При отриманих оптимальних параметрах $h_1^0 = 1{,}45$ мм, $h_2^0 = 1{,}70$ мм, $\beta^0 = 0{,}0206$, $h_4^0 = 0{,}41$ мм максимальні напруження відповідно дорівнюють $\sigma_\theta^{max}/q = 56$, $\sigma_x^{max}/q = 59$, $\sigma_y^{max}/q = 56$.

Розроблені алгоритми і програми можна використати як складові елементи загальної системи комплексної автоматизації процесу розрахунку і оптимального проектування ЕВП.

Список літератури: I. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., "Мир", 1972. 2. Ощипко Л.Й., Іванків К.С., Юдіна Т.В. Оптимальний розрахунок деяких елементів електровакуумних приладів. – "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1977, вип.12. 3. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Т.I. М., "Машиностроение", 1968. 4. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Т.2. М., "Машиностроение", 1968. 5. Флейшман Н.П., Иванкив Е.С., Ощипко Л.Й. К оптимальному проектированию составных оболочек ЭВП. – В сб.: Качество, прочность, надежность и технологичность электровакуумных приборов. К., "Наукова думка", 1976.

УДК 516.6:517.944

Я.Г.Савула, канд.фіз.-мат.наук

НОВІ ОРТОГОНАЛЬНІ КРИВОЛІНІЙНІ КООРДИНАТИ

У прикладних задачах математичної фізики і механіки буває зручно визначати положення точки в просторі не трьома декартовими координатами x, y, z, а деякими іншими криволінійними $-\alpha_1$, α_2, α_3, які більш тісно пов"язані з досліджуваним об"єктом. При цьому, оскільки запис диференціальних виразів дивергенції, градієнта і т.п. є найпростішим в ортогональних системах координат, то вони найбільш вживані.

Побудуємо нову криволінійну систему координат, координатними поверхнями якої є різані поверхні /поверхні Монжа/ [3 – 5].

Припустимо, що напрямна різаної поверхні плоска гладка крива, задана рівняннями

$$x = R_2\, x_0(\alpha_2)\ , \quad y = R_2 y_0(\alpha_2)\,. \qquad /1/$$

Твірною різаної поверхні є деяка інша гладка крива, задана параметрично в локальній системі координат η, ξ рівняннями

$$\eta = R_1 \eta_0(\alpha_1)\ , \quad \xi = R_1 \xi_0(\alpha_1)\,. \qquad /2/$$

Як відомо [3,4] , рівняння різаної поверхні з плоскою напрямною /1/ мають вигляд

$$\begin{aligned} x &= R_2 x_0(\alpha_2) - R_1 \eta_0(\alpha_1) \frac{y_0'(\alpha_2)}{\sqrt{[x_0'(\alpha_2)]^2 + [y_0'(\alpha_2)]^2}}\,, \\ y &= R_2 y_0(\alpha_2) + R_1 \eta_0(\alpha_1) \frac{x_0'(\alpha_2)}{\sqrt{[x_0'(\alpha_2)]^2 + [y_0'(\alpha_2)]^2}} \\ z &= R_1 \xi_0(\alpha_1)\,. \end{aligned} \qquad /3/$$

Розглянемо сім"ю ліній в системі координат η , ξ кожну з яких одержують шляхом зсуву точок кривої /2/ в напрямку нормалі. Оскільки напрямні косинуси нормалі до кривої /2/ можна представити співвідношеннями $-\frac{\xi_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}$, $\frac{\eta_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}$, то рівняння сім"ї кривих мають вигляд

$$\begin{aligned} \eta &= R_1\Big[\eta_0 + (\alpha_3 + R_3) \frac{\xi_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}\Big], \\ \xi &= R_1\Big[\xi_0 - (\alpha_3 + R_3) \frac{\eta_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}\Big]\,, \end{aligned} \qquad /4/$$

де R_3 - постійна; α_3 - параметр, кожному значенню якого відповідає одна лінія сім"ї /4/.

Вважатимемо криві /4/ гладкими. Це накладає на зміну параметра α_3 обмеження

$$(\eta')^2 + (\xi')^2 \neq 0\,. \qquad /5/$$

Підставляючи рівняння сім"ї кривих /4/ у формули /3/, одержуємо систему криволінійних координат

$$x = R_2 x_0 - R_1\left[\eta_0 + (\alpha_3 + R_3)\frac{\xi_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}\right]\frac{y_0'}{\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}},$$

$$y = R_2 y_0 + R_1\left[\eta_0 + (\alpha_3 + R_3)\frac{\xi_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}\right]\frac{x_0'}{\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}}, \qquad /6/$$

$$z = R_1\left[\xi_0 - (\alpha_3 + R_3)\frac{\eta_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}\right].$$

<u>Твердження</u>. Система криволінійних координат /6/ - ортогональна. Обчисливши за формулами /6/ похідні $\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial z}{\partial \alpha_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, знайдемо, що коефіцієнти g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j)$ метричного тензора дорівнюють нулю, що доводить твердження.

Коефіцієнти Ляме H_1, H_2, H_3 ортогональної криволінійної системи координат /6/ можна записати так:

$$H_1 = R_1 t_1(\alpha_1, \alpha_3)\tau_1(\alpha_1),$$

$$H_2 = R_1 t_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\tau_2(\alpha_2), \qquad /7/$$

$$H_3 = R_1,$$

де

$$\tau_1 = \sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}, \qquad \tau_2 = \sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}, \qquad /8/$$

$$t_1 = 1 + (\alpha_3 + R_3)\frac{\xi_0''\eta_0' - \xi_0'\eta_0''}{\tau_1^3}, \quad t_2 = \frac{R_2}{R_1} - \left[\eta_0 + (\alpha_3 + R_3)\frac{\xi_0'}{\tau_1}\right]\frac{y_0''x_0' - y_0'x_0''}{\tau_2^3}.$$

Відомо [1], що якобіан J ортогональної криволінійної системи координат визначається через коефіцієнти Ляме співвідношеннями

$$J = H_1 H_2 H_3. \qquad /9/$$

Звідси, щоб визначник Якобі був ненульовим, достатньо вимагати, щоб не дорівнював нулю жоден із коефіцієнтів Ляме. Згідно з формулами /7/, /8/, оскільки напрямна і твірна різаної поверхні - гладкі криві, тобто $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$, ця вимога еквівалентна такій: $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$.

З огляду на вираз /5/ перше з останніх співвідношень виконується завжди. Таким чином, якобіан криволінійної системи координат /6/ відмінний від нуля, якщо $t_2 \neq 0$.

Із формул /6/ одержуються відомі координатні системи: циліндрична, сферична, а також такі, координатними поверхнями яких є поверхні обертання.

Прийнявши $x_0 = \cos\alpha_2$, $y_0 = \sin\alpha_2$, $\eta_0 = \sin\alpha_1$, $\xi_0 = \cos\alpha_1$, $R_2 = 0$, $R_3 = -1$, із співвідношень /6/ одержуємо відомі формули сферичної системи координат

$$x = R_1\alpha_3 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2, \quad y = R_1\alpha_3 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2, \quad z = R_1\alpha_3 \cos\alpha_1, \qquad /10/$$

коефіцієнти Ляме якої, згідно з формулами /7/, /8/, мають вигляд

$$H_1 = R_1\alpha_3, \quad H_2 = R_1\alpha_3 \sin\alpha_1, \quad H_3 = R_1. \qquad /11/$$

Щоб одержати циліндричну систему координат, необхідно прийняти у формулах /6/

$$x_0 = \alpha_2, \quad y_0 = 0, \quad \eta_0 = -\sin\alpha_1, \quad \xi_0 = \cos\alpha_1, \quad R_3 = -1.$$

Після нескладних обчислень одержуємо

$$x = R_2\alpha_2, \quad y = -R_1\alpha_3 \sin\alpha_1, \quad z = R_1\alpha_3 \cos\alpha_1.$$

Коефіцієнти Ляме цієї системи координат, згідно зі співвідношеннями /7/, /8/, набирають вигляду

$$H_1 = R_1\alpha_3, \quad H_2 = R_2, \quad H_3 = R_1.$$

Коли прийняти у формулах /6/ $\eta_0 = -\sin\alpha_1$, $\xi_0 = \cos\alpha_1$, то одержимо координатну систему із координатними поверхнями $\alpha_3 = const$ у вигляді криволінійних труб колового перерізу. У випадку $x_0 = \cos\alpha_2$, $y_0 = \sin\alpha_2$ ці поверхні є торами.

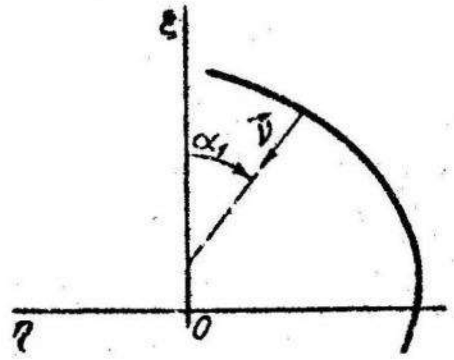

Рис.I.

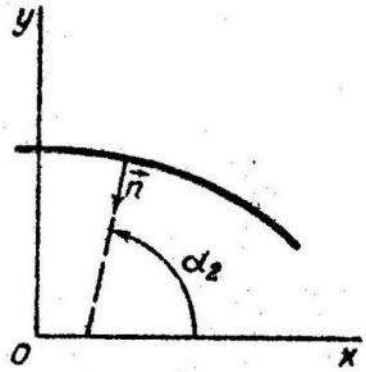

Рис.2.

Якщо параметром α_1 твірної /2/ різаної поверхні є кут між нормаллю $\vec{\nu}$ і віссю ξ /рис.I/, параметром α_2 напрямної /I/ є кут між нормаллю $\vec{n}$ і віссю x /рис.2/, то формули /6/ - /8/ для побудованої криволінійної системи координат спрощуються. Тоді маємо

$$\frac{\xi_0''\eta_0' - \xi_0'\eta_0''}{q_1^2} = 1 \; , \quad \frac{y_0''x_0' - y_0'x_0''}{q_2^2} = 1 \; , \qquad /I2/$$

оскільки ліві частини цих рівностей дорівнюють швидкостям зміни кутів між нормалями і параметрами відповідно α_1 та α_2. Напрямні косинуси нормалей $\vec{\nu}$ і $\vec{n}$ такі:

$$\vec{\nu} = \left\{ -\frac{\xi_0'}{q_1}, \frac{\eta_0'}{q_1} \right\} , \qquad \vec{n} = \left\{ -\frac{y_0'}{q_2}, \frac{x_0'}{q_2} \right\} . \qquad /I3/$$

Для вибраної параметризації кривих /I/, /2/ величини /I3/ можна записати у вигляді

$$\vec{\nu} = \{ \sin\alpha_1, -\cos\alpha_1 \} , \quad \vec{n} = \{ -\cos\alpha_2, -\sin\alpha_2 \} . \qquad /I4/$$

Враховуючи співвідношення /I3, /I4/, із формул /6/ одержуємо

$$\begin{aligned} x &= R_2 x_0(\alpha_2) - R_1[\eta_0(\alpha_1) - (\alpha_3 + R_3)\sin\alpha_1]\cos\alpha_2 , \\ y &= R_2 y_0(\alpha_2) - R_1[\eta_0(\alpha_1) - (\alpha_3 + R_3)\sin\alpha_1]\sin\alpha_2 , \\ z &= R_1[\xi_0(\alpha_1) + (\alpha_3 + R_3)\cos\alpha_1] . \end{aligned} \qquad /I5/$$

Враховуючи формули /I2/, запишемо коефіцієнти Ляме /7/, /8/ системи координат /I5/ так:

$$H_1 = R_1 t_1(\alpha_1, \alpha_3), \quad H_2 = R_1 t_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad H_3 = R_1. \qquad /I6/$$

Тут

$$t_1 = \sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2} + \alpha_3 + R_3,$$
$$t_2 = \frac{R_2}{R_1}\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2} - \eta_0 + (\alpha_3 + R_3)\sin\alpha_1. \qquad /I7/$$

Зауважимо, що використані нами при одержанні сферичної системи координат /I0/ рівняння кола параметризовані кутами між нормалями і осями координат. У зв"язку з цим співвідношення /I0/, /II/ одержуються шляхом нескладних обчислень із формул /I5/ - /I7/, якщо прийняти

$$R_2 = 0, \; R_3 = -1, \; x_0 = \cos\alpha_2, \; y_0 = \sin\alpha_2, \; \eta_0 = \sin\alpha_1, \; \xi = \cos\alpha_1.$$

Список літератури: I. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., "Высшая школа", 1970. 2. Лурье А.И. Теория упругости. М., "Наука", 1970. 3. Норден А.П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956. 4. Савула Я.Г. Статика оболочек с резной поверх срединной поверхностью. Автореф. на соиск. уч.степени канд.физ.-мат.наук. Львов, 1973. 5. Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Про одне можливе розширення класу оболонок канонічних форм. - "Вісник Львів. ун-ту, сер.мех.-мат.", 1974, вип.9.