УДК 518.12:517.55

А.І.Кардаш, канд.фіз.-мат.наук, А.М.Кузик, І.І.Чулик, канд.фіз.-мат.наук

ПРО ДЕЯКІ АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ДІАГРАМИ НЬЮТОНА ФУНКЦІЇ ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ КРИВОЇ СПРЯЖЕНИХ РАДІУСІВ ЗБІЖНОСТІ

Нехай задано степеневий ряд

$$f(z,w)=\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} z^k w^l, \quad a_{00}\neq 0, \qquad /1/$$

збіжний в повній бікруговій області D. В роботі [1] розглядаються і вивчаються поняття діаграми Ньютона $\mathcal{D}_f$ та мажоранти Ньютона $\mathfrak{M}_f(z,w)$ ряду /1/. Нехай $\mathcal{D}_{R_f}$ – асимптотичний конус діаграми $\mathcal{D}_f$, а $\mathfrak{M}_{R_f}(z,w)$ – асимптотична мажоранта Ньютона ряду /1/. Діаграма $\mathcal{D}_f$ та її асимптотичний конус $\mathcal{D}_{R_f}$ розглядаються в евклідовому просторі $\mu\nu\lambda$ [2,3].

Нехай рівняння асимптотичного конуса має вигляд /2/

$$\lambda=F(\mu,\nu). \qquad /2/$$

Для зручності викладу вважатимемо, що область D обмежена. Тоді функція $F(\mu,\nu)$ визначена в області $\mu\geq 0$, $\nu\geq 0$.

Розглянемо функцію $\chi(q)\equiv F(1-q,q)$, визначену і опуклу на відрізку $[0,1]$, який позначимо через M. Через m позначимо скінчену або зчислену множину точок відрізка $[0,1]$, в яких функція $\chi(q)$ недиференційовна. Тоді [2,3] крива спряжених радіусів збіжності ряду /1/ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x&=\exp[\chi(q)-q\chi'(q)],\\ y&=\exp[\chi(q)+(1-q)\chi'(q)], \end{aligned} \qquad /3/$$

якщо $q \in M \setminus m$, і рівнянням

$$x^{1-q} y^{q} = \exp[\varkappa(q)], \qquad /4/$$

$$\exp[\varkappa(q) - q\varkappa'(q+0)] < x < \exp[\varkappa(q) - q\varkappa'(q-0)],$$

якщо $q \in m$, де $\varkappa'(q-0)$, $\varkappa'(q+0)$ відповідно ліва і права похідні функції $\varkappa(q)$ в точці q. Криву /4/ за Фабером [4] називатимемо W – кривою. Криву спряжених радіусів збіжності, яка визначається рівняннями /3/ і /4/, позначимо через

$$\varphi(x,y) = 0. \qquad /5/$$

Будь-якій точці (x, y) кривої /5/ відповідає площина

$$\lambda = \mu \ln x + \nu \ln y ,$$

а умови $\mu \ln x + \nu \ln y - \lambda \leq 0$, якщо точка (x,y) пробігає вздовж кривої /5/, визначають в додатному октанті простору $\mu\nu\lambda$ асимптотичний конус $\sim\mathcal{J}^{q}_{R_f}$. При цьому для будь-якого $q \in [0,1]$ вірне твердження: спряжені радіуси збіжності ряду /І/ задовольняють рівняння

$$x^{1-q} y^{q} = \exp[\varkappa(q)] .$$

Відзначимо, що необхідною і достатньою умовою того, що спряжені радіуси збіжності утворюють W -криву, є наявність ребра злому поверхні $\sim\mathcal{J}^{q}_{R_f}$.

Отриманий аналітичний вираз кривої /5/ дає змогу зробити висновок про неперервність кривої /5/ та її диференційованість або існування хоча б лівої або правої похідних в кожній точці цієї кривої, що добре узгоджується з результатами, отриманими раніше іншим шляхом [4].

Логарифмічна опуклість кривої спряжених радіусів збіжності у випадку /4/ очевидна, а у випадку /3/ зводиться до виконання умови $\varkappa''(q) > 0$, що завжди має місце [2,3].

Якщо на деякому інтервалі (q_1, q_2), де $0<q_1<q_2<1$, виконується умова $\chi''(q)=0$, то це означає, що $\chi(q)$ - лінійна на (q_1, q_2), а асимптотичний конус $\mathcal{\tilde{S}}_{n_f}$ для всіх μ, ν, що визначаються умовами

$$\mu=(1-q)t,$$
$$\nu=qt,$$
$$t>0,\ q_1<q<q_2,$$

вироджується в плоску грань, обмежену твірними $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$, які проектуються відповідно на промені

$$q_1\mu=(1-q_1)\nu,\ \ \lambda=0,$$
$$q_2\mu=(1-q_2)\nu,\ \ \lambda=0.$$

Мають місце теореми:

Теорема I. Нехай $\tilde{q}\in m$ і в деякому околі Q точки $\tilde{q}$ існують $\chi'(q)$ та $\chi''(q)$. Тоді, якщо $\chi''(q)>0$ хоча б зліва або справа від точки $\tilde{q}$ в околі Q, то крива /5/ гладка в усіх точках, що відповідають $q\in Q$.

Теорема 2. Для того, щоб на кривій /5/ існувала кутова точка, необхідно й достатньо, щоб для всіх $q\in(q_1, q_2)$, де $0<q_1<q_2<1$, $q_1, q_2\in m$ функція $\chi(q)$ була лінійною.

Список літератури: I. К а р д а ш А.I., К о с т о в с ь к и й О.М., Ч у л и к I.I. Мажоранта та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1967, вип.3. 2. К а р д а ш А.I., Ч у л и к I.I. Дослідження границі області збіжності степеневих рядів функції двох комплексних змінних. - "ДАН УРСР, серія А", 1972, № 5. 3. К а р д а ш А.I., Ч у л и к I.I. Дослідження граничних властивостей мажоранти й діаграми Ньютона функцій двох комплексних змінних. - "ДАН УРСР", серія А", 1972, № 4. 4. Agrusti G. Sui raggi associati di convergenza di una serie potenze ad n variabili complesse. - „Giorn. mat. Battaglini", 1955, 83, № 2