$$D_i^0 = \begin{cases} \bigcap\limits_{t=1}^{\bar{k}} D_{q_t}, \ q_k = i, & k < n, \\ \tilde{q}, \ q_n = i \end{cases}$$

$$\tilde{q} \in Q = \left\{ q : \max_{j \in \bigcap\limits_{t=1} \tilde{D}_{q_t}} d_i^{(j)}(f_{j_i}) \cdot L_i^{-1}(f_{j_i}) = d_i^{(q)}(f_{q_i}) \cdot L^{-1}(f_{q_i}) \right\},$$

$$\tilde{D}_q = \{q_1, \dots, q_k\}, \quad D_q = \{p_{q_1}, \dots, p_{q_k}\}, \quad q = 1, 2, \dots, n.$$

Список літератури: I. Г е р м е е р Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами /теория принятия решений при неполном единстве/. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972. 2. Г е р м е е р Ю.Б., М о и с е е в Н.Н. О некоторых задачах теории иерархических систем управления. - В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М., "Наука", 1971.

УДК 537.523.74

З.С.Бережанська, В.І.Гордійчук

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА I-ГО РОДУ в R^3

Відомо, що розрахунок потенціалу електростатичного поля, яке утворене електронно-оптичною системою /ЕОС/ зводиться до зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в просторі з щілинами. У роботах [3,4] були запропоновані методи розв"язування такої задачі шляхом зведення до інтегрального рівняння Фредгольма I-го роду за допомогою потенціалу простого шару. При цьому вважалось, що ЕОС -

це сукупність поверхонь обертання з достатньо малою товщиною [3] або без товщини [4].

У роботі [2] удосконалюється метод, запропонований в [3] для випадку, коли ЕОС - сукупність поверхонь з товщиною, які не є поверхнями обертання.

Ми пропонуємо методику розв"язування інтегрального рівняння Фредгольма I-го роду [2], яка дає змогу розраховувати ЕОС без врахування товщин.

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Лапласа у просторі з щілинами

$$\Delta U = 0, \quad U\big|_S = U_0, \qquad /1/$$

де Δ - оператор Лапласа; $S = \cup S_i$ - сукупність розімкнутих поверхонь; U_0 - граничні умови на S.

Розв"язок задачі /1/ шукаємо у вигляді потенціалу просто шару

$$U(M) = \iint\limits_S \frac{q(S)}{r} dS, \quad r = |M,N|, \quad N \in S, \qquad /2/$$

де $q(S)$ - поверхнева густина розподілу зарядів; r - відстань між біжучою точкою $N(x,y,z)$ на поверхні S і фіксованою точкою простору $M(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Задача зводиться до визначення невідомої густини $q(S)$, яка задовольняє інтегральне рівняння Фредгольма I-го роду

$$\iint\limits_S \frac{q(S)}{r} dS = U_0. \qquad /3/$$

Розглянемо прямокутну систему координат (x,y,z), в якій кожна поверхня S_i описується рівнянням $z = f_i(x,y)$. Тоді інтеграл по поверхні S_i можна звести до подвійного

$$\iint\limits_{S_i} \frac{q_i(S_i)}{r} dS_i = \iint\limits_{\omega_i} \frac{q_i(x,y)\sqrt{1+V_i^2+W_i^2}}{r} dx dy = \iint\limits_{\omega_i} F^{(i)}(x,y) dx dy, \qquad /4/$$

де ω_i - проекція S_i на координатну площину (XOY), а

$$V_i = \frac{\partial f_i(x,y)}{\partial x}, \quad W_i = \frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y}.$$

Інтеграли /4/ обчислюємо, застосовуючи метод В.Л.Рвачова. Для цього використовуємо, зручну кубатурну формулу для наближеного обчислення подвійних інтегралів по довільній многокутній області [3]. Область ω_i розіб"ємо на трикутники $\Delta_\mu^{(i)}$, а кожен трикутник $\Delta_\mu^{(i)}$ на систему елементарних трикутників, площа яких $G_{\Delta_\mu^{(i)}}^{(\kappa)}$ не перевищує наперед заданої величини $\varepsilon > 0$. У цьому випадку інтеграл /4/ можна записати у вигляді

$$\sum_{\mu=1}^{N^{(i)}} \iint_{\Delta_\mu^{(i)}} F^{(i\mu)}(x,y)\,dx\,dy = \sum_{\mu=1}^{N^{(i)}} \frac{G_{\Delta_\mu^{(i)}}^{(\kappa)}}{3}\left[F_1^{(i\mu)} + F_2^{(i\mu)} + \dots + F_\gamma^{(i\mu)} + 2\left(F_{11}^{(i\mu)} + F_{12}^{(i\mu)} + \dots + F_{\rho j}^{(i\mu)}\right)\right] + R(F), \qquad /5/$$

де $N^{(i)}$ – кількість трикутників, на які розбивається область ω_i, $F_\gamma^{(i\mu)}$ – значення функції $F^{(i\mu)}(x,y)$ в точках розбиття, які належать сторонам трикутника $\Delta_\mu^{(i)}$, $F_{\rho j}^{(i\mu)}$ – значення функції $F^{(i\mu)}(x,y)$ в точках розбиття, які знаходяться в середині трикутника $\Delta_\mu^{(i)}$; $R(F)$–залишковий член, оцінка якого наведена в роботі [3].

Трикутник $\Delta_\mu^{(i)}$ розбиваємо на 4^n елементарних трикутників, шляхом послідовного проведення середніх ліній / n – порядок розбиття/. Густину $q_i(x,y)$ розподілу зарядів на поверхні S_i записуємо у вигляді суми пробово-раціональних функцій:

$$q_i(x,y) = \sum_{l=1}^{M^{(i)}} \frac{a_l^{(i)}\, t_l^{(i)}}{\left[t_l^{(i)}\right]^2 + \left(x - x_l^{(i)}\right)^2 + \left(y - y_l^{(i)}\right)^2}, \qquad /6/$$

де $a_l^{(i)}$ – невідомі коефіцієнти; $t_l^{(i)}$ – деякі наперед задані параметри; $x_l^{(i)}, y_l^{(i)}$ – точки, які належать області $\Delta_\mu^{(i)}$. Враховуючи рівність /6/ рівняння /5/ набере вигляду

$$U(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{M^{(i)}} a_l^{(i)} \left\{ \sum_{\mu=1}^{N^{(i)}} \frac{G_{\Delta_\mu^{(i)}}^{(\kappa)}}{3}\left[Q_1^{(i\mu)} + Q_2^{(i\mu)} + \dots + Q_\gamma^{(i\mu)} + 2\left(Q_{11}^{(i\mu)} + Q_{12}^{(i\mu)} + \dots + Q_{\rho j}^{(i\mu)}\right)\right]\right\}, \qquad /7/$$

де

$$Q_\nu^{(i_\kappa)} = \frac{t_l^{(i)} \cdot \sqrt{1+V_i^2+W_i^2}}{\left[t_l^{(i)}\right]^2 + \left(x_\nu^{(i_\kappa)} - x_l^{(i_\kappa)}\right)^2 + \left(y_\nu^{(i_\kappa)} - y_l^{(i_\kappa)}\right)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\left(x_\nu^{(i_\kappa)} - \bar{x}\right)^2 + \left(y_\nu^{(i_\kappa)} - \bar{y}\right)^2 + \left[f_i\left(x_\nu^{(i_\kappa)}, y_\nu^{(i_\kappa)}\right) - \bar{z}\right]^2}}, \quad /8/$$

аналогічний вигляд мають $Q_{pj}^{(i_\kappa)}$.

З рівностей /3/ і /7/ одержуємо рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{M^{(i)}} \left\{ \sum_{\mu=1}^{N^{(i)}} \frac{\sigma_{\Delta\mu}^{(i)(\kappa)}}{3} \left[Q_1^{(i_\kappa)} + Q_2^{(i_\kappa)} + \dots + Q_\nu^{(i_\kappa)} + 2\left(Q_{11}^{(i_\kappa)} + Q_{12}^{(i_\kappa)} + \dots + Q_{pj}^{(i_\kappa)} \right) \right] \right\} = U_0^{(i)}. \quad /9/$$

Рівняння /9/ розв"язується методом колокації, шляхом задоволення граничних умов у точках (x_ξ, y_ξ, z_ξ) на поверхнях $f_i\left(\xi = 1, \dots \sum_{i=1}^{m} M^{(i)}\right)$. При цьому підінтегральна функція має особливість при

$$\left(x_\nu^{(i_\kappa)}, y_\nu^{(i_\kappa)}, z_\nu^{(i_\kappa)}\right) = \left(X_\xi, Y_\xi, Z_\xi\right),$$

яку можна усунути за рахунок спеціального вибору точок інтегрування і точок колокації. Використаємо те, що жодна точка порядку розбиття n не збігається з точками порядку розбиття, відмінного від n.

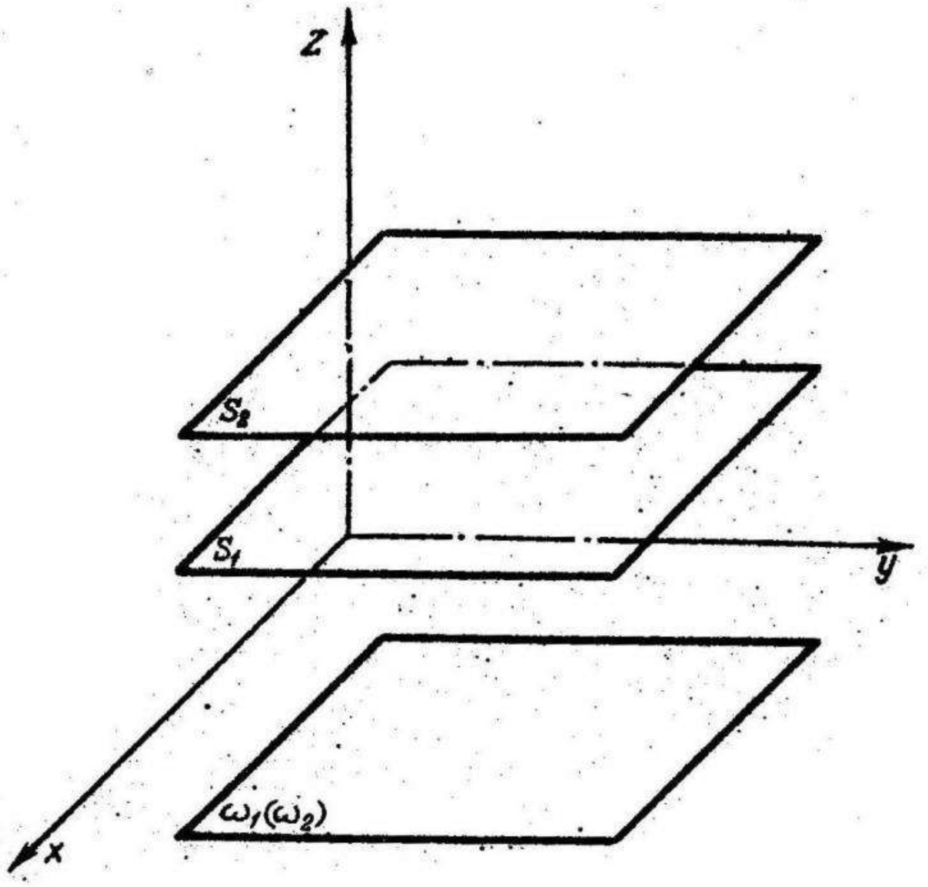
Отже, якщо точки колокації виберемо при порядку розбиття n, то точки інтегрування можна взяти при порядку розбиття ... $n-3$, $n-2$, $n-1$, $n+1$, $n+2$... Одержана система лінійних алгебраїчних рівнянь є добре обумовлена. При цьому діагональні елементи матриці домінуючі і визначник системи відмінний від нуля. Визначивши невідомі $a_l^{(i)}$, потенціал у довільній точці простору знаходимо за формулою /7/.

<u>Приклад</u>. Нехай потрібно знайти поле, утворене ЕСС, яка зображена на рисунку. Розрахунок поля здійснюється за алгольною програмою на машині М-222 при таких значеннях параметрів:

$n=2;\ m=2;\quad M_1=16;\ M_2=16;\ f_1(x,y)=0{,}2;\quad f_2(x,y)=0{,}5;$

$U_0^{(1)}=1;\ U_0^{(2)}=-1;\quad N^{(1)}=2;\ N^{(2)}=2;$

$$\omega_1 = \omega_2 = \{0{,}2 \le x \le 0{,}6;\ \ 0{,}2 \le y \le 0{,}8\}\ .$$



Час обчислення коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь становить 4 хв. Точність задоволення граничних умов 0,5%. Потенціал у довільній точці $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ визначається за формулою /7/. Нижче наведені значення потенціалу в деяких точках на осі Z :

Z	$U(0.0\ 0.0\ Z)$
0,0	0,140914
0,1	0,128565
0,2	0,093382
0,3	0,034554
0,4	-0,034554
0,5	-0,093382
0,6	-0,128565
0,7	-0,140914
0,8	-0,138738
0,9	-0,129506

Список літератури: 1. Б е з л ю д н ы й Е.Е. и др. Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В.Л.Рвачева. - "Изв. АН БССР, сер. ФМН", 1969, вып.1. 2. Г о р д и й ч у к В.И. Численное решение пространственной задачи теории потенциала методом интегральных уравнений. В сб.: Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе. Киев, 1974. 3. Л ю д к е в и ч И.В., Г о р д и й ч у к В.И. Численный метод расчета электростатического поля и траекторий электронов фокусирующих электронно-оптических систем с помощью ЭВМ. - "Вычислительная и прикладная математика", 1973, вып.17. 4. Л ю д к е в и ч И.В., Ч у х л е б о в А.Н. Численное решение граничной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае разомкнутых поверхностей. В сб.: Вычислительная математика в научно-техническом прогрессе. Киев, 1974.

УДК 539.3:534.1

О.В.Блажиєвська, канд.фіз.-мат.наук

ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ ЗВУКОВОЇ ХВИЛІ НА СФЕРІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ ПОБЛИЗУ ГРАНИЦІ РІДКОГО ПІВПРОСТОРУ

Нехай на жорстку сферу, яка занурена в обмежений нерухомою площиною /дном/ акустичний півпростір, падає плоска хвиля тиску скінчен-