Z	$U(0{,}0\ 0{,}0\ Z)$
0,0	0,140914
0,1	0,128565
0,2	0,093382
0,3	0,034554
0,4	-0,034554
0,5	-0,093382
0,6	-0,128565
0,7	-0,140914
0,8	-0,138738
0,9	-0,129506

Список літератури: 1. Б е з л ю д н ы й Е.Е. и др. Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В.Л.Рвачева. - "Изв. АН БССР, сер. ФМН", 1969, вып.1. 2. Г о р д и й ч у к В.И. Численное решение пространственной задачи теории потенциала методом интегральных уравнений. В сб.: Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе. Киев, 1974. 3. Л ю д к е в и ч И.В., Г о р д и й ч у к В.И. Численный метод расчета электростатического поля и траекторий электронов фокусирующих электронно-оптических систем с помощью ЭВМ. - "Вычислительная и прикладная математика", 1973, вып. 17. 4. Л ю д к е в и ч И.В., Ч у х л е б о в А.Н. Численное решение граничной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае разомкнутых поверхностей. В сб.: Вычислительная математика в научно-техническом прогрессе. Киев, 1974.

УДК 539.3:534.1

О.В.Блажиєвська, канд.фіз.-мат.наук

ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ ЗВУКОВОЇ ХВИЛІ НА СФЕРІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ ПОБЛИЗУ ГРАНИЦІ РІДКОГО ПІВПРОСТОРУ

Нехай на жорстку сферу, яка занурена в обмежений нерухомою площиною /дном/ акустичний півпростір, падає плоска хвиля тиску скінченної тривалості. Припустимо, що фронт падаючої хвилі паралельний до дна, а тиск у ній змінюється за законом

$$p_i(\tau, z) = p_o g(\tau_1)[H(\tau_1) - H(\tau_1 - \tau_o)], \qquad /1/$$

де $\tau = ctR^{-1}$, c – швидкість звуку в рідині; t – час, який відлічується з моменту дотику падаючої хвилі до поверхні сфери; R – радіус сфери; $z = ZR^{-1}$, Z – координата, що відлічується від центра сфери вздовж осі симетрії /границя півпростору – це площина $Z = a > R$ /;

p_o – постійна, яка має розмірність тиску; $g(\tau_1)$ – довільна функція-оригінал, $\tau_1 = \tau - z - 1$; H – одинична функція Хевісайда; $\tau_o = ct_o R^{-1}$,

t_o – тривалість падаючого імпульсу.

Визначимо тиск p_e у дифракційній хвилі. Запишемо його у вигляді

$$p_e = p_1 + p_2, \qquad /2/$$

де $p_1 = p_o g(\tau_2)[H(\tau_2) - H(\tau_2 - \tau_o)]$ – тиск у відбитій від жорсткого дна хвилі, $\tau_2 = \tau - 1 + z - 2a/R$; p_2 – тиск, викликаний наявністю сфери.

У загальноприйнятій лінійній постановці ця задача зводиться до розв"язування хвильового рівняння, яке задовольняє функція p_2 в області, зайнятій рідиною, при нульових початкових умовах, умовах непроникливості сфери та дна і умовах випромінювання на нескінченності.

Позначимо через p_2^L трансформанту Лапласа по змінній τ від функції p_2 . Для визначення p_2^L маємо таку крайову задачу:

$$\Delta p_2^L - s^2 p_2^L = 0; \qquad /3/$$

$$\frac{\partial p_2^L}{\partial n} = 0 \quad \text{на } T_o \; ; \qquad /4/$$

$$\frac{\partial p_2^L}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}(p_i^L + p_1^L) \quad \text{на } T \; ; \qquad /5/$$

$p_2^L = 0$ в безмежно віддаленій точці. /6/

Тут Δ -тримірний оператор Лапласа у безрозмірних координатах; s - параметр перетворення Лапласа; T_0 і T - відповідно поверхні дна і сфери; n -орт нормалі до відповідної поверхні; $p_1^L = p_0 g^L(s) exp[-s(1+z)]$; $p_1^L = p_0 g^L(s) exp[-s(1-z+2a/R)]$; $g^L(s) = \int_0^{\tau_0} g(x) exp(-sx) dx$.

Розв"язуємо поставлену крайову задачу альтернативним методом Шварца. Фактично виділення доданку p_1 у формулі /2/ є першим кроком цього методу, коли розглядається задача дифракції на дні при відсутності сфери /не враховується умова /5/ /. Наступним кроком є розв"язок задачі дифракції падаючої та відбитої від дна хвиль на сфері за умови, що дно відсутнє, тобто не береться до уваги умова /4/ і так далі.

Розглянемо так звану прифронтову асимптотику розв"язку, коли в просторі зображень за Лапласом приймається, що $s \to \infty$. Оскільки при цьому параметр $\varepsilon = s^{-1}$ - малий, то шукаємо розв"язок за допомогою асимптотичного методу Вишика і Люстерника [1].

Зауважимо, що асимптотичний розв"язок із залишковим членом довільного порядку малості можна одержати цим методом лише у вузькій смузі /порядку ε / поблизу границі області. Тому методом Вишика і Люстерника визначаємо функцію p_2^L на границі області, а потім шукаємо розв"язок у довільній точці простору, скориставши в формулою Кірхгофа [3]. Інтеграл Кірхгофа обчислюємо асимптотичним методом Лапласа [2].

Введемо систему безрозмірних сферичних координат r, θ, φ, початок якої збігається з центром сфери. Запишемо шукану функцію у вигляді

$$p_{21}^L = p_0 g^L(s) \{ U_1^L(s,r,\theta) exp[-s(1+cos\theta)] + U_2^L(s,r,\theta) exp[-s(1-cos\theta+2a/R)] \} . \qquad /7/$$

Легко переконатись, що функції U_i^L $(i=1,2)$ задовольняють такі диференціальні рівняння:

$$L_\varepsilon u_i^L - \sum_{K=0}^{2} \varepsilon^K (-1)^{K+i} L_K u_i^L = 0 \ . \qquad /8/$$

Тут $\varepsilon = \frac{1}{S}$; $L_0 = r^{-2}\sin^2\theta - 1$; $L_1 = 2r^{-2}(\cos\theta + \sin\theta\,\partial/\partial\theta)$; $L_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + r^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$.
На поверхні сфери шукані функції задовольняють умови

$$\left.\frac{\partial u_i^L}{\partial r}\right|_{r=1} = (-1)^{i+1} S\cos\theta \ . \qquad /9/$$

Провівши згідно з методом Вишика і Люстерника "перше розщеплення" оператора L_ε, одержуємо u_i^L. Тому розв"язок є функцією примежевого шару і його можна отримати "другим розщепленням" оператора L_ε. Для цього введемо нову змінну α, приймаючи $\alpha = S(r-1)$.

Розв"язок рівняння /8/ шукаємо у вигляді

$$u_i^L(\varepsilon, \alpha, \theta) = \sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon^K u_{Ki}^L(\alpha, \theta) \ . \qquad /10/$$

Методом Вишика і Люстерника одержуємо

$$u_{0i}^L = \begin{cases} (-1)^{i+1} \exp[\alpha\cos\theta], & \text{коли} \quad -1 \le \cos\theta < 0; \\ (-1)^i \exp[-\alpha\cos\theta], & \text{коли} \quad 0 < \cos\theta \le 1; \end{cases} \qquad /11/$$

$$u_{1i}^L = \begin{cases} [1+(-1)^{i+1}]\left[\alpha^2\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta+1}{2\cos^3\theta}(1-\alpha\cos\theta)\right] l^{\alpha\cos\theta}, & \text{коли } \cos\theta < 0; \\ [1+(-1)^i]\left[-\alpha^2\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta+1}{2\cos^3\theta}(1+\alpha\cos\theta)\right] l^{-\alpha\cos\theta}, & \text{коли } \cos\theta > 0; \end{cases} \qquad /12/$$

і так далі.

Функції u_{Ki}^L терплять розрив неперервності при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Отже, розв"язок /10/ є нерівномірноточним. Наявне явище, аналогічне внутрішньому примежевому шару за термінологією Вишика і Люстерника.

Введемо "внутрішню" змінну, приймаючи $\gamma = S\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. У змінних α, γ вихідне рівняння /3/ має вигляд

$$\sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon^K M_K P_2^L = 0, \qquad /13/$$

$M_0 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} - 1$; $M_1 = 2\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - 1\right) + 2\frac{\partial}{\partial\alpha}$; $M_2 = \alpha^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - 1\right) + 2\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}$ т.д.

Розв"язок рівняння /I3/ шукаємо у вигляді

$$p_{22}^{L}=p_0 g^{L}(s)\left\{\exp(-s)\sum_{K=0}^{\infty}\varepsilon^{K}\eta_{K1}^{L}+\exp\left[-s\left(1+\frac{2a}{R}\right)\right]\sum_{K=0}^{\infty}\varepsilon^{K}\eta_{K2}^{L}\right\}. \qquad /I4/$$

Для визначення функцій η_{Ki}^{L} одержуємо рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\mathcal{L}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}-1\right)\eta_{0i}^{L}=0 \quad \text{і т.д.} \qquad /I5/$$

Розв"язок рівняння /I5/ типу функції внутрішнього примежевого шару, який задовольняє умову $\partial p_{22}^{L}/\partial n=0$ на T і є таким, що функція $p_{21}^{L}+p_{22}^{L}$ неперервна і гладка при $\theta=\frac{\pi}{2}$, має вигляд

$$\eta_{0i}^{L}=\begin{cases}[1+(-1)^{i}]\exp\gamma, & \text{коли } \gamma<0;\\ [1+(-1)^{i+1}]\exp(-\gamma), & \text{коли } \gamma>0.\end{cases} \qquad /I6/$$

Отже, записуємо нульове наближення розв"язку на поверхні сфери

$$p_2^{L}\Big|_{r=1}=p_0 g^{L}(s)\begin{cases}\exp[-s(1+\cos\theta)-\exp[-s(1+\frac{2a}{R}-\cos\theta)]+2\exp[-s(1+\frac{2a}{R}+\theta-\frac{\pi}{2})], & \text{коли } \theta>\frac{\pi}{2};\\ -\exp[-s(1+\cos\theta)+2\exp[-s(1+\frac{\pi}{2}-\theta)]+\exp[-s(1+\frac{2a}{R}-\cos\theta)], & \text{коли } \theta<\frac{\pi}{2}.\end{cases} \qquad /I7/$$

Розв"язок є рядом по експонентах, показники яких визначають моменти приходу різних дифракційних хвиль у точку спостереження. Зокрема, якщо обмежитись лише доданками /II/, то одержимо так зване наближення Кірхгофа. Доданки /I6/ визначають тиск у повзучих хвилях.

Скориставшись формулою Кірхгофа, визначаємо тиск у довільній точці [3]

$$p_2^{L}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{p_2^{L}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{L^{-sl}}{l}\right)-\frac{\partial p_2^{L}}{\partial R}\,\frac{L^{-sl}}{l}\right\}_{R=1}\sin\Psi\,d\Psi, \qquad /I8/$$

де $l=\sqrt{r^2+R^2-2r\cos(\theta-\Psi)}$ - безрозмірна віддаль від точки спостереження до довільної точки на поверхні інтегрування.

Обчислимо інтеграл /I8/ методом Лапласа [2]. Розглянемо випадок, коли $\theta > \frac{\pi}{2}$. Стаціонарні точки ψ_i інтегралів, які входять у формулу /I8/, є розв"язками рівнянь

$$\sin\psi_1 + r\sin(\theta-\psi_1)\left[r^2+1-2r\cos(\theta-\psi_1)\right]^{-1/2} = 0\,, \qquad /19/$$

$$-1 + r\sin(\theta-\psi_2)\left[r^2+1-2r\cos(\theta-\psi_2)\right]^{-1/2} = 0\,. \qquad /20/$$

Вклади від критичних точок $\psi=\psi_2$ характеризують тиск у повзучих хвилях, які сповзають з поверхні сфери. Вклади від критичних точок $\psi=\psi_1$ визначають тиск у хвилях, відбитих від поверхні сфери.

Визначимо функцію p_l^L у довільній точці осі $\theta=\pi$. Якщо обмежитись лише головними членами розкладів інтегралів /I8/ по степенях параметра ε , то тоді маємо

$$p_l^L = p_0 q^L(s)\left\{-\frac{1}{2r-1}e^{-s(r-1)} - 2\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\,\Gamma\!\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{r}\sqrt[3]{s}\,e^{-s\tau_*}\right\}\,, \qquad /21/$$

де $\tau_* = 1+\frac{2a}{R}+\sqrt{r^2-1}-\arcsin\frac{1}{r}$ – час приходу першої повзучої хвилі, якщо $\frac{2a}{R}<\pi$.

Використовуючи формули обернення перетворення Лапласа і приймаючи $g(\tau)=\sin(\Omega\tau)[H(\tau)-H(\tau-\tau_0)]$, знаходимо дифракційний тиск на акустичній осі

$$p_l\Big|_{\theta=\pi} = -\frac{p_0}{2r-1}\sin\Omega(\tau+1-r)\left[H(\tau+1-r)-H(\tau+1-r-\tau_0)\right] - 2\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\,\frac{p_0}{r}\Omega\int_0^{\tau}\frac{\cos[\Omega(x-\tau_*)]}{\sqrt[3]{\tau-x}}\left[H(x-\tau_*)-H(x-\tau_*-\tau_0)\right]dx\,.$$

Список літератури: I. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – "УМН", I957, т.I2, № I2. 2.Е в г р а ф о в М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, I962. 3. Н о в а ц к и й В. Теория упругости. М., "Мир".I975.