{-1}(f_{q_i}) \},$$

$$\tilde{D}_q = \{q_1, \ldots, q_k\}, \quad D_q = \{P_{q_1}, \ldots, P_{q_k}\}, \; q = 1, 2, \ldots, n.$$

Список літератури: І. Г е р м е е р Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами /теория принятия решений при неполном единстве/. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972. 2. Г е р м е е р Ю.Б., М о и с е е в Н.Н. О некоторых задачах теории иерархических систем управления. - В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М., "Наука", 1971.

УДК 537.523.74

З.С.Бережанська, В.І.Гордійчук

## ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА І-ГО РОДУ в $R^3$

Відомо, що розрахунок потенціалу електростатичного поля, яке утворене електронно-оптичною системою /ЕОС/ зводиться до зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в просторі з щілинами. У роботах /3,4/ були запропоновані методи розв"язування такої задачі шляхом зведення до інтегрального рівняння Фредгольма І-го роду за допомогою потенціалу простого шару. При цьому вважалось, що ЕОС -